

Л. Р. НЕМАН К. С. ДЕМИРЧИН

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**





Л. Р. НЕЙМАН и К. С. ДЕМИРЧЯН

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

В ДВУХ ТОМАХ



«Э Н Е Р Г И Я»
Ленинградское отделение
1967

Л. Р. НЕЙМАН и К. С. ДЕМИРЧЯН

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

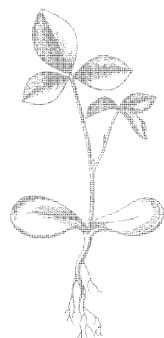
**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ
ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
И ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ**

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

**ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ**

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебника для электроэнергетических, электротехнических и радиотехнических специальностей высших учебных заведений

ТОМ ПЕРВЫЙ



Scan AAW

Книга предназначена для студентов электротехнических, энергетических и радиотехнических высших учебных заведений и факультетов, изучающих эту дисциплину с отрывом и без отрыва от производства.

Содержание книги соответствует программе Министерства высшего и среднего специального образования СССР по одноименной дисциплине. Труд делится на четыре части: ч. I — «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей», ч. II — «Теория линейных электрических цепей», ч. III — «Теория нелинейных электрических и магнитных цепей» и ч. IV — «Теория электромагнитного поля». Части I и II образуют первый том, части III и IV — второй том книги.

Светлой памяти
Владимира Федоровича МИТКЕВИЧА
и
Павла Лазаревича КАЛАНТАРОВА
посвящается
настоящий труд

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий труд, в котором излагается курс «Теоретические основы электротехники», составлен в соответствии с новой программой этого курса, разработанной в мае 1964 г. учебно-методической комиссией по теоретической электротехнике Министерства высшего и среднего специального образования СССР и утвержденной МВ и ССО СССР в сентябре 1964 г.

В состав комиссии входили представители многих вузов страны. При разработке программы была учтена широкая дискуссия, проведенная по вопросу о содержании курса «Теоретические основы электротехники» на страницах журнала «Электричество» в 1963—1965 гг. Авторы книги при ее составлении всемерно стремились учесть соображения, высказанные в процессе этой дискуссии и при обсуждениях во время работы комиссии. Вместе с тем настоящая книга является логическим развитием учебника под тем же наименованием, составленного ранее Л. Р. Нейманом и П. Л. Калантаровым и вышедшего пятью основными изданиями (1940—1959 гг.) и дополнительно тринадцатью изданиями в переводе на другие языки в СССР и в странах социалистического содружества. Профессор П. Л. Калантаров скончался в 1951 г. и, естественно, вопросы, изложенные в составленных им ранее разделах, получили за последние полтора десятка лет существенное развитие и изменение. Нашли широкое применение новые методы анализа и синтеза электрических цепей, ранее не входившие в учебную литературу. Поэтому назрела необходимость заново полностью переработать курс. Авторы сохранили составленные П. Л. Калантаровым параграфы, в которых рассматривается явление феррорезонанса, а также частично сохранили в значительной мере в прежней редакции параграфы, в которых изложены вопросы о расчете процессов в однородных линиях. Соответствующие параграфы подверглись некоторой переработке с целью согласования их с остальными, составленными заново разделами книги.

В книгу введены новые понятия, относящиеся к общей теории электрических цепей, например, некоторые топологические понятия из области теории электрических цепей, понятие о положительной вещественной функции цепи, о комплексной частоте, представление

о структурных схемах цепи и т. д. Также рассмотрены общие свойства электрических цепей, имеющие значение как для анализа, так и для синтеза электрических цепей.

Наряду с отражением новых вопросов, основное внимание уделено систематическому изложению методов расчета. Авторы стремились подчинить этой цели также изложение и отдельных вопросов. Например, явление резонанса рассматривается с позиций частотных свойств цепи и метода частотных характеристик, рассмотрение катушек и трансформатора с ферромагнитным сердечником выполнено как пример использования метода эквивалентных синусоид для расчета нелинейных электрических цепей при периодических процессах и т. д. Получили отражение матричный метод анализа и некоторые методы синтеза линейных электрических цепей, метод гармонического баланса и метод медленно меняющихся амплитуд для расчета процессов в нелинейных цепях, а также осуществлено развитие ряда других методов.

Излагая в книге формальные методы математического анализа и расчета электрических цепей и электромагнитных полей, мы сохраняем основную традицию, заложенную еще основателем кафедры теоретических основ электротехники Ленинградского политехнического института и одним из основоположников отечественной школы теоретической электротехники академиком В. Ф. Миткевичем, заключающуюся в сочетании формальных методов расчета с рассмотрением физических явлений в электромагнитных устройствах.

Выражаем свою глубокую признательность рецензентам профессорам И. М. Чиженко и А. А. Янко-Триницкому, а также доцентам В. Г. Мацевитому, О. Б. Толпыго и к. т. н. Ю. Ф. Выдолобу, тщательно просмотревшим рукопись книги и сделавшим ряд ценных замечаний. Считаю своим долгом выразить благодарность доцентам И. Ф. Кузнецову и В. Ф. Поповой, оказавшим нам большую помощь в редактировании рукописи, и всем членам кафедры «Теоретических основ электротехники» Ленинградского политехнического института имени М. И. Калинина, принявшим участие в обсуждении новых вопросов.

Авторы



Великая Октябрьская социалистическая революция создала все условия для осуществления широкой электрификации нашего народного хозяйства. Об исключительном значении, которое имеет электрификация народного хозяйства для построения коммунистического общества, свидетельствует знаменитая формула Владимира Ильича Ленина: «Коммунизм — это есть Советская власть плюс электрификация всей страны».

Выполнение величественных задач, намеченных в Программе КПСС и Директивами XXIII съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1966—1970 годы, требует развития новых направлений в науке и технике, что неразрывно связано с глубокой разработкой теоретических проблем во всех областях знаний.

Инженеры, выпускаемые из высших учебных заведений, чтобы быть способными научно решать стоящие перед страной большие задачи, должны обладать широкими теоретическими знаниями и умением применять их на практике. Курс «Теоретические основы электротехники», в котором рассмотрение теоретических вопросов неразрывно связано с практическими задачами, является одним из важнейших звеньев в системе теоретической подготовки инженеров-электриков.

* * *

Первые труды в области электричества в России принадлежат гениальному русскому ученому академику М. В. Ломоносову. М. В. Ломоносов, создавший в разных областях науки много замечательных трудов, посвятил большое количество работ изучению электричества. В своих теоретических исследованиях М. В. Ломоносов выдвигал положения, которые значительно опережали его эпоху, и ставил проблемы исключительной глубины. Так, по его предложению Академия наук выдвинула в качестве конкурсной темы на премию на 1755 г. задачу «сыскать подлинную электрической силы причину и составить точную ее теорию».

Наряду с этим М. В. Ломоносов всегда стремился найти практическое приложение научным открытиям. В своих работах он указал возможность защиты человека и зданий от поражения молнией путем создания молниеотводов. В этом отношении замечательны слова М. В. Ломоносова в его добавлениях к курсу физики, где он высказал мысль, что среди опытов по электричеству есть опыты «великую надежду к благополучию человеческому показующие».

М. В. Ломоносов развивал и отстаивал в своих трудах учение о познаваемости и о материальности мира, в частности, о материальности электричества. Материалистический подход к решению основных научных проблем, характерный для трудов М. В. Ломоносова в различных областях науки, стал в последующем лучшей традицией передовых русских ученых и изобретателей.

Современником М. В. Ломоносова был русский академик Ф. Эпинус. Ему принадлежит приоритет открытия термоэлектрических явлений и явления электростатической индукции. Особо следует отметить доклад Ф. Эпинуса, сделанный им в 1758 г. в Академии наук на тему: «Речь о родстве электрической силы и магнетизма».

В настоящее время нам хорошо известно, что между электрическими и магнитными явлениями существует неразрывная связь, и это положение лежит в основе всего современного учения об электромагнитных явлениях. Однако к такому убеждению научная мысль пришла лишь в итоге длительного накопления опытных фактов, и в течение долгого времени явления электрические и явления магнитные рассматривались как самостоятельные, не имеющие между собой связи. Первое обстоятельное научное сочинение о магнитных и электрических явлениях, принадлежащее Гильберту, вышло в 1600 г. В этом труде Гильберт пришел, однако, к неправильному заключению, что электрические и магнитные явления не имеют между собою связи.

Сходство между механическим взаимодействием электрически заряженных тел и механическим взаимодействием полюсов магнитов естественно привело к попытке одинаково объяснить эти явления. Возникло представление о положительной и отрицательной магнитных массах, распределенных на концах магнита и являющихся причиной магнитных действий. Однако подобное предположение, как нам теперь известно, не отвечает физической природе магнитных явлений. Оно возникло исторически по аналогии с представлением о положительном и отрицательном электричестве, отвечающем физической сущности электрических явлений. Согласно современным представлениям, электрический заряд любого тела образуется совокупностью зарядов, находящихся в непрерывном движении положительно или отрицательно заряженных элементарных частиц — протонов, электронов и т. д.

Количественные соотношения, характеризующие механические взаимодействия электрически заряженных тел и механические взаимодействия магнитных масс полюсов магнита, первым опубликовал в 1785 г. Кулон. Но уже Кулон обратил внимание на существенное различие между магнитными массами и электрическими зарядами.

Различие вытекает из следующих простых опытных фактов. Нам без труда удается отделить друг от друга положительные и отрицательные электрические заряды, но никогда и ни в каких условиях не удается произвести опыт, в результате которого оказались бы отделенными друг от друга положительная и отрицательная магнитные массы. В связи с этим Кулон высказал предположение, что отдельные малые элементы объема магнита при его намагничивании обращаются в маленькие магнетики и что лишь внутри таких элементов объема положительные магнитные массы смещаются в одном направлении, а отрицательные — в противоположном направлении.

Однако, если бы положительная и отрицательная магнитные массы имели самостоятельное существование внутри элементарных магнитиков, то все же можно было бы надеяться в каком-либо опыте, в котором осуществлялось бы непосредственное воздействие на эти элементарные магнетики, отделить отрицательную массу от положительной подобно тому, как, воздействуя на молекулу, имеющую суммарный электрический заряд, равный нулю, нам удается расщепить ее на отрицательно и положительно заряженные частицы, так называемые ионы. Однако и в элементарных процессах никогда не обнаруживаются раздельно существующие положительная и отрицательная магнитные массы.

Раскрытие действительной природы магнитных явлений относится к началу прошлого столетия. Этот период знаменуется рядом замечательных открытий, установивших теснейшую связь между явлениями электрическими и явлениями магнитными.

В 1819 г. Эрстед произвел свои опыты, в которых он обнаружил механическое воздействие электрического тока на магнитную стрелку.

В 1820 г. Ампер показал, что соленоид с током по своим действиям аналогичен магниту, и высказал мысль, что и в случае постоянного магнита действительной причиной возникновения магнитных действий являются также электрические токи, замыкающиеся по некоторым элементарным контурам внутри тела магнита. Эти идеи нашли конкретное выражение в современных представлениях, согласно которым магнитное поле постоянного магнита обусловлено элементарными электрическими токами, существующими в веществе магнита и эквивалентными магнитным моментам образующих вещество элементарных частиц. В частности,

эти элементарные токи являются результатом вращения электронов вокруг своих осей, а также вращения электронов по орбитам в атомах.

Таким образом, мы приходим к убеждению, что магнитных масс в действительности не существует.

Всеми упомянутыми исследованиями было установлено важнейшее положение, что движение электрически заряженных частиц и тел всегда сопровождается магнитными явлениями. Этим самым уже было показано, что магнитные явления не представляют собою, как полагал Гильберт, чего-либо самостоятельного, никак не связанного с явлениями электрическими.

В 1831 г. Фарадей сообщил об открытии явления электромагнитной индукции. Он обнаружил возникновение электрического тока в контуре, движущемся по отношению к магниту или по отношению к другому контуру с током. Таким образом, было показано, что и электрические явления могут возникать как следствие процессов, относящихся к области магнитных явлений.

В 1833 г. русский академик Э. Х. Ленц сформулировал впервые чрезвычайно важное положение, в котором устанавливалась общность и обратимость явлений, открытых Эрстедом и Фарадеем. В этом положении была заложена основа важного принципа обратимости электрических машин. Э. Х. Ленц установил правило определения направления индуктированного тока, выражающее фундаментальный принцип электродинамики — принцип электромагнитной инерции.

В связи со всеми этими открытиями необходимо особенно отметить основную идею, которой неизменно руководствовался в своих исследованиях Фарадей и которая была развита в трудах академика В. Ф. Миткевича, — идею о физической реальности процесса, совершающегося в пространстве между электрически заряженными телами и между контурами с электрическими токами. Согласно этим представлениям взаимодействие заряженных тел, а также взаимодействие контуров с токами осуществляется через посредство окружающего их электромагнитного поля, являющегося особым видом материи.

Заслуга создания теории электромагнитного поля принадлежит Максвеллу, изложившему ее в классическом труде «Трактат об электричестве и магнетизме», вышедшем в 1873 г. Этот трактат содержит изложение в математической форме и дальнейшее углубление и расширение основных физических идей Фарадея.

Экспериментальное подтверждение и развитие максвелловой теории электромагнитного поля осуществлено Г. Герцем (1887—1889 гг.) в его замечательных опытах по получению и распространению электромагнитных волн, в работах П. Н. Лебедева (1895 г.) по генерированию и распространению электромагнитных волн

весьма короткой длины волны, в классических опытах П. Н. Лебедева (1900—1910 гг.), в которых им было экспериментально доказано давление света, в изобретении радио А. С. Поповым (1895 г.) и в осуществлении им радиосвязи, а также во всем дальнейшем развитии практической и теоретической радиотехники.

Все указанные выше открытия привели к признанию глубокой связи между явлениями электрическими и явлениями магнитными.

В общей совокупности теоретических проблем, относящихся к области электромагнитных явлений, все большее развитие получает теория электрических и магнитных цепей. В основе теории электрических цепей лежат законы, установленные Омом (1827 г.), Джоулем (1839 г.), Ленцем (1844 г.) и Кирхгофом (1845 г.). В последующую разработку этой теории большой вклад внесли многие отечественные и зарубежные ученые.

В настоящее время, в связи с чрезвычайным усложнением электроэнергетических систем, радиотехнической и электроизмерительной аппаратуры, систем автоматического контроля и управления, быстродействующих электронных вычислительных машин, возникает необходимость создания обобщенных методов анализа, при которых целые комплексы элементов электрической цепи, являющиеся частями этих сложных систем и выполняющие определенные функции, рассматриваются с помощью их обобщенных параметров. Такими комплексами элементов цепи являются, например, генерирующие, передающие или преобразующие электромагнитную энергию устройства в электроэнергетических системах, генераторы, усилители и преобразователи сигналов в системах радио- и телепередачи проводной связи, электрических измерений и автоматического контроля, дифференцирующие, интегрирующие и выполняющие логические операции блоки в электронных вычислительных машинах и т. п.

Эти отдельные комплексы включают в себя линейные элементы цепи, параметры которых не зависят от тока, например, сопротивления, индуктивные катушки, конденсаторы, а также нелинейные элементы цепи с параметрами, зависящими от тока или напряжения, например, электронные лампы, транзисторы, индуктивные катушки с ферромагнитными сердечниками. Эти элементы цепи различным образом соединены между собой и образуют уже внутри таких комплексов достаточно сложные электрические цепи. Сами же комплексы в свою очередь тем или иным способом соединяются между собой, образуя сложные системы.

Обобщенные методы анализа сложных систем дают возможность исследовать взаимодействие этих отдельных комплексов, являющихся частями системы. Исходными для построения таких обобщенных методов являются те же основные физические законы электрических цепей — законы Ома и Кирхгофа, — которые

используются и для расчета сравнительно несложных электрических цепей.

Точно так же получает дальнейшее развитие теория электромагнитного поля в связи с развитием наземной и космической радиосвязи и радиоастрономии, а также со все более широким использованием электрических и магнитных полей и электромагнитных излучений в новых электротехнологических и электрофизических установках.

Все изложенное предъявляло всегда и особенно предъявляет теперь требования к организации на высоком научном уровне высшего электротехнического образования. В этом отношении исторически имело большое значение создание первых научных дисциплин для высшей школы, в которых излагались теоретические проблемы электротехники. В 1904 г. профессор В. Ф. Миткевич начал читать в Петербургском политехническом институте созданный им курс «Теория явлений электрических и магнитных», а затем курс «Теория переменных токов». В 1905 г. профессор К. А. Круг начал чтение в Московском высшем техническом училище своего курса «Теория переменных токов», а затем курса «Основы электротехники».

В последующем эти теоретические дисциплины развивались в соответствии с новыми физическими идеями, новыми теоретическими и экспериментальными методами исследования электромагнитных явлений и исключительно быстрым развитием технических применений этих явлений и образовали дисциплину, имеющую ныне наименование «Теоретические основы электротехники».

* * *

Курс «Теоретические основы электротехники» в соответствии с программой, утвержденной МВ и ССО СССР, содержит четыре части. Первая сравнительно короткая часть, именуемая «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей», содержит обобщение понятий и законов из области электромагнитных явлений на основе сведений, полученных в курсе физики, и развитие формулировок и определений основных понятий и законов теории электрических и магнитных цепей, относящихся ко всем разделам этой теории. Эта часть должна рассматриваться как связующая курс физики с курсом теоретических основ электротехники и обеспечивающая физическое представление о процессах, происходящих в электрических и магнитных цепях и в электромагнитных полях. Она имеет большое значение для правильной математической формулировки задач, решаемых методами, излагаемыми в последующих частях курса.

Вторая, наибольшая по объему часть курса именуется «Теория линейных электрических цепей». В ней излагаются свойства линейных электрических цепей и методы расчета процессов в таких цепях. В основном в этой части рассмотрены методы анализа цепей, т. е. определение процессов в заданных цепях, но также уделяется внимание и синтезу цепей, т. е. вопросу о построении электрических цепей с наперед заданными свойствами. Линейными называют цепи, параметры всех элементов которых не зависят от тока и напряжения. По отношению к ним применим важный принцип, называемый принципом наложения. По принципу наложения следствия, вызываемые в некоторой физической обстановке совместным действием нескольких однородных причин, являются суммой следствий, вызываемых в той же физической обстановке каждой из этих причин в отдельности. Использование этого принципа дает возможность распространить результаты, полученные для простых случаев, на случаи более сложные. Обратное, применение этого принципа позволяет расчленить сложную задачу на несколько более простых. Мы будем широко пользоваться принципом наложения при изучении линейных электрических цепей, а также при изучении электромагнитных полей в линейных средах, параметры которых не зависят от интенсивности процесса.

Третья часть имеет наименование «Теория нелинейных электрических и магнитных цепей». В ней излагаются свойства нелинейных электрических и магнитных цепей и методы расчета происходящих в них процессов. Параметры таких цепей зависят от тока, напряжения или магнитного потока, и это приводит к существенному усложнению математического анализа процессов в этих цепях. Вместе с тем эти вопросы имеют большое значение в связи с широким использованием элементов цепи с нелинейными характеристиками в современных устройствах.

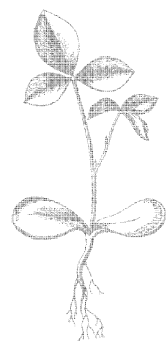
Последняя, четвертая часть имеет наименование «Теория электромагнитного поля». Многие электротехнические вопросы не могут быть полностью рассмотрены при помощи теории цепей и могут быть решены лишь методами теории электромагнитного поля. Прежде всего для расчета параметров электрических и магнитных цепей необходимо знать электрические и магнитные поля, связанные с этими цепями. Это вполне закономерно, так как параметры электрических и магнитных цепей фактически отражают в себе в интегральной форме конфигурацию электрических и магнитных полей, связанных с рассматриваемыми цепями, и физические свойства среды, в которой существуют эти поля. Ряд весьма важных вопросов может быть решен только методами, развиваемыми в теории поля. К таким вопросам относятся, например, вопросы об излучении электромагнитных волн антенной и о распространении их в пространстве.

Наличие основных закономерностей, сформулированных в первой части курса, дает возможность начать рассмотрение теории электромагнитного поля с общих уравнений, характеризующих это поле в целом, и показать, что случаи, в которых выявляется только электрическое или только магнитное поле, представляют собой частные случаи, когда условия наблюдения таковы, что в некоторой ограниченной области пространства обнаруживается только одна сторона электромагнитного процесса. Этим ярко выделяется мысль о единстве электрических и магнитных явлений.



ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ
ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
И ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ**



Scan AAW



ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЙ И ЗАКОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1-1. Общая физическая основа задач теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей

По мере развития теоретических методов в области анализа электромагнитных явлений и расчета электромагнитных процессов в различных технических и физических устройствах все более отчетливо разделялись по своему характеру теории электромагнитного поля и методы теории электрических и магнитных цепей. Однако физическая основа и тех и других одна и та же, поскольку и те и другие описывают электромагнитные явления. Теория электрических цепей получила в последние годы исключительно большое развитие. Вместе с тем, как мы увидим, в самой своей основе она содержит ряд допущений и предположений, которые можно ясно почувствовать и оценить, только располагая отчетливыми знаниями основных физических законов электромагнитных явлений и их широких обобщений. Первые две главы первой части курса и предназначены служить таким физическим фундаментом для последующих частей, в которых будут излагаться математические методы расчета электрических и магнитных цепей и электромагнитных полей. Наличие такого фундамента обеспечит критическое отношение к исходным положениям формальных математических методов и исключит возможные ошибки при формулировании этих исходных положений. Это обеспечит также рассмотрение физической стороны процессов в электрических цепях и электромагнитных полях, описываемых формальными методами. В конце первой части, в ее третьей главе, мы сможем при таком подходе ввести основные понятия теории электрических и магнитных цепей, основываясь на физических представлениях об электромагнитных явлениях и, следовательно, давая себе ясный отчет в принимаемых при этом допущениях.

1-2. Элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, и электромагнитное поле как особые виды материи

Современное учение об электромагнитных явлениях сложилось в итоге длительного изучения этих явлений и постепенного накопления опыта при их практических применениях. В настоящее время мы располагаем обширными знаниями об электрических и магнитных явлениях и большим опытом использования их в самых разнообразных областях производственной деятельности.

Элементарные частицы материи, обладающие *электрическими зарядами* (например, электрон — отрицательным зарядом, протон — положительным), являются важнейшими структурными элементами атомов вещества и поэтому, естественно, с электромагнитными явлениями связаны самые различные явления природы.

Элементарные заряженные частицы входят в состав атомов и молекул вещества, но они могут быть и в свободном состоянии. Они находятся в непрерывном движении и окружены, как мы говорим, *электромагнитным полем*. Обладающие электрическим зарядом частицы и их электромагнитное поле представляют собой особый вид материи — особый в том смысле, что ему присущи особые электромагнитные свойства, не учитываемые при рассмотрении других, например механической, форм движения материи.

Электрический заряд этих частиц является их важнейшим физическим свойством, характеризующим их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем. Электрический заряд является основным отличительным свойством этих частиц материи, обладающих также и другими свойствами — массой, энергией, импульсом и т. д., присущими и другим формам движения материи, изучаемым, например, в механике.

Понятие электричество нередко относят ко всей совокупности электромагнитных явлений. Именно такой широкий смысл вкладывают в это понятие, говоря о науке об электричестве. Вместе с тем оно используется в более узком смысле в термине «количество электричества», как синоним термина «электрический заряд».

По сути дела, обладающие зарядом элементарные частицы и их электромагнитное поле представляют собой единое целое. Строго говоря, мы не можем указать точной границы между частицей с электрическим зарядом и ее электромагнитным полем. Вместе с тем все же можно полагать, что частица и ее электрический заряд, например заряд электрона, протона и т. д., сосредоточены в весьма малой области пространства. Именно для этой весьма малой области про-

странства характерна та форма движения материи, с которой связывается понятие об электрически заряженной частице. Вне этой области на первый план выступает то физическое явление, та форма движения материи, с которыми мы связываем понятие об электромагнитном поле. Это обстоятельство дает возможность ввести представление о том, что электрический заряд элементарной частицы, как и сама частица, занимает только некоторую ограниченную область пространства. В пространстве, окружающем эту область, согласно такому представлению, существует связанное с обладающей зарядом частицей электромагнитное поле, а объемная плотность электрического заряда точно равна нулю.

При такой широко используемой научной абстракции возникает необходимость дать наименование той области пространства, в которой существует электромагнитное поле, но в которой отсутствуют известные нам частицы материи. В дальнейшем для обозначения такой области пространства условимся применять термин *п у с т о т а*. Этот термин мы будем относить только к понятию о пространстве как форме существования материи в виде поля, но не к происходящим в этом пространстве физическим процессам, помня при этом, что пространство неотделимо от происходящих в нем материальных процессов, что абсолютно пустого пространства, не заполненного физической материей, нет и не может быть, и что в той области пространства, которую мы будем называть пустотой, всегда существует электромагнитное поле, а также поле тяготения, представляющие собой особые виды материи.

Нередко, стремясь избежать слова «пустота», используют в аналогичном смысле термин *в а к у у м*. Однако слово «вакуум» находит широкое применение в вакуумной технике, понимаемое в ином смысле, а именно, как степень разрежения. Говорят о плохом, хорошем или высоком вакууме, о вакуумметрах — приборах для измерения вакуума. Термин «пустота» в этом отношении является более определенным — он означает предельное значение вакуума при указанной выше абстракции, когда предполагается, что в некоторой области пространства материя существует только в форме поля.

Существенно отметить, что если обладающую зарядом элементарную частицу вещества нельзя мыслить без ее электромагнитного поля, то электромагнитное поле может существовать в свободном состоянии, отделенное от частицы. Таковым является фотон, а также электромагнитное поле, излученное антенной. Электромагнитное поле в свободном состоянии, не связанное с частицами вещества, распространяется в пустоте в отсутствие весьма сильных гравитационных полей с естественной для него скоростью $c = 2,998 \times 10^8$ м/сек $\approx 3 \cdot 10^8$ м/сек.

В веществе, а также при наличии весьма сильных гравитационных полей, т. е. вблизи весьма больших масс вещества,

скорость распространения электромагнитного поля меньше величины c .

Движение материи, с которым мы связываем понятие об электрически заряженной частице, а также понятие об электромагнитном поле, не может быть сведено к механическому движению. В связи с этим приведем замечательные слова В. И. Ленина: «Как ни диковинно с точки зрения «здорового смысла» превращение невесомого эфира в весомую материю и обратно, как ни «странно» отсутствие у электрона всякой иной массы, кроме электромагнитной, как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее подтверждение диалектического материализма» (В. И. Ленин, изд. IV, т. 14, стр. 248).

В этой фразе, которую В. И. Ленин приводит в развитие основных положений диалектического материализма, отчетливо сформулирована мысль, что электромагнитные явления не могут быть сведены к явлениям, изучение которых составляет предмет механики. В механике рассматривается движение в пространстве материальных тел, обладающих инертной массой. То, что эти тела могут обладать электрическими зарядами, а также то, что сами тела состоят из положительно и отрицательно заряженных элементарных частиц, совершенно не входит в круг вопросов, рассматриваемых в механике. Поэтому и естественно, что из законов механики не могут быть выведены более глубокие законы электромагнитных явлений.

Для характеристики электромагнитных явлений необходимо ввести новые понятия, которые не рассматриваются механикой и которые принципиально не могут быть полностью определены только через величины, достаточные для построения механики, например, только через массу, длину и время. Необходимо ввести четвертую основную величину, отражающую специфику электромагнитных явлений. Таковой может быть выбрана любая электромагнитная величина, например, электрический заряд. Количество электрический заряд частицы материи или тела может быть определен только по их взаимодействию с другой электрически заряженной частицей или другим заряженным телом или же по их взаимодействию с внешним электромагнитным полем.

Точно так же не представляется возможным при определении понятия об электромагнитном поле обойтись без использования понятия о заряженной частице, так как основным отличительным от других видов материи свойством электромагнитного поля является его силовое воздействие на заряженные частицы.

Все это является результатом отмеченной выше тесной связи заряженной частицы с ее электромагнитным полем.

В соответствии со всем сказанным выше можно дать следующие определения:

Электромагнитное поле есть особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны, поле заряженных частиц) и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся в свободном состоянии способностью распространения в пустоте (при отсутствии сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/сек, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости.

Электрический заряд есть свойство частиц материи (вещества) или тел, характеризующее их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем; имеет два вида, известные как положительный заряд (заряд протона, позитрона и др.) и отрицательный заряд (заряд электрона и др.); количественно определяется по силовому взаимодействию тел, обладающих электрическими зарядами.

Для измерения электромагнитных величин мы будем пользоваться абсолютной международной системой единиц СИ (Система Интернациональная), рекомендованной Международной Электротехнической Комиссией и вошедшей в Государственный Стандарт СССР (ГОСТ 9867-61). Эта система содержит шесть основных единиц: метр — единица длины, килограмм — единица массы, секунда — единица времени, ампер — единица силы тока, градус Кельвина — единица температуры и свеча — единица силы света. Она охватывает единицы механических, электромагнитных, тепловых и световых величин.

Для измерения электромагнитных величин необходимо и достаточно иметь четыре основные единицы соответственно тому, что было сказано выше о необходимости принятия четырех основных величин в области учения об электромагнитных явлениях. Остальные электромагнитные величины и, соответственно, их единицы являются производными от выбранных четырех основных, т. е. могут быть установлены с помощью тех или иных закономерностей. В системе единиц СИ в качестве четвертой основной единицы для электромагнитных величин принят ампер — единица силы тока. Это сделано потому, что именно единица силы тока может быть в настоящее время определена абсолютным методом с наибольшей точностью на основе измерения механического взаимодействия электрических токов в пустоте с помощью токовых весов.

Система единиц МКСА (метр, килограмм, секунда, ампер) является частью системы СИ. Система МКСА связывается с рационализованной системой уравнений электромагнитного поля, в которой множитель 4π расположен в уравнениях в наиболее естественном месте, а именно, он явно входит в те зависимости, которые

соответствуют случаям, характеризующимся сферической симметрией. Весьма существенно также, что при рационализованной форме уравнений электромагнитного поля достигается симметрия зависимостей, относящихся к электрическим и магнитным величинам.

Единицей электрического заряда (количества электричества) в системе единиц МКСА является *кулон* (1 к).

1-3. Связь между электрическими и магнитными явлениями.

Электрическое и магнитное поля как две стороны единого электромагнитного поля

Любое электромагнитное явление, рассматриваемое в целом, характеризуется двумя сторонами — электрической и магнитной, между которыми существует тесная связь. Так, электромагнитное поле имеет две взаимосвязанные стороны — э л е к т р и ч е с к о е поле и м а г н и т н о е поле. Важнейшей нашей задачей в первой главе будет рассмотрение связи между электрическими и магнитными явлениями. Вместе с тем можно создать условия, когда в некоторой области пространства обнаруживаются только электрические или только магнитные явления. Таковым является, например, случай заряженных неподвижных проводящих тел, вне которых обнаруживается только электрическое поле. Аналогично в пространстве, окружающем неподвижные постоянные магниты, обнаруживается только магнитное поле. Однако и в этих случаях, если рассматривать явление в целом, нетрудно усмотреть как электрическую, так и магнитную его стороны. Так, в случае неподвижных заряженных тел их заряды образуются совокупностью зарядов элементарных заряженных частиц, движущихся хаотически около поверхностей тел. Каждая такая частица окружена электромагнитным полем, но вследствие хаотического движения частиц их результирующее магнитное поле практически исчезает уже на ничтожных расстояниях от поверхностей тел. Электрические же поля частиц при избытке на теле частиц с зарядами того или иного знака суммируются и обнаруживаются в окружающем тела пространстве. В случае неподвижных постоянных магнитов, наоборот, в окружающем магниты пространстве взаимно компенсируются электрические поля элементарных частиц, образующих вещество магнитов, вследствие равенства суммарных зарядов положительно и отрицательно заряженных частиц. Магнитные поля вследствие согласованного движения частиц, возникшего при намагничивании магнитов, суммируются в пространстве, окружающем магниты. Таким образом, и в этих особых случаях, когда в некоторой области

пространства обнаруживаются только электрическое поле или только магнитное поле, явление в целом оказывается электромагнитным. Но особенно важно в этом смысле, и это будет особо рассмотрено дальше, что в переменном электромагнитном поле само электрическое поле возникает вследствие изменения во времени магнитного поля и в свою очередь возникновение магнитного поля является результатом изменения во времени электрического поля.

Электрическое поле создается электрическими зарядами, а также изменяющимся магнитным полем. Магнитное поле создается движущимися заряженными частицами, а также изменяющимся электрическим полем.

Для обнаружения электрического и магнитного полей, являющихся двумя сторонами единого электромагнитного поля, можно воспользоваться тем или иным их проявлением.

Электрическое поле принято определять по механическим силам, которые испытывают *неподвижные* заряженные тела, вносимые в это поле.

В соответствии с этим, *электрическим полем мы называем одну из сторон электромагнитного поля, обусловленную электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывающую силовое воздействие на заряженные частицы и тела и выявляемую по силовому воздействию на неподвижные заряженные тела и частицы.*

Для выявления электрического поля необходимо взять *неподвижное заряженное тело*, так как на движущееся заряженное тело действует не только электрическое, но также и магнитное поле.

Простейшим случаем электрического поля является только что упомянутое поле неподвижных электрически заряженных тел. Такое поле мы называем *электростатическим*. Величины, его характеризующие, не зависят от времени. Раздел науки, в котором изучают электростатические поля и их проявления, называют *электростатикой*.

Для обследования электрического поля во всех его точках необходимо взять пробное *точечное заряженное тело*, имеющее столь малые линейные размеры, что в пределах его обследуемое поле можно рассматривать как однородное. Кроме того, размеры пробного тела, а также его заряд q_0 должны быть достаточно малы, чтобы внесение его в исследуемое поле не вызывало сколько-нибудь заметного перераспределения на других телах зарядов, определяющих это поле.

Обследуя при помощи пробного точечного заряженного тела некоторое электрическое поле мы обнаруживаем, что в каждой точке этого поля и в каждый момент времени пробное тело испытывает вполне определенную по величине и направлению механическую силу. В случае электростатического поля эта сила не зависит от времени.

Пользуясь этим, мы и определим основную физическую величину, характеризующую электрическое поле в каждой его точке и называемую напряженностью электрического поля.

Напряженность электрического поля равна отношению механической силы f , действующей на неподвижное положительно заряженное пробное тело, помещенное в данную точку поля, к величине заряда q_0 этого тела. Напряженность электрического поля изображают вектором E , по направлению совпадающим с вектором f механической силы, действующей на положительно заряженное пробное тело. Имеем:

$$E = \frac{f}{q_0}.$$

Полное отсутствие влияния заряда q_0 на распределение зарядов, определяющих исследуемое поле, будет иметь место, если величина q_0 будет стремиться к нулю. Соответственно, можно дать следующее точное определение:

Напряженность электрического поля есть векторная величина, равная пределу отношения силы, с которой электрическое поле действует на неподвижное точечное заряженное тело, внесенное в рассматриваемую точку поля, к заряду этого тела, когда этот заряд

стремится к нулю, и направление которой принимается совпадающим с направлением силы, действующей на положительно заряженное точечное тело:

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{f}{q_0}.$$

Определив напряженность поля во всех его точках, можно провести ряд линий так, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению с вектором напряженности поля (рис. 1-1). Эти линии называют линиями напряженности электрического поля. На чертеже их снабжают стрелками, указывающими направление вектора E . Совокупность таких линий образует картину электрического поля.

Вообразим замкнутый контур, ограничивающий некоторую поверхность, и проведем через все точки этого контура линии напряженности поля. Совокупность этих линий образует трубчатую поверхность. Область электрического поля, ограниченную такой трубчатой поверхностью, называют трубкой напряженности поля.

На рис. 1-1 изображена картина электростатического поля около двух заряженных тел, с равными и противоположными по знаку

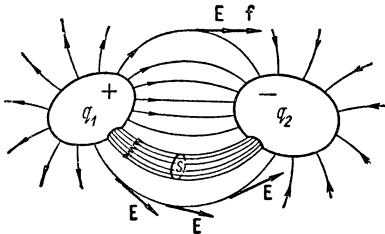


Рис. 1-1.

зарядами. На рисунке изображен также ряд линий напряженности электрического поля, проходящих через точки контура, ограничивающих поверхность s и образующих трубку напряженности поля.

В соответствии с вышеизложенным любое неподвижное точечное тело с зарядом q испытывает в электромагнитном поле силу

$$\mathbf{f}_1 = q\mathbf{E}.$$

Эта сила, согласно данному выше определению, возникает под действием *электрического поля*.

Если скорость \mathbf{v} движения в электромагнитном поле заряженного точечного тела или заряженной частицы отлична от нуля, то, как показывает опыт, на них действует дополнительная сила \mathbf{f}_2 ,

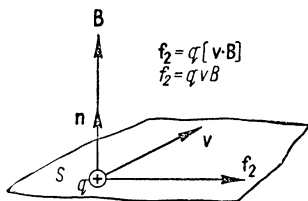


Рис. 1-2.

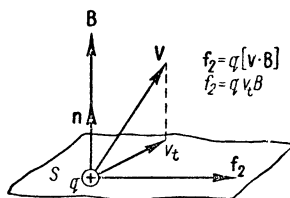


Рис. 1-3.

возникновение которой мы приписываем наличию *магнитного поля*. Сила \mathbf{f}_2 перпендикулярна вектору скорости \mathbf{v} и пропорциональна величине скорости v . Магнитное поле действует только на движущиеся заряженные частицы и тела.

В соответствии с этим *магнитным полем* мы называем одну из *двух сторон электромагнитного поля, обусловленную движущимися заряженными частицами и изменением электрического поля, оказывающую силовое воздействие на движущиеся заряженные частицы и выявляемую по силовому воздействию, направленному нормально к направлению движения этих частиц и пропорциональному их скорости*.

Величина дополнительной силы \mathbf{f}_2 пропорциональна заряду q движущихся частиц, и ее направление зависит от направления вектора \mathbf{v} их скорости. В каждой точке магнитного поля в каждый момент времени есть определенное направление (обозначим его единичным вектором \mathbf{n}), характеризующееся тем, что сила \mathbf{f}_2 оказывается наибольшей, когда вектор скорости \mathbf{v} перпендикулярен к вектору \mathbf{n} (рис. 1-2), т. е. лежит в плоскости s , перпендикулярной к \mathbf{n} . При любом другом направлении вектора скорости \mathbf{v} сила \mathbf{f}_2 будет меньше — она пропорциональна проекции v_t (рис. 1-3) вектора \mathbf{v} на эту плоскость. Вектор силы \mathbf{f}_2 перпендикулярен к указанному направлению, т. е. перпендикулярен вектору \mathbf{n} , а также, как уже было отмечено, перпендикулярен к вектору скорости \mathbf{v} .

Пользуясь всем этим, мы и определим *основную физическую величину*, характеризующую магнитное поле в каждой его точке и называемую *магнитной индукцией*. Она изображается вектором \mathbf{B} , имеющим направление, совпадающее с направлением \mathbf{n} (рис. 1-2 и 1-3). Сила f_2 пропорциональна величине магнитной индукции. Имеет место равенство:

$$f_2 = q [\mathbf{v} \mathbf{B}],$$

где $[\mathbf{v} \mathbf{B}]$ — векторное произведение векторов \mathbf{v} и \mathbf{B} .

Последнее выражение и может служить определением величины и направления вектора \mathbf{B} . Сила f_2 перпендикулярна к \mathbf{v} и \mathbf{B} . Если еще выбрать такое направление скорости \mathbf{v} , чтобы было $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ (рис. 1-2), то величина силы f_2 (как уже было сказано), будет наибольшая. При этом все три вектора f_2 , \mathbf{v} и \mathbf{B} будут взаимно перпендикулярны и взаимно ориентированы, как показано на рис. 1-2. Это определяет направление вектора \mathbf{B} . Зная в этих условиях величины v и f_2 , величину магнитной индукции B находим из выражения:

$$B = \frac{f_2}{qv}.$$

Принято магнитную индукцию определять по воздействию на отрезок проводника длиной l с электрическим током i . Соответствующее выражение легко может быть получено из только что написанного. Пусть \mathbf{l} — вектор, имеющий длину, равную длине отрезка проводника, и направленный по оси проводника в направлении тока i . Пусть q — заряд в объеме отрезка проводника, движущийся упорядоченно вдоль оси проводника со скоростью \mathbf{v} и образующий при своем движении ток i . Если заряд q проходит путь l за время t , то $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{l}}{t}$. Так как при этом сквозь сечение проводника за время t проходит заряд q , то $i = \frac{q}{t}$.

Имеем:

$$qv = q \frac{\mathbf{l}}{t} = \frac{q}{t} \mathbf{l} = i \mathbf{l}$$

и, следовательно,

$$f_2 = q [\mathbf{v} \mathbf{B}] = i [\mathbf{l} \mathbf{B}].$$

Если $\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$, то сила при данных i , l и B имеет наибольшее значение, равное

$$f_2 = ilB.$$

В этом случае имеем:

$$B = \frac{f_2}{il},$$

и направление вектора \mathbf{B} определяется согласно рис. 1-4.

В случае неоднородного поля необходимо взять отношение силы Δf_2 к отрезку проводника Δl , когда последний стремится к нулю:

$$B = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta f_2}{i \Delta l}.$$

Таким образом, можно дать следующее определение:

Магнитная индукция есть векторная величина, характеризующая силовое действие магнитного поля на ток и соответственно на движущиеся заряженные частицы, равная пределу отношения механической силы, действующей на элемент проводника с электрическим током, к произведению тока и длины элемента проводника, когда длина этого элемента стремится к нулю и если элемент проводника расположен так, что этот предел имеет наибольшее значение; имеет направление, перпендикулярное в этом случае к направлению элемента проводника и к направлению механической силы и совпадающее с поступательным перемещением правого винта при вращении его от направления механической силы к направлению тока.

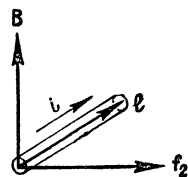


Рис. 1-4.

Использование элемента проводника с током для определения вектора магнитной индукции имеет то преимущество по сравнению с использованием движущейся заряженной частицы, что суммарный заряд элемента проводника может быть равен нулю, так как заряд движущихся в нем частиц равен и противоположен по знаку заряду неподвижной решетки, образующей тело проводника. При этом сила f_1 со стороны электрического поля равна нулю и вся сила, действующая на такой проводник в электромагнитном поле, определяется только магнитным полем.

В случае же частицы с зарядом q , движущейся в электромагнитном поле со скоростью v , результирующая сила имеет обе составляющие, определяемые одна электрическим, а другая магнитным полем:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Эту силу часто именуют силой Лоренца.

Действие сил f_1 и f_2 существенно различно. Сила f_1 со стороны электрического поля может изменять как направление скорости заряженной частицы, так и величину этой скорости, т. е. изменять кинетическую энергию частицы. Сила же f_2 со стороны магнитного поля, направленная всегда перпендикулярно вектору скорости частицы, изменяет только направление движения частицы, но не изменяет величину скорости и, соответственно, ее кинетической энергии.

Эти обстоятельства широко используются для ускорения заряженных частиц и управления их движениями и в электронных осциллографах, электронных микроскопах и ускорителях заряженных частиц.

Выражение для результирующей силы \mathbf{f} позволяет сделать весьма существенный, имеющий принципиальное значение вывод, что деление единого электромагнитного процесса на две его составляющие — электрическую и магнитную — относительно.

Действительно, говорить о скорости \mathbf{v} частицы можно только по отношению к некоторой системе координат, т. е. к некоторой системе отсчета. Если наблюдатель неподвижен в этой системе координат, то \mathbf{v} есть скорость частицы по отношению к наблюдателю. Если такой наблюдатель обнаруживает обе составляющие \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 силы \mathbf{f} , то, согласно данным выше определениям, он утверждает, что существует как электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} , так и магнитное поле с магнитной индукцией \mathbf{B} .

Представим теперь другую систему отсчета, движущуюся относительно первой со скоростью \mathbf{v} . Наблюдатель, неподвижный в этой новой системе координат, будет воспринимать в тот же момент времени частицу с зарядом q , как неподвижную, и, следовательно, всю силу \mathbf{f} будет относить за счет действия электрического поля с напряженностью \mathbf{E}' :

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}'.$$

Следовательно:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Таким образом, напряженность электрического поля в одной и той же точке и в один и тот же момент времени для разных движущихся друг относительно друга наблюдателей оказывается различной. То же положение, как нетрудно показать, относится и к магнитной индукции.

Все это еще раз подчеркивает главную мысль, что всегда мы имеем дело с единым, объективно существующим электромагнитным явлением, не зависящим от условий наблюдения. Деление же его на электрическую и магнитную составляющие относительно. Эти две составляющие находятся друг с другом в тесной взаимосвязи.

Отметим здесь, что, рассматривая то или иное электромагнитное явление, мы будем относить его к некоторой определенной системе отсчета, хотя и не будем это специально оговаривать.

В заключение приведенных выше основных положений обратим еще раз внимание на важное обстоятельство, что в определениях первых понятий электромагнитного поля и электрического заряда принципиально нельзя было обойти зависимость одного от другого. Точно такое же положение имеет место и в отношении полных опре-

делений электрического и магнитного полей, поскольку эти поля являются двумя сторонами единого электромагнитного поля.

Определения всех последующих понятий должны содержать в себе только понятия, уже ранее определенные на основе использования тех или иных количественных закономерностей.

1-4. Связь заряда частиц и тел с их электрическим полем. Теорема Гаусса

При исследовании электрического поля в веществе необходимо учитывать электрические свойства вещества. Вещества по их электрическим свойствам могут быть разделены на три основных класса — проводящие вещества, диэлектрики (изолирующие вещества) и полупроводящие вещества (полупроводники).

Пр о в о д я щ и м и в е щ е с т в а м и являются такие, в которых существуют в значительном количестве обладающие электрическим зарядом так называемые свободные элементарные частицы (электроны или положительные и отрицательные ионы), приходящие в упорядоченное движение под действием электрического поля и образующие тем самым в веществе упорядоченный электрический ток. Основным свойством проводящих веществ является э л е к т р о п р о в о д н о с т ь, т. е. свойство проводить электрический ток под действием постоянного электрического поля.

Д и э л е к т р и к а м и называются вещества, в которых свободные частицы, обладающие зарядом, имеются в практически ничтожном количестве и на первый план выступает явление поляризации.

П о л у п р о в о д я щ и е в е щ е с т в а занимают по значению своей электропроводности промежуточное положение между проводящими веществами и диэлектриками и отличаются рядом присущих им характерных свойств, связанных с существованием в них не только электропроводности, обусловленной электронами проводимости, но также и электропроводности, обусловленной перемещением под действием электрического поля так называемых «дырок», т. е. незанятых валентными электронами мест в атомах, что эквивалентно перемещению положительно заряженных частиц с зарядом, равным по абсолютной величине заряду электрона. Именно наличие полупроводников с различными типами электропроводности — электронной или *n*-типа (negative) и дырочной или *p*-типа (positive) — открывает возможности создания большой группы полупроводниковых приборов, обладающих весьма важными характеристиками.

При рассмотрении макроскопических процессов в различных электротехнических устройствах мы будем осреднять во времени и в пространстве микроскопические неоднородности, являющиеся

результатом того, что изучаемые нами процессы в действительности представляют собою совокупность огромного числа процессов элементарных. Соответственно мы будем характеризовать вещество осредненными параметрами и при этом часто будем называть вещество средой. Заметим, что однородной называют среду, которая во всех элементах объема обладает одинаковыми физическими свойствами. И з о т р о п н о й называют среду, обладающую в каждом элементе объема одинаковыми свойствами во всех направлениях.

Предположим, что неподвижное заряженное тело с зарядом q расположено в однородном и изотропном диэлектрике. При этом изолирующую среду (диэлектрик) будем считать идеальной, т. е. не обладающей электропроводностью. В этом случае связь между зарядом q тела и его электрическим полем устанавливается теоремой Гаусса.

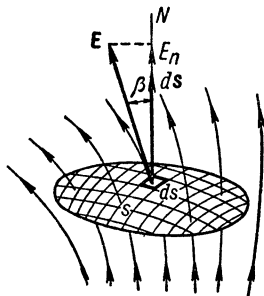


Рис. 1-5.

Введем понятие о потоке вектора сквозь некоторую поверхность, в данном случае о потоке вектора напряженности электрического поля.

Представим в электрическом поле поверхность s , ограниченную некоторым контуром (рис. 1-5). Обозначим через β угол между вектором E и условно выбранной положительной нормалью N к поверхности в некоторой ее точке. Составляющая вектора E , нормальная к элементу поверхности ds , равна $E_n = E \cos \beta$. Интеграл от произведений элементов поверхности на составляющие вектора, нормальные к этим элементам, распространенный по всей поверхности s , носит название потока вектора сквозь эту поверхность. Поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность s , который мы обозначим через Ψ_E , равен:

$$\Psi_E = \int_s E \cos \beta ds.$$

Обозначив через ds вектор, длина которого численно равна поверхности элемента ds , а направление совпадает с направлением положительной нормали к этому же элементу, напишем выражение потока сокращенно в векторной форме:

$$\Psi_E = \int_s E ds,$$

где $E ds = E \cos \beta ds$ есть скалярное произведение векторов E и ds . Поток вектора есть величина скалярная.

Рассмотрим замкнутую поверхность, ограничивающую часть пространства, в которой находится рассматриваемое нами тело с зарядом q . Замкнутая кривая, изображенная на рис. 1-6 пунктиром, представляет след этой поверхности в плоскости рисунка.

Теорема Гаусса устанавливает связь между потоком вектора \mathbf{E} сквозь эту замкнутую поверхность с зарядом q , а именно, эта связь имеет вид:

$$\oint_S \mathbf{E} \, ds = \frac{q}{\epsilon}.$$

Величина ϵ является основной характеристикой диэлектрика, окружающего заряженное тело, и носит наименование абсолютной диэлектрической проницаемости.

Таким образом, теорема Гаусса гласит: *поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в однородном и изотропном диэлектрике равен отношению электрического заряда, заключенного внутри этой поверхности, к абсолютной диэлектрической проницаемости диэлектрика.*

Если тело с зарядом q расположено в пустоте, то в выражение теоремы Гаусса вместо ϵ войдет так называемая электрическая постоянная ϵ_0 .

Величина ϵ_0 зависит от выбора системы единиц измерения и в системе МКСА имеет значение:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} v_0^2} \frac{\text{фарад}}{\text{метр}},$$

где $v_0 = 2,998 \cdot 10^8 \approx 3 \cdot 10^8$ — числовое значение скорости света в пустоте, выраженной в метрах в секунду. Следовательно:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м.}$$

Диэлектрической проницаемостью вещества или относительной диэлектрической проницаемостью вещества называют величину $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, равную отношению абсолютной диэлектрической проницаемости вещества ϵ к электрической постоянной ϵ_0 .

Теорема Гаусса вытекает из опытного закона Кулона:

$$\mathbf{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

определяющего силу \mathbf{f} взаимодействия двух точечных тел с зарядами q_1 и q_2 , расположенных в однородной и изотропной среде с абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ на расстоянии r

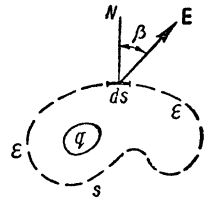


Рис. 1-6.

друг от друга. Из закона Кулона следует выражение для напряженности электрического поля точечного заряженного тела (рис. 1-7):

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{4\pi r^2} \frac{r}{r}.$$

Используя это выражение, нетрудно доказать теорему Гаусса. То существенное обстоятельство, что результат получается не зависящим от места расположения точечного заряженного тела внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью s , позволяет обобщить теорему Гаусса на случай любого числа точечных заряженных тел, а следовательно, и на случай любого числа заряженных тел любой формы. При этом q есть суммарный заряд всех тел, заключенных внутри объема, ограниченного поверхностью s .

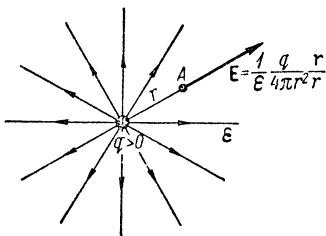


Рис. 1-7.

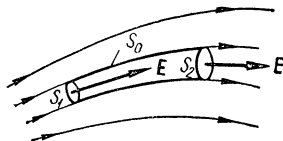


Рис. 1-8.

Применяя теорему Гаусса к поверхности, ограничивающей отрезок трубки напряженности поля (рис. 1-8), имеем:

$$\oint_s E ds = \int_{s_1} E ds + \int_{s_2} E ds + \int_{s_0} E ds = 0.$$

Но $\int_{s_0} E ds = 0$, так как вектор E касателен к боковой поверхности s_0 трубки. Следовательно, $\int_{s_1} E ds = - \int_{s_2} E ds$, т. е. поток сквозь

различные поперечные сечения трубки напряженности поля имеет одно и то же значение. Это дает основание ввести понятие об единичной трубке, поток сквозь поперечное сечение которой равен единице потока. Тогда поток Ψ_E сквозь некоторую поверхность можно рассматривать как число единичных трубок напряженности поля, пересекающих эту поверхность. Поток сквозь элементарную поверхность ds , нормальную к вектору E , равен $d\Psi_E = E ds = E ds$, и, следовательно, величина вектора E равна плотности потока:

$$E = \frac{d\Psi_E}{ds},$$

т. е. числу единичных трубок, проходящих через единицу поверхности, нормальной к вектору E . Таким образом, густота единичных

трубок или линий напряженности поля, совмещенных с осями этих трубок, дает представление о величине вектора E .

Из теоремы Гаусса вытекает важное следствие, что электрический заряд на заряженном проводящем теле любой формы распределяется на его поверхности или, точнее, в весьма тонком слое вблизи поверхности. Напряженность поля внутри проводника при статическом состоянии зарядов должна быть равна нулю. Действительно, при наличии электрического поля в проводящей среде свободные электрически заряженные частицы придут в движение, и, следовательно, статическое состояние установится только тогда, когда напряженность поля внутри проводника во всем его объеме станет равной нулю. Поэтому, проводя любую замкнутую поверхность

внутри проводящего тела, мы получим поток $\Psi_E = \oint_S E ds$ сквозь эту поверхность равным нулю. Таким образом, согласно теореме Гаусса, заряд внутри такой поверхности также равен нулю. Отсюда следует, что внутри тела суммарный заряд равен нулю, и заряд тела распределен только на поверхности тела.

1-5. Поляризация диэлектриков.

Электрическое смещение.

Постулат Максвелла

Теорема Гаусса устанавливает связь между зарядом q тела и окружающим его электрическим полем только для однородного и изотропного диэлектрика и для электростатического поля.

Весьма важное обобщение этой связи на случай любого диэлектрика, вообще неоднородного и неизотропного, представляется возможным осуществить введением вектора электрического смещения в диэлектрике. Столь же важной является возможность обобщения этой связи для изменяющегося во времени поля.

Будем считать, как и раньше, что диэлектрик не обладает электропроводностью. Рассмотрим кратко процессы в диэлектрике при внесении его во внешнее электрическое поле.

При внесении диэлектрика во внешнее поле элементарные заряженные частицы, входящие в состав молекул вещества, испытывают со стороны поля механические силы. Эти силы вызывают внутри молекул смещение частиц с положительными зарядами в сторону поля и частиц с отрицательными зарядами в противоположном направлении. Если напряженность поля не чрезмерно велика, то частицы с положительными и отрицательными зарядами совершенно разойтись не могут, так как они удерживаются внутриатомными, внутримолекулярными или междумолекулярными силами.

Существует ряд веществ, молекулы которых при отсутствии внешнего поля электрически нейтральны, т. е. заряды, входящие

В состав такой молекулы, в среднем не создают электрического поля во внешнем по отношению к молекуле пространстве, иными словами, центр электрического действия всех электронов в молекуле совпадает с центром действия положительных ядер.

В результате смещения под действием внешнего поля положительно и отрицательно заряженных частиц, входящих в состав молекулы, в противоположных направлениях центры электрического действия первых и вторых уже не будут совпадать, и во внешнем пространстве молекула будет восприниматься как *электрический диполь*, т. е. как система двух равных, противоположных по знаку точечных зарядов q и $-q$, смещенных друг относительно друга на некоторое расстояние d . Произведение qd называют э л е к т р и ч е с к и м м о м е н т о м д и п о л я. Электрический момент диполя рассматривают как векторную величину, направленную в сторону смещения положительного заряда, и обозначают p .

Под действием внешнего электрического поля каждая молекула обращается в диполь, и диэлектрик оказывается в *поляризованном* состоянии. Рассмотренные диполи именуют квазиупругими диполями. К диэлектрикам, молекулы которых обладают такими свойствами, относятся, например, газы: водород, кислород, азот.

Существует другой класс изолирующих веществ, молекулы которых обладают отличным от нуля электрическим моментом даже при отсутствии внешнего поля. Такие молекулы называют *полярными*. В виде примера укажем газ хлористый водород (HCl), молекулы которого состоят из положительного иона водорода и отрицательного иона хлора, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, т. е. являются диполями. Тепловое движение приводит диполи в хаотическое расположение, и электрические поля отдельных диполей взаимно нейтрализуются во внешнем пространстве. Если внести такое вещество во внешнее поле, то диполи будут стремиться расположиться своими осями вдоль линий поля. Однако этому упорядочению расположения препятствует тепловое движение. В результате произойдет лишь некоторый поворот диполей в направлении поля и диэлектрик окажется в определенной мере поляризованным. При этом к эффекту ориентации осей диполей обычно добавляется рассмотренный выше эффект деформации молекул.

Электрическим моментом некоторого объема поляризованного диэлектрика называют векторную величину, равную геометрической сумме электрических моментов всех диполей, заключенных в этом объеме.

Степень электрической поляризации диэлектрика в данной точке характеризуют векторной величиной, называемой *поляризованностью* или *интенсивностью поляризации*, и обозначают буквой P .

Поляризованность равна пределу отношения электрического момента некоторого объема диэлектрика, содержащего данную точку, к этому объему, когда последний стремится к нулю.

В диэлектриках с квазиупругими диполями при наличии электрического поля оси всех диполей имеют одинаковое направление и можно написать:

$$P = N_1 p = N_1 qd,$$

где $N_1 = dN/dV$ — число диполей (молекул), отнесенное к единице объема вещества, причем dN — число диполей в объеме dV . Опыт показывает, что в полях, с которыми мы имеем дело на практике, для всех таких веществ поляризованность пропорциональна напряженности поля, т. е. $P = \alpha E$.

Эта пропорциональность имеет место и для диэлектриков с полярными молекулами. При этом она нарушается лишь при очень сильных полях, когда почти все диполи ориентируются вдоль внешнего поля.

Коэффициент α называют абсолютной диэлектрической восприимчивостью вещества. Отношение $\alpha_r = \alpha/\epsilon_0$ называют относительной диэлектрической восприимчивостью или просто диэлектрической восприимчивостью.

Существует особая группа диэлектриков, так называемых сегнетоэлектриков, для которых величина α сильно зависит от напряженности поля и при некоторых значениях напряженности поля и температуры достигает весьма больших значений.

Поляризованность диэлектрика можно охарактеризовать еще несколько иначе, связав самое определение поляризованности с фактом смещения в диэлектрике положительно и отрицательно заряженных частиц под действием поля. Пусть изолирующее вещество помещено в однородное электрическое поле между двумя заряженными металлическими пластинами. При установлении поля частицы с положительными зарядами в диэлектрике смещаются по направлению к отрицательно заряженной пластине в среднем на расстояние x . Частицы с отрицательными зарядами при этом перемещаются по направлению к положительно заряженной пластине на расстояние $d - x$, где d — среднее расстояние, отсчитываемое по линии напряженности поля, на которое расходятся по отношению друг к другу частицы с положительными и отрицательными зарядами. Для квазиупругих диполей d есть расстояние между центрами зарядов диполя, т. е. длина оси диполя. Для полярных молекул d — среднее значение проекций осей диполей на направление напряженности поля.

Рассечем мысленно диэлектрик плоскостью, нормальной к линиям напряженности поля, и рассмотрим поверхность s , являющуюся частью этой плоскости. На рис. 1-9 след $a - b$ поверхности s отнесен жирным пунктиром. За время изменения напряженности поля от нуля до конечного значения сквозь поверхность s проходят в направлении сил поля все положительные заряды, которые до начала установления поля были заключены в объеме xs , и против сил поля — все отрицательные заряды, которые до установления поля были заключены в объеме $(d - x)s$ (рис. 1-9).

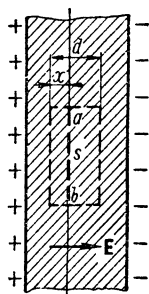


Рис. 1-9.

Если q — положительный заряд диполя и N_1 — число диполей в единице объема, то в процессе установления поля сквозь поверхность s смещается в направлении вектора \mathbf{E} положительный заряд:

$$qN_1xs$$

и в противоположном направлении — отрицательный заряд

$$-qN_1(d-x)s.$$

Так как смещение отрицательного заряда против сил поля эквивалентно смещению положительного в направлении сил поля, то общий заряд, сместившийся сквозь поверхность s , равен:

$$Q' = qN_1xs + qN_1(d-x)s = N_1qds = Ps,$$

так как $N_1qd = P$. Стало быть,

$$P = \frac{Q'}{s}.$$

В общем случае неоднородного поля следует написать:

$$P = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q'}{\Delta s} = \frac{dQ'}{ds},$$

т. е. поляризованность равна пределу отношения электрического заряда, переносимого заряженными частицами, сместившимися в веществе диэлектрика в процессе установления поля сквозь элемент поверхности, нормальный к направлению смещения частиц, к величине этого элемента при стремлении последнего к нулю.

В анизотропных кристаллических телах диэлектрическая восприимчивость по различным главным осям имеет различные значения, и если вектор \mathbf{E} не направлен по одной из главных осей кристалла, то вектор \mathbf{P} уже не совпадает по направлению с вектором \mathbf{E} . Физически это объясняется тем, что заряженные элементарные частицы в молекулах кристаллов смещаются не в сторону действия внешнего поля, а несколько уклоняются в том направлении, в кото-

ром противодействующие смещению междумолекулярные силы наиболее слабы и диэлектрическая восприимчивость наибольшая. При произвольном, но заданном расположении осей OX , OY и OZ по отношению к главным осям кристалла связь между составляющими векторов \mathbf{P} и \mathbf{E} по осям OX , OY и OZ может быть записана в виде:

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z,$$

$$P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z,$$

$$P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z,$$

т. е. диэлектрическая восприимчивость (как абсолютная, так и относительная) является при этом тензорной величиной.

Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, тело любой формы с зарядом q (рис. 1-10), но теперь будем считать, что тело окружено диэлектриком, в общем случае неоднородным и анизотропным. Окружим мысленно тело замкнутой поверхностью s , расположенной в диэлектрике. При увеличении свободного заряда q тела от нуля до его конечного значения в диэлектрике усиливалось электрическое поле и увеличивалась поляризация диэлектрика. В процессе установления поля происходило смещение элементарных обладающих электрическим зарядом частиц, входящих в состав вещества диэлектрика, и сквозь поверхность s этими частицами был перенесен заряд Q' . Согласно изложенному выше, этот заряд может быть представлен в виде:

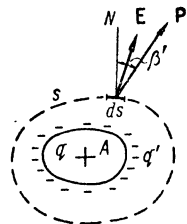


Рис. 1-10.

$$Q' = \oint_s P \cos \beta' ds = \oint_s \mathbf{P} ds,$$

где \mathbf{P} — вектор поляризованности в точках поверхности s .

При этом, если $q > 0$, то и $Q' > 0$, так как в этом случае положительно заряженные частицы смещаются в направлении положительной внешней нормали к поверхности s .

В объеме пространства, ограниченного поверхностью s , помимо свободного заряда q , появится так называемый связанный заряд q' , т. е. заряд частиц, связанных внутримолекулярными силами, но уже не компенсирующийся зарядом другого знака. В случае однородного диэлектрика связанный заряд появляется на границе диэлектрика около поверхности заряженного проводника, где как бы обнажаются заряды диполей одного знака, противоположного заряду q проводника. В общем случае неоднородного диэлектрика связанные заряды появляются также на границах раздела частей диэлектрика, обладающих различными диэлектрическими

проницаемостями. Существенно отметить, что независимо от того, где размещены связанные заряды, должно иметь место очевидное равенство:

$$q' = -Q'.$$

Действительно, до образования электрического поля объемная плотность электрического заряда в диэлектрике всюду была равна нулю и связанный заряд q' также был равен нулю. Поэтому появление избыточного связанного заряда q' одного знака в объеме, ограниченном поверхностью s , после установления поля возможно только вследствие того, что сквозь поверхность s переносится смещающимися в процессе поляризации заряженными частицами заряд Q' . При этом абсолютные значения $|q'|$ и $|Q'|$ должны быть равны друг другу, но сами величины q' и Q' должны быть противоположны по знаку, так как, если положительный заряд смещается сквозь поверхность s изнутри наружу, то в объеме, ограниченном этой поверхностью, образуется избыток отрицательного заряда.

Итак, имеем:

$$q' = -Q' = -\oint_s \mathbf{P} ds.$$

Учитывая влияние поляризации появлением связанного заряда q' , мы должны рассматривать поле как существующее в пустоте, но созданное не только свободным зарядом q тела, но и связанным зарядом q' . Соответственно можно написать теорему Гаусса в форме:

$$\oint_s \mathbf{E} ds = \frac{q + q'}{\epsilon_0}.$$

Умножив правую и левую части равенства на ϵ_0 , получаем:

$$\oint_s \epsilon_0 \mathbf{E} ds = q + q' = q - \oint_s \mathbf{P} ds.$$

Отсюда находим:

$$\oint_s \epsilon_0 \mathbf{E} ds + \oint_s \mathbf{P} ds = \oint_s (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) ds = q.$$

Обозначим через \mathbf{D} вектор, равный сумме векторов $\epsilon_0 \mathbf{E}$ и \mathbf{P} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

и назовем его вектором электрического смещения. Имеем:

$$\oint_s \mathbf{D} ds = \oint_s D \cos \beta ds = q,$$

т. е. поток вектора электрического смещения сквозь замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен свободному

электрическому заряду, заключенному в части пространства, ограниченной этой поверхностью.

В последнем соотношении β есть угол между вектором \mathbf{D} и нормалью к элементу ds поверхности s .

Понятие об электрическом смещении в диэлектрике и о векторе электрического смещения было введено Максвеллом.

Вторая составляющая \mathbf{P} вектора электрического смещения была нами представлена как результат смещения элементарных обладающих зарядом частиц, входящих в состав вещества диэлектрика, сквозь поверхность, нормальную к направлению смещения этих частиц.

Первая составляющая $\epsilon_0 \mathbf{E}$ вектора электрического смещения, которую мы обозначим через \mathbf{D}_0 , не является результатом смещения электрически заряженных частиц сквозь некоторую поверхность, так как она относится к электрическому полю в пустоте, т. е. к той области пространства, в которой отсутствуют заряженные частицы.

Величина $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}$, так же как и напряженность поля \mathbf{E} , характеризует само электрическое поле в данной его точке. Важно отметить, что физическая размерность величины D_0 та же, что и размерность поляризованности P диэлектрика, т. е. размерность электрического заряда, отнесенного к единице поверхности. Это обстоятельство дает возможность сделать весьма важные обобщения, относящиеся к случаю изменяющегося во времени электрического поля, которые будут развиты далее в параграфах об электрическом токе и его магнитном поле.

Соотношение

$$\oint_s \mathbf{D} ds = q,$$

устанавливающее равенство потока вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность *свободному* заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью, называют иногда *обобщенной теоремой Гаусса*, поскольку оно справедливо уже для любой среды.

Мы получили это соотношение, используя теорему Гаусса. Однако теорема Гаусса доказывается лишь для случая *электростатического поля*. Соотношение же $\oint_s \mathbf{D} ds = q$, следуя Максвеллу,

полагают справедливым во всех без исключения случаях и для сколь угодно быстро изменяющихся *переменных* электрических полей.

При таком широком обобщении это соотношение следует рассматривать как основной постулат теории электромагнитного поля. Все выводы этой теории, принимающей его в качестве одного из

главных положений, полностью подтверждаются опытом. Будем называть его *постулатом Максвелла*.

Для случая однородной и изотропной среды мы имеем теорему Гаусса: $\oint_s \mathbf{E} ds = \frac{q}{\epsilon}$. С другой стороны, постулат Максвелла дает:

$\oint_s \mathbf{D} ds = q$. Оба выражения совпадут, если положить

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Будем считать, что это соотношение показывает связь между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} в данной точке любой изотропной среды, причем ϵ — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды в рассматриваемой точке. При этом нет необходимости среду считать однородной. Действительно, если связь $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ пригодна для однородной среды, то всегда можно выделить в неоднородной среде около рассматриваемой точки столь малый объем, в пределах которого среду можно считать однородной. Поскольку постулат Максвелла справедлив во всех случаях, то для изотропной среды всегда можно написать: $\oint_s \epsilon \mathbf{E} ds = q$. В случае однородной среды ϵ можно

вынести за знак интеграла. При этом получаем теорему Гаусса. В случае же среды неоднородной величина ϵ не может быть вынесена за знак интеграла.

Таким образом, абсолютная диэлектрическая проницаемость изотропной среды в данной ее точке равна отношению величины электрического смещения к величине напряженности поля:

$$\epsilon = \frac{D}{E}.$$

Получаем для изотропной среды:

$$D = \epsilon E = D_0 + P = \epsilon_0 E + \alpha E,$$

откуда

$$\epsilon = \epsilon_0 + \alpha \quad \text{или} \quad \epsilon_r = 1 + \alpha_r.$$

Заметим, что для всех веществ $\epsilon > \epsilon_0$.

В анизотропных кристаллических телах при произвольном, но заданном расположении осей OX , OY , OZ по отношению к главным осям кристалла связь между проекциями на оси координат векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} может быть записана в форме, аналогичной той, в которой была записана выше связь между проекциями векторов \mathbf{P} и \mathbf{E} . При этом диэлектрическая проницаемость является тензорной величиной.

Определив вектор электрического смещения во всех точках поля, можно провести ряд линий таким образом, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению

с вектором смещения (рис. 1-11). Эти линии называют линиями электрического смещения. На рисунках их снабжают стрелками, указывающими направление вектора \mathbf{D} . Совокупность линий смещения, проходящих через все точки контура, ограничивающего некоторую поверхность s (рис. 1-11), образует трубчатую поверхность, которая выделяет из всего поля так называемую трубку электрического смещения. Линии и трубки смещения начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных.

Установим связь между зарядами Δq_1 и Δq_2 на концах трубки смещения.

Применяя постулат Максвелла к замкнутой поверхности, образованной боковой поверхностью s_0 трубки и поверхностями s_1 и s_2 внутри заряженных проводящих тел (рис. 1-11), будем иметь:

$$\int_{s_1} \mathbf{D} ds + \int_{s_0} \mathbf{D} ds + \int_{s_2} \mathbf{D} ds = \Delta q_1 + \Delta q_2.$$

Но $\int_{s_1} \mathbf{D} ds + \int_{s_2} \mathbf{D} ds = 0$, так как поле внутри заряженных проводящих тел отсутствует, и $\int_{s_0} \mathbf{D} ds = 0$, так как вектор \mathbf{D} касателен к поверхности s_0 . Таким образом,

$$\Delta q_1 = -\Delta q_2,$$

т. е. *трубка электрического смещения опирается своими концами на равные и противоположные по знаку заряды.*

Применяя постулат Максвелла к замкнутой поверхности, образованной поверхностью s некоторого поперечного сечения трубки, частью s'_0 боковой поверхности трубки и поверхностью s_1 , найдем:

$$\int_s \mathbf{D} ds + \int_{s'_0} \mathbf{D} ds + \int_{s_1} \mathbf{D} ds = \Delta q_1 \quad \text{или} \quad \int_s \mathbf{D} ds = \Delta q_1,$$

так как

$$\int_{s'_0} \mathbf{D} ds = 0 \quad \text{и} \quad \int_{s_1} \mathbf{D} ds = 0.$$

Следовательно, *поток вектора электрического смещения сквозь любое поперечное сечение трубки остается постоянным и равным*

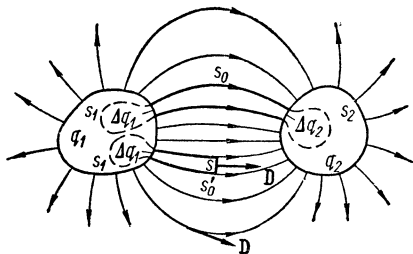


Рис. 1-11.

заряду на конце трубки. Выбирая Δq_1 равным единице электрического заряда, получаем единичную трубку смещения.

Единицей электрического смещения в системе единиц МКСА является кулон на квадратный метр (1 к/м^2).

1-6. Электрические токи проводимости, переноса и смещения

Основными видами электрического тока являются: ток проводимости, ток переноса и ток электрического смещения. Рассмотрим последовательно эти виды тока.

Током проводимости называют упорядоченное движение заряженных частиц внутри проводника под действием электрического поля.

Термин электрический ток применяют не только для характеристики явления движения заряженных частиц, но и для определения интенсивности этого явления в качестве синонима термина сила электрического тока. В этом последнем смысле электрический ток является физической величиной и во всех случаях, когда понятие электрический ток связано с движением заряженных частиц, как это имеет место, например, в случае тока проводимости, он может быть определен следующим образом:

электрический ток (сила электрического тока) i сквозь некоторую поверхность s равен пределу отношения электрического заряда Δq , переносимого заряженными частицами сквозь эту поверхность в течение промежутка времени Δt , к величине этого промежутка, когда последний стремится к нулю, т. е. $i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$. Электрический ток есть величина скалярная. В разных элементах поверхности s направление движения заряженных частиц может быть самым различным. Однако, рассматривая весьма малый элемент поверхности Δs , можно считать направление движения заряженных частиц во всех точках элемента одинаковым, причем это положение становится все более строгим по мере уменьшения Δs , т. е. когда $\Delta s \rightarrow 0$. В связи с этим вводят в рассмотрение векторную величину —

плотность тока, равную пределу отношения тока Δi сквозь элемент поверхности Δs , нормальный к направлению движения заряженных частиц, к этому элементу, когда последний стремится к нулю,

$$\delta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \frac{di}{ds}$$

и имеющую направление, совпадающее с направлением движения положительно заряженных частиц, или, соответственно, противоположное направлению движения отрицательно заряженных частиц.

Если вектор δ составляет с положительной нормалью к поверхности угол β , то существует соотношение:

$$di = \delta \cos \beta ds = \delta ds.$$

Ток, проходящий сквозь поверхность s конечных размеров (рис. 1-12), поэтому равен:

$$i = \int_s \delta \cos \beta ds = \int_s \delta ds.$$

Только в том случае, когда плотность тока во всех точках поверхности одинакова по величине и составляет с нормалью к поверхности всюду один и тот же угол, можно написать:

$$i = \delta \cos \beta \int_s ds = \delta \cos \beta s.$$

Если, кроме того, направление тока нормально к поверхности, то $i = \delta s$. Такое условие соблюдается при постоянном во времени токе в случае линейных проводников, поперечные размеры которых малы по сравнению с их длиной. Поэтому при изучении процессов в электрических цепях, составленных из линейных проводников, обычно говорят о направлении всего тока в том или ином участке цепи.

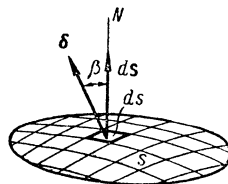


Рис. 1-12.

В общем случае *линии тока* называют линии, к которым векторы плотности тока всюду касательны, и *трубками тока* называют область, ограниченную трубчатой поверхностью, образованной линиями тока.

В системе единиц МКСА единицей тока является *ампер* (1 а) и единицей плотности тока *ампер на квадратный метр* (1 а/м²).

Характерным отличием тока проводимости от других видов тока является то, что плотность тока проводимости при постоянной температуре проводника пропорциональна напряженности электрического поля. При этом в изотропной среде вектор плотности тока δ совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля E и линии тока совпадают с линиями напряженности электрического поля. Поэтому для плотности тока проводимости можно написать:

$$\delta = \gamma E.$$

Величину γ называют *удельной электрической проводимостью вещества*.

Величину $\rho = \frac{1}{\gamma}$, обратную удельной проводимости, называют *удельным электрическим сопротивлением*

в е щ е с т в а. Следовательно, связь между напряженностью электрического поля и плотностью тока может быть представлена в виде

$$E = \rho \delta.$$

Единицей удельного сопротивления в системе единиц МКСА является *ом*, умноженный на метр (*ом · м*). Действительно, из соотношения $\rho = \frac{E}{\delta}$ имеем для этой единицы $1 \frac{в}{м} \cdot \frac{м^2}{а} = 1 \frac{в \cdot м}{а} = 1 \text{ ом} \cdot м$, так как $1 \frac{в}{а} = 1 \text{ ом}$ есть единица электрического сопротивления. Соответственно единицей удельной проводимости в этой системе является $1 \frac{1}{\text{ом} \cdot м}$.

Возможность характеризовать проводящее вещество определенной величиной γ (или ρ) является результатом того, что в проводящем веществе средняя скорость заряженных частиц при заданной температуре, а следовательно, и плотность тока остается в постоянном электрическом поле постоянной, так как кинетическая энергия, приобретаемая этими частицами при ускорении их в электрическом поле, передается атомам вещества и переходит в тепловое движение.

Электрический ток в металлах представляет собой движение электронов проводимости. К проводящим веществам относятся также уголь и электролиты. В электролитах проводимость осуществляется положительными и отрицательными ионами.

Удельная проводимость γ и, соответственно, удельное сопротивление ρ проводящих веществ зависят от температуры.

Рассмотрим другой вид электрического тока, именуемый т о к о м п е р е н о с а или т о к о м к о н в е к ц и и, под которым понимают явление переноса электрических зарядов движущимися в свободном пространстве заряженными частицами или телами. Ток переноса отличается от тока проводимости тем, что его плотность не может быть представлена соотношением: $\delta = \gamma E$, где удельная проводимость γ есть определенная величина, характеризующая среду, проводящую ток. В случае *свободного* движения обладающих электрическим зарядом частиц или заряженных тел в электрическом поле их скорость не пропорциональна напряженности поля E . Действительно, сила, действующая на частицу с зарядом q в электрическом поле, равна qE . Ускорение такой частицы пропорционально напряженности поля. Соответственно движение ее в свободном пространстве будет равноускоренным, так как отсутствует сопротивление среды.

Важным случаем тока переноса является движение в пустоте элементарных частиц, обладающих зарядом. Не менее важным случаем тока переноса является электрический ток в газах. Выразим

плотность тока переноса через среднюю объемную плотность ρ заряда движущихся частиц и их скорость v . С этой целью выделим в пространстве прямоугольный параллелепипед, имеющий объем $dl ds$ (рис. 1-13). Пусть ребро dl параллельно вектору скорости. Заряд внутри параллелепипеда $dq = \rho dl ds$. Весь этот заряд пройдет через поверхность ds за такой промежуток времени dt , в течение которого элементарные заряженные частицы проходят путь dl . Этот промежуток времени определяется условием $dl = v dt$. Следовательно, ток сквозь поверхность ds равен $di = \frac{dq}{dt} = \rho v ds$, и для

плотности тока имеем: $\delta = \frac{di}{ds} = \rho v$. При движении частиц с отрицательным зарядом ($\rho < 0$) условное положительное направление тока противоположно направлению движения, и между абсолютными значениями δ и v существует соотношение $\delta = -\rho v$. Оба соотношения для любого знака ρ объединяются в векторной форме:

$$\delta = \rho v.$$

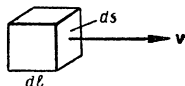


Рис. 1-13.

При $\rho > 0$ векторы δ и v совпадают по направлению. При $\rho < 0$ они противоположны.

Если одновременно имеет место движение положительно заряженных частиц со скоростью v_+ при объемной плотности зарядов ρ_+ и движение отрицательно заряженных частиц со скоростью v_- при объемной плотности зарядов ρ_- , то плотность тока переноса

$$\delta = \rho_+ v_+ + \rho_- v_-.$$

Рассмотрим теперь третий вид электрического тока, называемый током электрического смещения. С этим видом тока приходится считаться при переменном электрическом поле в диэлектрике.

При всяком изменении электрического поля во времени изменяется поляризованность P диэлектрика. При этом в веществе диэлектрика движутся элементарные частицы с электрическими зарядами, входящие в состав атомов и молекул вещества. Этот вид электрического тока в диэлектрике называют электрическим током поляризации. Так как в диэлектрике заряженные частицы не являются свободными и могут смещаться под действием электрического поля, то ток поляризации называют также электрическим током смещения, причем он составляет, как будет дальше отмечено, только часть общего тока смещения в диэлектрике. Нетрудно связать плотность δ' этого тока с изменением поляризованности P вещества.

В § 1-5 величина P была выражена через электрический заряд dQ' , перенесенный заряженными частицами, сместившимися в веществе диэлектрика в процессе установления электрического поля

сквозь элемент поверхности ds , нормальный к направлению смещения частиц, в виде $P = dQ/ds$. Если элемент поверхности ds ориентирован по отношению к направлению смещения заряженных частиц произвольно, то будем иметь соответственно $P_n = dQ/ds$, где P_n — нормальная составляющая вектора \mathbf{P} к элементу поверхности ds .

При изменении величины \mathbf{P} во времени сквозь элемент поверхности ds будет проходить ток

$$di = \frac{d}{dt} (P_n ds) = \frac{dP_n}{dt} ds.$$

С другой стороны, $di = \delta'_n ds$, где δ'_n — нормальная к элементу ds составляющая вектора плотности тока δ' . Таким образом:

$$\delta'_n = \frac{dP_n}{dt}.$$

Так как расположение элемента поверхности ds может быть выбрано произвольно, то мы приходим к выводу, что составляющая вектора плотности тока δ' по какому-либо направлению равна производной по времени от составляющей вектора поляризованности вещества \mathbf{P} по этому направлению. В частности, имеем:

$$\delta'_x = \frac{dP_x}{dt}; \quad \delta'_y = \frac{dP_y}{dt}; \quad \delta'_z = \frac{dP_z}{dt}.$$

Вектор плотности тока δ' , таким образом, равен:

$$\delta' = \mathbf{i} \frac{dP_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dP_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dP_z}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{i}P_x + \mathbf{j}P_y + \mathbf{k}P_z),$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы по осям OX , OY и OZ .

Так как $\mathbf{i}P_x + \mathbf{j}P_y + \mathbf{k}P_z = \mathbf{P}$, то имеем:

$$\delta' = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Итак, рассматриваемая часть вектора плотности тока смещения равна производной вектора поляризованности вещества по времени.

Выше уже было отмечено, что ток смещения и, соответственно, плотность тока смещения δ' , обязанные изменению поляризованности вещества, составляют только часть всего тока смещения и, следовательно, плотности тока смещения в диэлектрике. Действительно, вектор электрического смещения \mathbf{D} в диэлектрике имеет две составляющие \mathbf{D}_0 и \mathbf{P}

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P},$$

где $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}$. При изменении электрического поля изменяются обе составляющие; таким образом, имеем:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d\mathbf{D}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Вторая составляющая в последнем выражении, как только что было установлено, есть вектор плотности тока δ' смещения, обязанного движению обладающих зарядами элементарных частиц в веществе диэлектрика. Очевидно, и первая составляющая имеет физическую размерность плотности тока. Она характеризует физический процесс в самом электрическом поле при его изменении во времени. Область пространства, рассматриваемого как форма существования материи в виде поля, т. е. область, в которой отсутствуют известные нам частицы материи, выше была названа пустотой. Следовательно, первую составляющую мы можем назвать **плотностью электрического тока смещения в пустоте**:

$$\delta_0 = \frac{dD_0}{dt}.$$

Таким образом, вектор плотности *всего* электрического тока смещения в диэлектрике равен:

$$\delta = \frac{dD}{dt} = \delta_0 + \delta' = \frac{dD_0}{dt} + \frac{dP}{dt}.$$

Производную вектора электрического смещения D по времени следует понимать в векторном смысле. Если в точке A вектор смещения изменяется не только по величине, но и по направлению

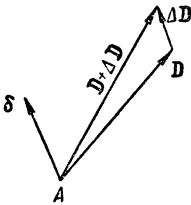


Рис. 1-14.

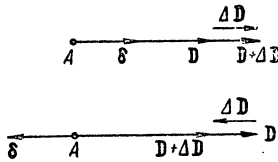


Рис. 1-15.

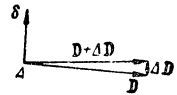


Рис. 1-16.

(рис. 1-14), то вектор плотности тока δ уже не будет совпадать по направлению с вектором смещения. Направление вектора δ есть направление, к которому стремится направление приращения ΔD вектора смещения D , происходящего за промежуток времени Δt , когда $\Delta t \rightarrow 0$. На рис. 1-15 и 1-16 приведены частные случаи, когда D меняется только по величине или только по направлению.

Для составляющих вектора плотности тока смещения имеем во всех случаях выражения:

$$\delta_x = \frac{dD_x}{dt}; \quad \delta_y = \frac{dD_y}{dt}; \quad \delta_z = \frac{dD_z}{dt}.$$

При переменном поле ток смещения, принципиально говоря, существует не только в диэлектриках, но также и в полупроводящих и проводящих веществах. Действительно, под действием

внешнего поля молекулы этих веществ должны поляризоваться так же, как и молекулы диэлектрика и, кроме того, должно возникнуть смещение в пустоте. В полупроводящих веществах с токами смещения приходится считать только при достаточно высоких частотах изменения электрического поля. В проводящих же веществах токи смещения ничтожно малы по сравнению с токами проводимости даже при весьма высоких частотах. С другой стороны, в изолирующем веществе наряду с токами смещения обычно существуют токи проводимости, хотя они весьма малы по сравнению с первыми уже при низких частотах.

В отношении первой составляющей δ_0 вектора плотности тока смещения, т. е. плотности тока смещения в пустоте, наглядная интерпретация при современном состоянии науки не может быть дана, так как мы еще не имеем сколь-нибудь детального представления о внутреннем строении электромагнитного поля, о тех внутренних процессах, которые в нем совершаются. Однако, даже не имея для первой составляющей δ_0 плотности тока смещения представления столь же наглядного, как для второй его составляющей δ' , мы можем высказать чрезвычайно важное предположение. Именно, следует ожидать, что важнейшее проявление электрического тока — появление связанного с ним магнитного поля — будет одинаковым для обеих составляющих. Опыт полностью подтверждает такое предположение.

Эти идеи впервые были высказаны Максвеллом и привели к созданию им теории электромагнитного поля. Действительно, согласно этим идеям при всяком изменении электрического поля, даже в предположении отсутствия в нем частиц вещества ($\mathbf{P} = 0$), должно возникать в том же пространстве связанное с электрическим полем магнитное поле, т. е. образуется единое электромагнитное поле. Эти важные представления будут нами развиты подробнее в дальнейшем. Здесь важно отметить, что выводы из максвелловой теории электромагнитного поля полностью подтверждены опытом. Они были подтверждены экспериментальными исследованиями электромагнитных волн Г. Герца и П. Н. Лебедева. Наиболее ярким подтверждением их явились замечательные работы А. С. Попова и изобретение им радио, приведшие к современному исключительно широкому развитию радиотехники. При этом все достигнутые к настоящему времени практические результаты в области излучения и распространения электромагнитных волн находятся в полном согласии с теорией электромагнитного поля, в основу которой положено представление об электрических токах смещения в диэлектрике и пустоте.

Учитывая все рассмотренные выше виды электрического тока, мы можем дать следующее общее определение понятия э л е к т р и - ч е с к и й т о к, рассматриваемого как физическое явление.

Электрический ток представляет собой явление движения заряженных частиц и явление изменения электрического поля во времени, сопровождаемые магнитным полем.

Первая часть определения относится к токам проводимости, переноса и поляризации вещества диэлектрика. Вторая часть относится к току смещения в пустоте.

Количественное определение термина электрический ток, рассматриваемого как физическая величина, т. е. как синоним термина сила электрического тока, было дано в начале этого параграфа для случая, когда ток представляет собой явление движения заряженных частиц. Это определение соответствовало выражению:

$$i = dq/dt.$$

Для случая тока электрического смещения в пустоте количественное определение вытекает из выражения:

$$i = \int_s \delta_0 ds = \int_s \frac{dD_0}{dt} ds = \frac{d}{dt} \int_s D_0 ds = \frac{d\Psi_{D_0}}{dt},$$

т. е. ток электрического смещения в пустоте сквозь некоторую поверхность равен скорости изменения потока электрического смещения в пустоте сквозь эту поверхность.

1-7. Принцип непрерывности электрического тока

Вообразим в диэлектрике замкнутую поверхность s (рис. 1-17) и представим, что заряжается тело A , расположенное внутри этой поверхности. При увеличении заряда q тела усиливается окружающее его электрическое поле и возрастает электрическое смещение в диэлектрике. Поэтому сквозь поверхность s изнутри наружу протекает ток смещения. Поток вектора смещения сквозь поверхность s равен свободному заряду q , заключенному внутри поверхности:

$$\oint_s \mathbf{D} ds = q.$$

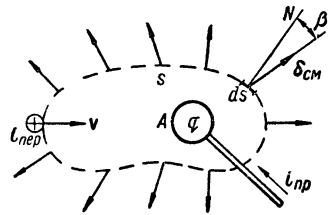


Рис. 1-17.

Возьмем производную от этого равенства по времени. Получим

$$\oint_s \frac{d\mathbf{D}}{dt} ds = \frac{dq}{dt}.$$

Величина

$$\oint_s \frac{dD}{dt} ds = \oint_s \delta ds = i_{см}$$

есть ток смещения сквозь поверхность s изнутри наружу.

Величина dq/dt есть скорость нарастания свободного заряда, заключенного внутри поверхности s . Увеличение свободного положительного заряда в объеме пространства, ограниченного поверхностью s , возможно только путем переноса положительных зарядов из внешнего пространства внутрь объема или отрицательных зарядов в обратном направлении. Этот перенос может быть осуществлен либо в процессе тока проводимости $i_{пр}$ в проводниках, пересекающих поверхность s , либо в процессе тока переноса $i_{пер}$, когда заряды переносятся сквозь поверхность на заряженных телах или движущимися в пространстве заряженными частицами. Если $\frac{dq}{dt} > 0$, то положительные заряды переносятся из внешнего пространства внутрь объема, ограниченного поверхностью s , а следовательно, сумма токов ($i_{пр} + i_{пер}$) будет отрицательна, так как положительной мы считаем внешнюю нормаль. Таким образом,

$$\frac{dq}{dt} = -(i_{пр} + i_{пер}).$$

Равенство $\oint_s \frac{dD}{dt} ds = \frac{dq}{dt}$ теперь может быть написано в виде

$$i_{см} = -(i_{пр} + i_{пер}) \quad \text{или} \quad i_{см} + i_{пр} + i_{пер} = 0.$$

Следовательно, *сумма токов всех родов — проводимости, переноса и смещения — сквозь любую замкнутую поверхность равна нулю.*

Если обозначить через δ без индекса плотность тока независимо от его рода и через i — весь ток сквозь поверхность, то для любой замкнутой поверхности будем иметь:

$$i = \oint_s \delta ds = 0,$$

что и является общим выражением принципа непрерывности электрического тока. Этот важный принцип гласит: *полный электрический ток сквозь взятую в какой угодно среде замкнутую поверхность равен нулю.* При этом выходящий из поверхности ток считается положительным, входящий — отрицательным.

Таким образом, линии тока нигде не имеют ни начала, ни конца, они принципиально являются замкнутыми линиями. Электрический ток протекает всегда по замкнутым путям.

Из всего сказанного ясно, что принцип непрерывности или, что то же, принцип замкнутости тока приобретает всеобщее значение

только с введением понятия о токе смещения в диэлектрике и именно с учетом тока смещения в пустоте.

В качестве примера рассмотрим, как осуществляется замкнутость линий тока в случае тока переноса, т. е. в случае движущихся заряженных тел или частиц. Этот случай имеет глубокое принципиальное значение, так как всякий электрический ток, кроме тока смещения в пустоте, представляет собой движение большого числа отдельных заряженных элементарных частиц.

Рассмотрим уединенный точечный заряд q , движущийся в пустоте со скоростью v (рис. 1-18). В каждый момент времени вектор \mathbf{D} в любой точке пространства направлен по радиальной прямой, исходящей из центра заряда, и имеет величину, равную $D = \epsilon_0 E = \frac{q}{4\pi r^2}$ (предполагаем, что v значительно меньше скорости света, и, следовательно, поле имеет такой же характер, как и для неподвижного заряда).

За промежуток времени Δt заряд проходит путь $\Delta z = v\Delta t$. Соответственно новому положению заряда вектор смещения в каждой точке пространства получает новое значение $\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}$. Вектор плотности тока смещения $\boldsymbol{\delta} = d\mathbf{D}/dt$ всюду имеет направление, к которому стремится направление $\Delta\mathbf{D}$ при $\Delta t \rightarrow 0$. На рис. 1-18 построены векторы плотности тока в некоторых точках пространства. Если бы мы произвели это построение в достаточно большом числе точек пространства, то получили бы возможность провести линии тока смещения. Они имели бы вид линий, изображенных на рисунке. Мы видим, что ток смещения является продолжением тока переноса, и линии тока оказываются замкнутыми.

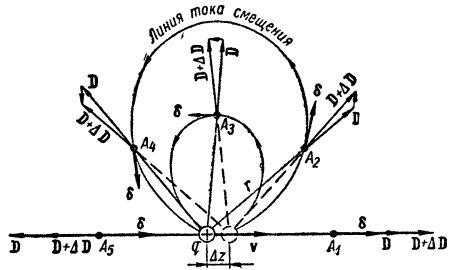


Рис. 1-18.

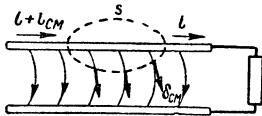


Рис. 1-19.

При большом числе движущихся элементарных заряженных частиц картина линий тока смещения усложняется, но по-прежнему линии тока оказываются замкнутыми, так как эта сложная картина получается наложением простых, изображенных на рис. 1-18.

В качестве другого примера рассмотрим линию передачи (рис. 1-19). При переменном напряжении между проводами в диэлектрике возникают токи смещения. Проведем замкнутую поверхность s так, чтобы она охватила часть одного провода линии. Токи

При большом числе движущихся элементарных заряженных частиц картина линий тока смещения усложняется, но по-прежнему линии тока оказываются замкнутыми, так как эта сложная картина получается наложением простых, изображенных на рис. 1-18.

В качестве другого примера рассмотрим линию передачи (рис. 1-19). При переменном напряжении между проводами в диэлектрике возникают токи смещения. Проведем замкнутую поверхность s так, чтобы она охватила часть одного провода линии. Токи

в проводе — входящий в поверхность и выходящий из нее — разнятся между собой на величину тока смещения в диэлектрике, проходящего сквозь поверхность s . Поэтому переменный ток в проводе в один и тот же момент времени различен в разных поперечных сечениях провода. С этим обстоятельством приходится считаться при быстрых изменениях напряжения между проводами и в случае очень длинных линий.

1-8. Электрическое напряжение.

Разность электрических потенциалов.

Электродвижущая сила

Перейдем к рассмотрению весьма важных величин, связанных с электрическим полем, а именно: электрического напряжения, разности электрических потенциалов и электродвижущей силы.

Если частица с зарядом q переносится в электрическом поле вдоль некоторого пути, то действующие на нее силы поля совершают работу. Отношение этой работы к величине переносимого заряда представляет собой физическую величину, называемую электрическим напряжением. При перемещении частицы по пути dl (рис. 1-20) силы поля совершают работу:

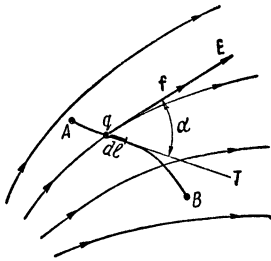


Рис. 1-20.

$$dA = f \cos \alpha dl = qE \cos \alpha dl = qEdl.$$

Через dl обозначен вектор, равный по величине элементу пути dl и направленный по касательной T к пути в сторону перемещения заряженной частицы. Угол α есть угол между векторами E и dl .

Работа, совершаемая силами поля при перемещении частицы вдоль всего пути от точки A до точки B (рис. 1-20), равна:

$$A = \int_A^B f \cos \alpha dl = q \int_A^B E \cos \alpha dl = q \int_A^B E dl.$$

Она пропорциональна линейному интегралу $\int_A^B E \cos \alpha dl$ напряженности поля вдоль заданного пути. Этот линейный интеграл равен электрическому напряжению вдоль заданного пути от A к B . Принято обозначать напряжение буквой u . Таким образом:

$$u_{AB} = \int_A^B E \cos \alpha dl = \int_A^B E dl.$$

Следовательно,

$$A = qU_{AB}.$$

В общем случае рассматриваемый путь может проходить в любой среде, в частности он может быть взят целиком в проводнике, целиком в диэлектрике или может проходить частично в проводнике и частично в диэлектрике.

В соответствии с изложенным *электрическое напряжение представляет собой физическую величину, характеризующую электрическое поле вдоль рассматриваемого пути и равную линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого пути.*

Нередко, говоря о напряжении вдоль некоторого участка пути, употребляют термин *падение напряжения* вдоль этого участка. Соответственно, линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль некоторого замкнутого контура $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$ представляет собой сумму падений напряжений вдоль всех участков этого контура.

Единицей напряжения в системе единиц МКСА является *вольт (1 в)*.

Из сказанного вытекает, что *величина напряженности электрического поля равна падению напряжения, отнесенного к единице длины линии напряженности поля.* В самом деле, падение напряжения на пути dl равно $du = E dl$, если путь dl совпадает с линией напряженности поля, и, следовательно, $E = du/dl$. Поэтому единицей напряженности электрического поля в системе единиц МКСА является *вольт на метр (1 в/м)*.

Как было отмечено в § 1-6, в случае проводящей среды напряженность электрического поля \mathbf{E} связана с плотностью тока δ соотношением $\mathbf{E} = \rho \delta$, где ρ — удельное сопротивление среды. В простейшем случае прямолинейного отрезка проводника с постоянным током i , длиной l и сечением s падение напряжения в ней равно $u = El$, а ток равен $i = \delta s$. Таким образом, $u = \rho dl = \frac{\rho l}{s} i = ri$.

Величина $r = u/i$ является *электрическим сопротивлением* рассматриваемого отрезка проводника. Соотношение $u = ri$ представляет собой *закон Ома* для этого участка проводника. Мощность, определяющая количество энергии, выделяемой в проводнике в виде тепла в единицу времени, имеет выражение $p = \frac{A}{t} = \frac{uq}{t} = ui = ri^2$. Это соотношение выражает собою *закон Ленца—Джоуля*.

Рассмотрим теперь величины, именуемые *электрическим потенциалом* и *разностью электрических потенциалов*.

Пусть имеется электростатическое поле, т. е. поле покоящихся заряженных тел (рис. 1-21). В электростатическом поле линейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру равен нулю: $\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0$. Это важное свойство электростатического поля вытекает из принципа сохранения энергии. Предположим, что по замкнутому пути $AmBnA$ (рис. 1-21) перемещается тело с зарядом q . На части замкнутого пути движение будет совершаться в направлении сил поля, и работа, затраченная силами поля, будет положительной. На другой части замкнутого пути движение будет происходить против сил поля и, соответственно, работа сил поля будет отрицательной. Работа, затраченная силами поля на перемещение тела с зарядом q по всему замкнутому пути, должна быть равна нулю:

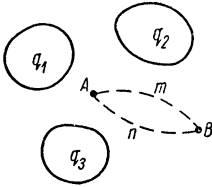


Рис. 1-21.

$$q \oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0, \text{ т. е. } \oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0.$$

Действительно, при отсутствии этого условия всегда можно было бы выбрать такое направление обхода контура $AmBnA$, чтобы работа оказалась положительной. Однако после обхода по замкнутому пути система, включая и тело с зарядом q , возвращается в точности в исходное состояние, а это значит, что можно было бы повторять обход контура телом с зарядом q любое число раз и получать при каждом обходе конечную положительную работу. Возможность существования подобного неисчерпаемого источника энергии противоречит принципу сохранения энергии. Таким образом, в электростатическом поле линейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру должен быть равен нулю.

Отсюда непосредственно вытекает независимость линейного интеграла напряженности поля от выбора пути интегрирования при заданных начальной и конечной точках A и B пути. Действительно:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0,$$

откуда

$$\int_{AmB} \mathbf{E}d\mathbf{l} = - \int_{BnA} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{AnB} \mathbf{E}d\mathbf{l},$$

а так как пути m и n взяты произвольно, то, следовательно, интеграл $\int_A^B \mathbf{E}d\mathbf{l}$ в электростатическом поле не зависит от выбора пути интегрирования и является только функцией координат точек A и B .

Величину, равную этому интегралу, называют разностью электрических потенциалов точек A и B и обозначают $U_A - U_B$.

$$\text{Имеем: } U_A - U_B = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

С другой стороны, этот интеграл равен напряжению вдоль некоторого пути от точки A к точке B . Следовательно, в применении к электростатическому полю термины «напряжение» и «разность потенциалов» относятся к одной и той же величине.

В дальнейшем разность потенциалов будем обозначать буквой u , как и напряжение, в соответствии с чем будем применять обозначение: $U_A - U_B = u_{AB}$.

Из сказанного выше ясно, что разность электрических потенциалов двух точек электростатического поля численно равна работе сил поля при перемещении точечного заряженного тела с положительным зарядом, равным единице, из одной данной точки в другую.

Изберем в качестве конечной точки заданную в пространстве точку P . Тогда значение интеграла $\int_A^P \mathbf{E} d\mathbf{l}$ явится функцией только координат x, y, z точки A . Обозначая эту функцию через U_A или $U(x, y, z)$, можем написать:

$$\int_A^P \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A = U(x, y, z).$$

Величина U называется электрическим потенциалом рассматриваемой точки поля. Потенциал заданной точки P равен нулю, так как $U_P = \int_P^P \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$.

Электрический потенциал, характеризующий данное поле, может быть определен лишь с точностью до произвольной постоянной, зависящей от произвольного выбора точки P , в которой потенциал принимается равным нулю. Электрическое поле, которое может быть в каждой точке охарактеризовано с точностью до произвольной постоянной скалярной величиной, именуемой электрическим потенциалом, носит название потенциального электрического поля. Таковыми, в частности, являются электростатическое поле, а также электрическое поле постоянных токов, протекающих по неподвижным проводникам, при условии, что поле рассматривается вне области действия источников электродвижущих сил. Действительно, распределение зарядов на проводниках при этом остается, как и в случае электростатики, неизменным во времени. Электрическое поле около неподвижных проводников с постоянными токами и внутри этих проводников мы будем называть стационарным электрическим полем.

($E_{\text{стап}}$). Оговорка о необходимости ограничения областью вне источников э. д. с. для того, чтобы поле было потенциальным, будет рассмотрена в конце этого параграфа.

В реальных практических задачах электростатики обычно принимают равным нулю потенциал поверхности земли. При теоретическом исследовании задач, в которых рассматриваются заряженные тела, расположенные в ограниченной области пространства и окруженные бесконечной диэлектрической средой, обычно принимают равным нулю потенциал точек, бесконечно удаленных от заряженных тел, т. е. определяют потенциал как интеграл:

$$U = \int_A^{\infty} E dl.$$

Поверхности, которые пересекаются линиями напряженности электрического поля под прямым углом, являются поверхностями равного электрического потенциала. Действительно, вдоль любой линии на этой поверхности имеем

$$\int_A^B E \cos \alpha dl = 0, \text{ так как } \cos \alpha = 0. \text{ Следовательно, разность по-}$$

тенциалов любых двух точек A и B , лежащих на этой поверхности, равна нулю. Уравнение $U(x, y, z) = \text{const}$ определяет совокупность точек, лежащих на поверхности равного потенциала, т. е. является уравнением этой поверхности. Следы поверхности равного потенциала на плоскости чертежа называют линиями равного потенциала. Очевидно, линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом.

Напряженность электрического поля внутри проводников при статическом состоянии зарядов должна быть равна нулю, так как при отсутствии тока ($\delta = 0$) имеем $E = \rho\delta = 0$. Поэтому в электростатическом состоянии каждое проводящее тело имеет во всем объеме одинаковый потенциал; поверхности этих тел суть поверхности равного потенциала, и линии напряженности поля в диэлектрике нормальны к ним.

Если диэлектрическая проницаемость изолирующей среды, окружающей заряженное проводящее тело, не зависит от напряженности электрического поля, то величина E всюду в диэлектрике, а следовательно, и потенциал U тела, будут пропорциональны заряду q тела. Отношение q к U называется электрической емкостью тела:

$$C = \frac{q}{U},$$

причем равным нулю принимается потенциал в бесконечности.

Электрическая емкость уединенного тела зависит от геометрических параметров g , определяющих форму и размеры тела, и от абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ диэлектрика, его окружающего, $C = F(g, \epsilon)$. Если диэлектрик однороден, то $C = \epsilon \cdot f(g)$. При указанной оговорке, что ϵ не зависит от E , величина C не зависит от q и U .

В случае двух проводящих тел, окруженных диэлектриком, при условии, что их заряды равны и противоположны по знаку, т. е. $q_1 = -q_2$, разность потенциалов этих тел будет пропорциональна заряду одного из них. При этом величина

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{q_2}{U_2 - U_1}$$

называется электрической емкостью между этими телами. Она зависит от геометрических величин g , определяющих форму, размеры и взаимное расположение тел, а также от абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ диэлектрика: $C = F(g, \epsilon)$. В случае однородного диэлектрика $C = \epsilon \cdot f(g)$.

Система из двух таких тел, специально созданная для использования ее электрической емкости, называется конденсатором.

В формуле для емкости между телами берется заряд того тела, от которого отсчитывается разность потенциалов. При этом *всегда* $C > 0$.

Единицей электрической емкости в системе единиц МКСА служит *фарада* (1 ф). Единицей абсолютной диэлектрической проницаемости в этой системе, как было отмечено в § 1-4, является *фарада на метр* (1 ф/м). Действительно, из выражения $\epsilon = D/E$ следует, что единицей величины ϵ будет

$$1 \frac{\kappa}{\text{м}^2} : \frac{\text{в}}{\text{м}} = 1 \frac{\kappa}{\text{в} \cdot \text{м}} = 1 \frac{\text{ф}}{\text{м}}.$$

Перейдем теперь к последнему из рассматриваемой группы понятий, а именно к понятию «электродвижущая сила».

Характерное свойство всякого потенциального электрического поля и, в частности, электростатического поля, а именно равенство нулю линейного интеграла напряженности поля вдоль любого замкнутого контура, относится лишь к области пространства, расположенной вне источников так называемых *электродвижущих сил* (э. д. с.).

Появление э. д. с. связано с наличием электрических полей неэлектростатического и непотенциального характера.

В общем случае мы будем говорить, что *в замкнутом контуре действует электродвижущая сила e , если линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура*

не равен нулю, причем, как будет сейчас показано, этот линейный интеграл равен э. д. с., действующей в контуре:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varepsilon \neq 0.$$

Источниками э. д. с. могут являться, например, электрические генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы.

Будем совокупность устройств, предназначенных для прохождения в них электрического тока, называть э л е к т р и ч е с к о й цепью при условии, что электромагнитные процессы в этих устройствах могут быть описаны с помощью понятий об э. д. с., токе и напряжении.

Если в замкнутой электрической цепи под действием э. д. с. возникает электрический ток, то эта э. д. с. совершает работу на поддержание тока в цепи. Эта работа совершается внутри источника э. д. с. за счет энергии какого-либо вида, в электрическом генераторе — за счет механической работы двигателя, приводящего во вращение генератор, в гальванических элементах и аккумуляторах — за счет электрохимической энергии, в термоэлементах — за счет тепловой энергии.

Для уяснения сущности величины, к которой принято относить понятие электродвижущая сила, рассмотрим в виде примера гальванический элемент (рис. 1-22). Тела A и B , подключенные к зажимам элемента, оказываются заряженными под действием э. д. с. элемента. Интеграл вектора \mathbf{E} по любому пути в диэлектрике между телами A и B равен разности потенциалов этих тел:

$$\int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A - U_B = u_{AB}.$$

Однако, если мы изберем путь интегрирования от тела A по соединительному проводнику к положительному электроду элемента, затем через электролит (путь n) к отрицательному электроду и, наконец, по соединительному проводнику к телу B , то мы должны признать, что вдоль этого пути интеграл равен нулю: $\int_{AnB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$.

Действительно, весь этот путь лежит целиком в проводящей среде. В металле проводимость обеспечивается наличием электронов про-

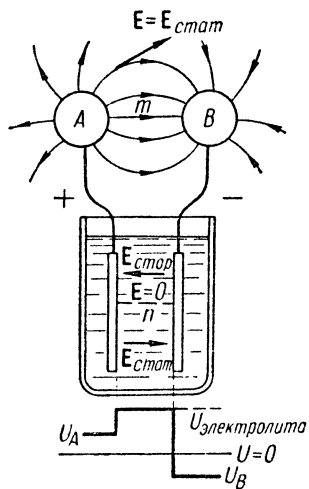


Рис. 1-22.

водимости, в электролите — наличием положительных и отрицательных ионов. Так как $\delta = 0$, то на всем этом пути $E = \rho\delta = 0$.

В тонких слоях у поверхностей электродов отсутствие результирующего электрического поля ($E = 0$) является результатом наложения внутри этих слоев на электрическое поле с напряженностью $E_{\text{стат}}$, образованного зарядами электродов и электролита, равного и противоположного ему *стороннего* электрического поля с напряженностью $E_{\text{стор}}$, имеющего неэлектростатическое происхождение, что можно записать следующим образом:

$$E = E_{\text{стат}} + E_{\text{стор}} = 0 \text{ или } E_{\text{стат}} = -E_{\text{стор}}.$$

Соответственно будем иметь:

$$\int_{AnB} E_{\text{стат}} dl = - \int_{AnB} E_{\text{стор}} dl = \int_{BnA} E_{\text{стор}} dl.$$

Величина

$$\int_{BnA} E_{\text{стор}} dl = e$$

и представляет собой э. д. с. гальванического элемента, стремящуюся внутри элемента обладающие зарядом частицы привести в движение против сил электростатического поля $E_{\text{стат}}$.

Обратим внимание на то, что э. д. с. *направлена внутри источника от отрицательного его зажима к положительному*. Природа этой электродвижущей силы заключается в том, что под действием давления растворения положительные ионы (атомы металла, лишённые электронов проводимости) стремятся выйти из электрода в электролит. Этому переходу противодействует осмотическое давление, которое испытывают положительные ионы металла со стороны электролита. Под действием разности этих давлений и происходит переход положительных ионов из электрода в электролит или в обратном направлении, в зависимости от того, с какой стороны давление преобладает. В итоге электрод оказывается заряженным, в первом случае отрицательно (избытком оставшихся в металле электронов проводимости), во втором случае положительно, а электролит приобретает заряд противоположного знака. Между электродом и электролитом устанавливается разность потенциалов и образуется электростатическое поле $E_{\text{стат}}$, препятствующее переходу ионов. Переход прекращается, когда разность давлений уравнивается силами электростатического поля.

Действие на ион механической силы f , обусловленной разностью давлений, эквивалентно наличию электрического поля напряженности $E_{\text{стор}} = f/q$, где q — заряд иона, что находится в полном соответствии с общим определением напряженности электрического поля. Таким образом, равновесное состояние наступает при условии:

$$E_{\text{стат}} + E_{\text{стор}} = E = 0.$$

На рис. 1-22 векторы $\mathbf{E}_{\text{стоп}}$ и $\mathbf{E}_{\text{стат}}$ условно изображены в пространстве между электродами в области, занятой электролитом, хотя, как ясно из изложенного, они отличны от нуля только в тонких слоях между электродами и электролитом.

Если электроды выполнены из разных материалов, то разности потенциалов между ними и электролитом будут, вообще говоря, различны, что приводит к появлению разности потенциалов между электродами. Это поясняется эпюрой распределения потенциала внизу на рис. 1-22.

Составляя линейный интеграл вектора \mathbf{E} по замкнутому контуру $AmBnA$, проходящему своей частью *внутри* источника э. д. с., получаем:

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_A - U_B,$$

так как $\int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$.

С другой стороны,

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{\text{стат}} d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l} = e,$$

так как

$$\oint \mathbf{E}_{\text{стат}} d\mathbf{l} = 0, \text{ а } \oint \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l} = \int_{BnA} \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l} = e.$$

Следовательно,

$$e = U_A - U_B,$$

т. е. *электродвижущая сила элемента равна разности потенциалов, или, что в данном случае одно и то же, напряжению на его зажимах при разомкнутой внешней цепи* (при отсутствии тока в цепи).

Из сказанного видно, что условие $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ справедливо только в области пространства вне источников э. д. с.

В примере гальванического элемента при отсутствии тока результирующее поле (при макроскопическом рассмотрении явления) внутри элемента всюду отсутствует, что является следствием действия неэлектростатических, в данном случае электрохимических, причин. Соответственно напряжение вдоль пути BnA внутри элемента при отсутствии тока равно нулю.

Введение понятия стороннего электрического поля как составляющей результирующего поля и, соответственно, понятия э. д. с. $e = \oint \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l}$ имеет смысл в том отношении, что именно величиной этой э. д. с. определяется работа на перенесение обладающих зарядами элементарных частиц, связанная с электрохимическими процессами. Следовательно, именно э. д. с. характеризует при прохождении тока преобразование энергии внутри элемента. В связи

с этим, говоря об источниках э. д. с., мы будем употреблять также термин источник энергии.

Весьма важным обстоятельством является то, что э. д. с. элемента почти не зависит от электрического тока в его цепи.

Электродвижущие силы возникают также при соприкосновении разнородных металлов. В этом случае возникновение э. д. с., называемых контактными э. д. с., связано с переходом электронов проводимости в месте контакта от одного металла в другой и образованием вследствие этого в одном металле избыточного положительного, в другом — избыточного отрицательного электрического заряда. Этот переход электронов может рассматриваться как результат действия в месте контакта стороннего электрического поля, имеющего неэлектростатический характер. Появление на соприкасающихся металлах зарядов разных знаков приводит к возникновению так называемой контактной разности потенциалов, равной при отсутствии тока контактной э. д. с. Контактная э. д. с. зависит от рода соприкасающихся металлов и от температуры.

Последнее обстоятельство используется в так называемых термоэлементах. Если составить замкнутую цепь из двух разнородных проводников, то при различной температуре t и t_0 двух мест спаев этих проводников контактные э. д. с. в местах спаев будут различными и не будут взаимно компенсироваться вдоль цепи. В итоге в замкнутой цепи будет действовать результирующая э. д. с., называемая термоэлектродвижущей силой. В величину термоэлектродвижущей силы войдут также еще дополнительные э. д. с., которые возникают вдоль каждого из двух однородных проводников вследствие того, что один конец их находится в среде более высокой температуры, чем другой. Эти дополнительные э. д. с. являются результатом некоторого перехода электронов проводимости от более нагретого конца проводника к менее нагретому вследствие того, что интенсивность теплового движения электронов возрастает с увеличением температуры.

В термоэлементе действие э. д. с. при прохождении тока связано с преобразованием тепловой энергии в энергию электромагнитную. Обычно применяемые термопары имеют э. д. с. порядка нескольких милливольт или десятых милливольт при температурах холодного и горячего спаев соответственно 0° и 100° С.

В следующих параграфах понятие «электродвижущая сила» будет расширено включением в него э. д. с., индуцируемых при изменении во времени магнитного потока, и тогда будет дано общее определение этого важного понятия.

Обратим особое внимание на то, что э. д. с., как уже было сказано, направлена *внутри* источника энергии от отрицательного зажима к положительному ($e = \int_{ВнА} \mathbf{E}_{\text{стоп}} d\mathbf{l}$), а напряжение на

его зажимах B и A берется по пути *вне* источника от положительного зажима к отрицательному

$$u_{AB} = U_A - U_B = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} dl.$$

1-9. Магнитный поток. Принцип непрерывности магнитного потока

Поток вектора магнитной индукции сквозь некоторую поверхность s (рис. 1-23) называют кратко **магнитным потоком** сквозь эту поверхность и обозначают через Φ . Имеем:

$$\Phi = \int_s B \cos \beta ds = \int_s \mathbf{B} ds.$$

Магнитная индукция является плотностью магнитного потока в данной точке поля. Действительно, проведя поверхность нормально к вектору \mathbf{B} , будем иметь: $\cos \beta = 1$; $d\Phi = B ds$; $B = d\Phi/ds$.

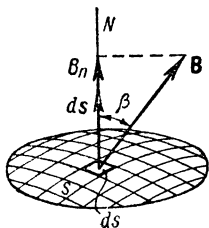


Рис. 1-23.

Единицей магнитного потока в системе единиц МКСА является *вебер* (1 *вб*). Единицей магнитной индукции в этой системе является *тесла*, равная *веберу на квадратный метр* (1 *тл* = 1 *вб/м²*).

Линиями магнитной индукции называют линии, проведенные так, чтобы касательные к ним в каждой их точке совпадали по направлению с вектором \mathbf{B} . Эти линии снабжают стрелками, указывающими направление вектора \mathbf{B} .

Часть пространства, ограниченная трубчатой поверхностью, образованной совокупностью линий магнитной индукции, называется **трубкой магнитной индукции**. Можно себе представить все магнитное поле подразделенным на трубки магнитной индукции и условиться изображать каждую такую трубку одной линией магнитной индукции, совпадающей с осью трубки.

Трубки магнитной индукции, поток сквозь поперечное сечение которых равен единице, называют **единичными трубками** и. Соответственно, линии магнитной индукции, изображающие единичные трубки, называют **единичными линиями магнитной индукции**.

Принцип непрерывности магнитного потока, имеющий в теории электромагнитных явлений фундаментальное значение, гласит, что линии магнитной индукции нигде не имеют ни начала, ни конца — они всюду непрерывны.

Мы убеждаемся в справедливости этого важного принципа во всех без исключения случаях, когда магнитное поле существует

в воздухе или вообще в такой среде, в которой поле может быть непосредственно обследовано опытным путем. Так, например, линии магнитной индукции около прямолинейного провода с током являются окружностями, имеющими центры на оси провода (рис. 1-24). Направление линий связано с направлением тока правилом правого винта. На рис. 1-24 изображено нормальное сечение провода, причем ток уходит от наблюдателя, что показано косым крестом, изображающим хвост стрелки. В том случае, когда ток направлен на наблюдателя, ставят условную точку, изображающую острие стрелки.

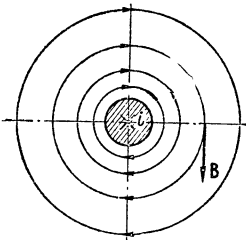


Рис. 1-24.

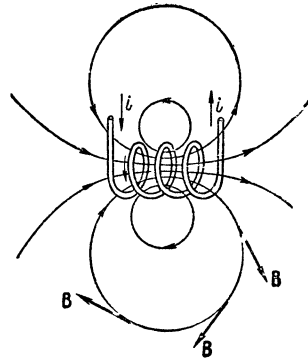


Рис. 1-25.

Как бы ни была сложна форма контура электрического тока, линии магнитной индукции, окружающие этот контур, всегда оказываются непрерывными. В виде примера можно указать поле соленоида с током, картина линий которого изображена на рис. 1-25.

Подлежит особому рассмотрению вопрос о непрерывности линий магнитной индукции в том случае, когда в магнитном поле расположены твердые тела и мы лишены возможности непосредственно обследовать поле внутри этих тел. Так, например, поле постоянного магнита изучить непосредственно опытным путем возможно только в пространстве вне магнита. Поэтому необходимо установить на основе каких-либо дополнительных фактов или каких-либо соображений, продолжают ли линии магнитной индукции и внутри тела самого магнита. Действительно, существование поля вне магнита можно было бы объяснить наличием на поверхности полюсов магнита особых источников магнитного потока, называемых *магнитными массами*. Согласно такому представлению, на северном полюсе магнита, где, нам кажется, начинаются линии магнитной индукции, должна быть расположена положительная магнитная масса, и на южном, где линии кончаются, — отрицательная магнитная масса. Такое представление о природе магнитных

явлений и сложилось исторически до эпохи, началом которой явилось открытие магнитного поля электрических токов.

Если бы поле создавалось магнитными массами (m), то поле внутри магнита должно было бы выглядеть так, как это изображено на рис. 1-26 — линии магнитной индукции внутри магнита, так же, как и вне его, оказались бы направленными от северного полюса к южному.

В настоящее время намагниченность магнита, или вообще намагниченность тела, мы объясняем существованием элементарных токов

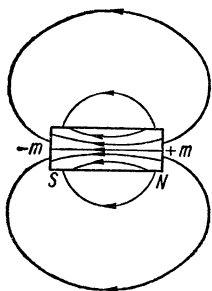


Рис. 1-26.

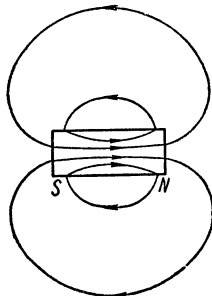


Рис. 1-27.

внутри вещества тела, являющихся результатом движения электронов по орбитам в атомах, а также существованием магнитных моментов элементарных частиц. Хотя внутреннее строение элементарных частиц и соответственно природа их магнитных моментов в настоящее время еще не изучены, но можно высказать предположение, что и магнитные моменты элементарных частиц являются результатом

внутреннего движения в этих частицах, имеющего характер электрических токов.

Исходя из этих представлений, мы приходим к заключению, что внутри магнита линии магнитной индукции должны идти так же, как в соленоиде (рис. 1-25), — они должны представлять собой продолжение линий, расположенных вне магнита. Такая правильная картина поля изображена на рис. 1-27.

Эти соображения приводят к выводу, что магнитных масс в действительности не существует. Такой вывод подтверждается опытом с ломанием магнита. На какие бы мелкие части мы ни дробили магнит, никогда невозможно получить такие его части, на которых наблюдалось бы наличие избытка магнитной массы одного знака.

Все эти соображения остаются в силе по отношению к любому телу, через которое проходит магнитный поток.

Итак, *магнитное поле всегда связано с электрическим током. Во всех без исключения случаях линии магнитной индукции непрерывны.*

Математически принцип непрерывности магнитного потока формулируется следующим образом:

$$\oint_s \mathbf{B} ds = 0,$$

т. е. магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.

Применяя уравнение $\oint_s \mathbf{B} \, ds = 0$ к поверхности произвольного отрезка трубки магнитной индукции (рис. 1-28), нетрудно убедиться, что поток, входящий сквозь сечение s_1 трубки, равен потоку, выходящему через сечение s_2 . Следовательно, поток сквозь различные поперечные сечения трубки имеет одно и то же значение.

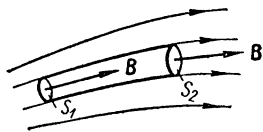


Рис. 1-28.

1-10. Закон электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции открыто в 1831 г. Фарадеем, который в итоге серии опытных исследований установил основной закон, характеризующий количественно это явление.

Рассмотрим замкнутый контур $abcd$ из тонкого проводника, расположенный во внешнем магнитном поле (рис. 1-29). Пусть Φ магнитный поток сквозь поверхность s , ограниченную этим контуром. Предположим, что этот контур перемещается за время dt в магнитном поле так, что каждый его элемент $d\xi$ проходит путь $d\xi$, после чего контур занимает новое положение $a'b'c'd'a'$. Сквозь поверхность $[d\xi \cdot dl]$, описываемую элементом dl при его движении, проходит магнитный поток

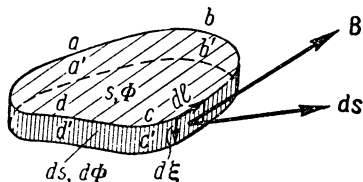


Рис. 1-29.

$$\mathbf{B} [d\xi \, dl] = - [d\xi \, \mathbf{B}] \, dl.$$

Магнитный поток $d\Phi$, проходящий через всю поверхность ds полоски, описываемую всем контуром $abcd$ при его перемещении, равен

$$d\Phi = - \oint_l [d\xi \, \mathbf{B}] \, dl, \quad (*)$$

где \oint_l означает интеграл по замкнутому контуру $abcd$.

Вместе с проводником переносятся находящиеся в нем свободные электрически заряженные частицы. При движении в магнитном поле со скоростью $\mathbf{v} = d\xi/dt$ частицы с электрическим зарядом q , на нее действует со стороны магнитного поля механическая сила (§ 1-3):

$$\mathbf{f}_2 = q [\mathbf{v} \mathbf{B}] = q \left[\frac{d\xi}{dt} \mathbf{B} \right].$$

В соответствии со сказанным в § 1-3 наблюдатель, движущийся вместе с проводником, для которого частицы с зарядом q неподвижны, воспринимает эту силу, как результат действия на нее электрического поля с напряженностью

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}_2}{q} = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] = \left[\frac{d\xi}{dt} \mathbf{B} \right].$$

Назовем это электрическое поле индуктированным электрическим полем и будем обозначать его напряженность $\mathbf{E}_{\text{инд}}$. Интеграл величины $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ вдоль рассматриваемого нами контура равен

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = \oint_l [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{l} = \oint_l \left[\frac{d\xi}{dt} \mathbf{B} \right] d\mathbf{l}.$$

Если под $d\xi$ понимать путь, проходимый элементом $d\mathbf{l}$ за время dt , одинаковое для всех элементов контура, то величину dt можно вынести за знак интеграла, и будем иметь:

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = \frac{\oint_l [d\xi \mathbf{B}] d\mathbf{l}}{dt},$$

или согласно выражению (*):

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

В § 1-8 было высказано общее положение, что если линейный интеграл напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура не равен нулю, то в контуре действует э. д. с., равная этому интегралу. Таким образом, последнее равенство свидетельствует, что во всех случаях, когда магнитный поток Φ , проходящий сквозь поверхность, ограниченную некоторым контуром, изменяется во времени, в этом контуре индуктируется э. д. с., равная взятой со знаком минус скорости изменения этого потока:

$$e = \oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (**)$$

Это уравнение и выражает закон электромагнитной индукции в формулировке, данной Максвеллом.

Вывод был сделан в предположении, что контур $abcd$ движется во внешнем магнитном поле, т. е. движется по отношению к источникам этого магнитного поля — постоянным магнитам или проводникам с током, создающим это поле.

Однако в контуре $abcd$ индуктируется э. д. с. и в том случае, когда контур неподвижен и поток Φ изменяется вследствие движения источников магнитного поля постоянных магнитов или про-

водников с токами, или же вследствие изменения токов в проводниках, создающих это поле. Важно лишь, чтобы имело место относительное движение контура и внешнего магнитного поля, приводящего к изменению потока Φ . В общем случае поток Φ является функцией геометрических координат контура и времени, и можно написать:

$$e = \oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{l},$$

где составляющая $-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ определяется изменением магнитного поля во времени, т. е. изменением потока Φ в неподвижном контуре, а составляющая $\oint [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{l}$ определяется движением контура в магнитном поле. Соответственно и величина $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ представляет собой только одну составляющую напряженности $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ индуктированного электрического поля, определяемую движением элемента $d\mathbf{l}$ во внешнем поле со скоростью \mathbf{v} . Можно было бы определить всю величину $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ из аналогичной формулы:

$$\mathbf{E}_{\text{инд}} = [\mathbf{v}'\mathbf{B}],$$

но величина \mathbf{v}' здесь уже должна представлять не скорость \mathbf{v} элемента $d\mathbf{l}$ в рассматриваемой системе координат, а его скорость относительно магнитного поля.

Мы предполагали, что контур $abcd$ образован тонким проводником. Максвелл обобщил равенство (***) на случай контура, расположенного в любой среде. Мы также считаем это равенство справедливым для любого замкнутого контура, не обязательно образованного проводником. В общем случае этот контур может быть и воображаемым контуром, расположенным целиком в диэлектрике или частично в проводящей среде и частично в диэлектрике. Во всех без исключения случаях при изменении во времени магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную любым контуром, в последнем возникает э. д. с. В проводящей среде э. д. с. может вызвать токи проводимости, в диэлектрике переменная э. д. с. вызывает токи электрического смещения. При таком обобщении равенство (***) свидетельствует, что *при изменении во времени магнитного поля появляется в том же пространстве связанное с ним электрическое поле, причем электрическое напряжение вдоль любого замкнутого контура равно э. д. с., индуктируемой в этом контуре.*

По сути дела оба эти поля — магнитное и электрическое — являются при этом двумя сторонами единого электромагнитного поля.

Понимаемое в таком широком смысле уравнение (***) является одним из основных уравнений электромагнитного поля.

В случае контура, образованного проводником, в нем возникает под действием э. д. с. ток проводимости и этот ток создает вокруг контура свое магнитное поле. При этом Φ в выражении (***) является потоком, созданным внешними источниками и током i в самом контуре. Если в контуре нет других источников э. д. с., а именно, сторонних э. д. с., рассмотренных в § 1-8, то и для напряженности результирующего поля E имеем:

$$\oint E dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Величина $\oint E dl$ есть сумма падений напряжения вдоль всего замкнутого контура, равная току i в контуре, умноженному на электрическое сопротивление r контура. Следовательно, в этом случае

$$ir = -\frac{d\Phi}{dt}$$

или $idtr = -d\Phi$, $rdq = -d\Phi$, т. е. $dq = -\frac{d\Phi}{r}$.

Для конечного изменения потока на величину $\Delta\Phi$ получаем:

$$\Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{r}.$$

В этой форме закон электромагнитной индукции и был установлен экспериментально Фарадеем.

Приведенные формулировки содержат изменение потока Φ сквозь поверхность s , ограниченную контуром, в котором индуктируется э. д. с. Так как конечная незамкнутая поверхность ограничивается всегда замкнутым контуром, то только по отношению к замкнутым контурам, но отнюдь не к их отрезкам, применимы вышеприведенные формулировки.

Линии магнитной индукции всюду непрерывны. Поэтому линия магнитной индукции может войти внутрь контура индуктированного тока или выйти из него, только перерезав где-либо этот контур. Таким образом, изменение $\Delta\Phi$ потока, охватываемого контуром, должно равняться числу единичных линий магнитной индукции ΔN , перерезанных контуром $\Delta\Phi = \Delta N$ и также $d\Phi = dN$.

Закон электромагнитной индукции может быть представлен теперь в формах:

$$\Delta q = -\frac{\Delta N}{r} \quad \text{и} \quad e = -\frac{dN}{dt},$$

т. е. *электродвижущая сила, индуктируемая в контуре, равна скорости пересечения контура единичными линиями магнитной индукции, взятой с обратным знаком.*

Эту формулировку закона электромагнитной индукции мы будем называть фарадеевой формулировкой, так как она связана с основной идеей Фарадея о пересечении проводника магнитными линиями.

В применении к замкнутым контурам формулировки Максвелла и Фарадея тождественны, и для э. д. с., возникающей в замкнутом контуре, всегда можно написать:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{dN}{dt}.$$

Однако, если максвеллово выражение для индуцированной э. д. с. по своему существу может быть применено только к замкнутым контурам, то фарадеево выражение для э. д. с., в котором все внимание обращается на акт пересечения контура единичными линиями магнитной индукции, может быть применено и к отрезкам контура. В этом отношении последнее выражение оказывается более универсальным.

Пусть отрезок проводника $d\mathbf{l}$ движется с произвольно направленной скоростью \mathbf{v} в общем случае в неоднородном неизменном во времени магнитном поле. Пусть \mathbf{B} есть вектор магнитной индукции в месте расположения отрезка $d\mathbf{l}$ в данный момент времени (рис. 1-30). Э. д. с., индуцируемая на отрезке $d\mathbf{l}$, равна:

$$de = \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = [\mathbf{vB}] d\mathbf{l}.$$

В данном частном случае, когда прямолинейный проводник длиной l движется со скоростью v в однородном магнитном поле так, что направления величин l , B и v взаимно перпендикулярны, получаем для величины индуцируемой в отрезке l э. д. с. выражение:

$$e = vBl.$$

Направление э. д. с. можно определить, пользуясь правилом правой руки. Если большой, указательный и средний пальцы правой руки расположить взаимно перпендикулярно и так, чтобы большой палец был направлен в сторону движения, а указательный в сторону поля, то средний палец будет указывать направление э. д. с. Это правило легко запоминается, если обратить внимание на то, что порядок пальцев на руке: большой, указательный, средний соответствует порядку по алфавиту начальных букв слов: движение, поле, э. д. с., или: движение, поле, ток.

1-11. Потокосцепление. Э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции. Принцип электромагнитной инерции

Магнитный поток Φ сквозь поверхность s , ограниченную контуром, например, контуром проводящей цепи, равен поверхностному интегралу вектора магнитной индукции, распространенному

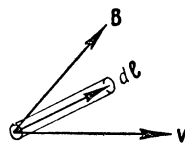


Рис. 1-30.

по поверхности s : $\Phi = \int_s \mathbf{B} ds$. Это выражение справедливо для любой поверхности, ограниченной сколь угодно сложным контуром. В общем случае такая поверхность может иметь весьма сложную форму. Так, на рис. 1-31 штриховкой показана поверхность, натянутая на контур, расположенный по винтовой линии и образующий катушку из трех витков. Отдельные линии магнитной индукции пронизывают эту поверхность несколько раз: линии 4, 5, 6, 7 и 8 — три раза, линия 3 — два раза.

Оказывается целесообразным в таких сложных случаях ввести понятие о потокосцеплении Ψ . Термин «потокосцепление» необходимо ввести в связи с тем, что

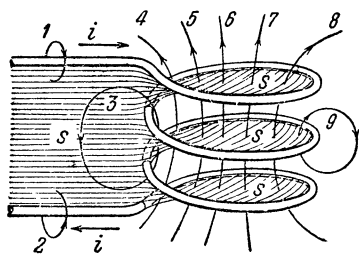


Рис. 1-31.

отдельные линии магнитной индукции несколько раз сцепляются со всей цепью. Величину Ψ можно получить, умножая поток каждой единичной линии магнитной индукции на число витков цепи, с которыми она сцепляется, и складывая полученные числа. Сложение следует производить алгебраически, причем положительными следует считать линии магнитной

индукции, направление которых связано с положительным направлением тока в контуре электрической цепи правилом правого винта.

Ясно, что э. д. с., индуктируемая во всей цепи, определяется потокосцеплением Ψ . Действительно, при уменьшении потока до нуля каждая линия магнитной индукции столько раз пересечет контур тока, сколько раз она с ним сцепляется. Поэтому должно иметь место равенство:

$$e = - \frac{dN}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt}.$$

Потоки, сцепляющиеся с отдельными витками катушки, вообще говоря, различны. Поэтому различны и э. д. с., индуктируемые в отдельных витках. В ряде случаев приближенно можно считать, что все линии магнитной индукции сцепляются со всеми ω витками катушки. Тогда потокосцепление катушки связывается с потоком Φ в одном витке простым соотношением: $\Psi = \omega\Phi$. В таком случае э. д. с., индуктируемая в катушке, равна:

$$e = - \frac{d\Psi}{dt} = - \omega \frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким упрощенным расчетом обычно можно пользоваться при вычислении э. д. с., индуктируемых в катушках с замкнутыми сердечниками из ферромагнитных материалов.

В простейшем случае одного контура с электрическим током магнитный поток, сцепляющийся с этим контуром, определяется током i , протекающим в этом же контуре. Такой поток называют потоком самоиндукции. Потокосцепление самоиндукции некоторого электрического контура или, что то же, некоторой неразветвленной электрической цепи обозначают Ψ_L . Мы можем представить его в виде:

$$\Psi_L = Li.$$

Величину L называют собственной индуктивностью или просто индуктивностью контура. Индуктивность зависит от геометрических величин g , определяющих размеры и форму контура, а также от абсолютной магнитной проницаемости μ среды, в которой существует магнитное поле: $L = F(g, \mu)$. В случае однородной среды с $\mu = \text{const}$ имеем $L = \mu f(g)$.

При изменении потока самоиндукции в контуре возникает электродвижущая сила самоиндукции. Изменение потока Ψ_L может происходить как вследствие изменения тока, так и вследствие изменения индуктивности. Поэтому в общем случае э. д. с. самоиндукции e_L может быть представлена в виде суммы двух членов:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}.$$

При $L = \text{const}$ имеем:

$$e_L = -L\frac{di}{dt}.$$

В случае двух или нескольких контуров с токами магнитный поток, сцепляющийся с одним из этих контуров, вообще говоря, определяется токами во всех контурах. Рассмотрим два контура и предположим, что ток протекает только в первом из них (рис. 1-32). Может оказаться, что часть линий магнитной индукции потока самоиндукции первого контура сцепляется также и со вторым контуром. При этом поток, сцепляющийся со вторым контуром и определяемый током в первом контуре, называют потоком взаимной индукции. Потокосцепление взаимной индукции со вторым контуром мы будем обозначать Ψ_{2M} или Ψ_{21} . Первый индекс всегда будет указывать, с какой

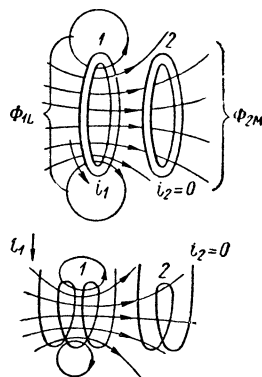


Рис. 1-32.

цепью рассматривается сцепление потока. Второй индекс (M или 1) указывает, что поток определяется током, протекающим в другой, в данном случае первой, цепи. Можно написать:

$$\Psi_{2M} = M_{21}i_1.$$

Величину M_{21} называют взаимной индуктивностью контуров. Она зависит от геометрических величин g , определяющих размеры и формы контуров и их взаимное расположение, а также от абсолютной магнитной проницаемости μ среды: $M = F(g, \mu)$. Если $\mu = \text{const}$, то $M = \mu f(g)$.

При изменении потока взаимной индукции, сцепляющегося со вторым контуром, в этом контуре возникает электродвижущая сила взаимной индукции. Поток Ψ_{2M} может изменяться либо вследствие изменения тока i_1 , либо вследствие изменения взаимной индуктивности M_{21} . Соответственно, э. д. с. взаимной индукции, возникающая во втором контуре, может быть представлена в виде

$$e_{2M} = -\frac{d\Psi_{2M}}{dt} = -\frac{d(M_{21}i_1)}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt} - i_1\frac{dM_{21}}{dt}.$$

Если $M_{21} = \text{const}$, то $e_{2M} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$.

Остановимся еще на общем характере индуцированных э. д. с. Знак «минус» в выражении для индуцированной э. д. с. свидетельствует о том, что эта э. д. с. стремится вызвать токи, направленные таким образом, чтобы воспрепятствовать изменению магнитного потока. Это положение выражает собой сформулированный Ленцем принцип электромагнитной инерции. В самом деле, предположим, что поток, сцепляющийся с контуром, убывает, т. е. $d\Psi < 0$. В таком случае имеем: $e = -\frac{d\Psi}{dt} > 0$, и, следовательно, возникающая в контуре э. д. с. стремится вызвать ток в положительном направлении и тем самым воспрепятствовать убыванию потока. Наоборот, если поток возрастает, то $d\Psi > 0$ и $e < 0$. В этом случае э. д. с. в контуре стремится вызвать ток в отрицательном направлении и этим воспрепятствовать увеличению потока. Мы видим, что индуцированные э. д. с. имеют характер сил инерции.

На основании сказанного мы можем сформулировать принцип электромагнитной инерции в отношении электромагнитных процессов, совершающихся в системе контуров с электрическими токами. Именно: *в системе контуров с электрическими токами существует тенденция к сохранению неизменными магнитных потоков, сцепляющихся с отдельными контурами системы. При всякой попытке изменить потоки, сцепляющиеся с контурами, в кон-*

турах возникают электродвижущие силы, стремящиеся воспрепятствовать этому изменению. В простейшем случае одного контура с током возникает э. д. с. самоиндукции, равная:

$$e = - \frac{d(Li)}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

В простейшем случае, который рассматривается в динамике, именно в случае движения свободной материальной точки, принцип инерции заключается в том, что свободной материальной точке свойственно сохранять свое количество движения. Если под действием внешних сил изменяется количество движения точки, то, вводя в рассмотрение силы инерции, равные и противоположные внешним силам, мы можем рассматривать эти силы инерции как

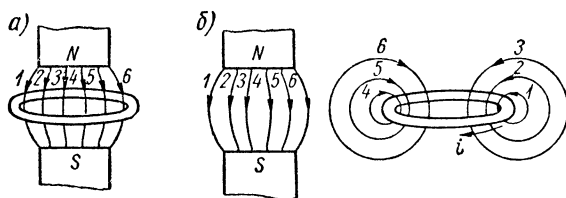


Рис. 1-33.

препятствующие изменению количества движения. Если направление силы совпадает с направлением скорости v , то сила инерции имеет выражение:

$$f = - \frac{d(mv)}{dt} = -m \frac{dv}{dt},$$

где m — масса материальной точки.

Мы видим, что магнитный поток можно рассматривать как количество движения в электромагнитном процессе, индуктивность контура — как коэффициент электромагнитной инерции, ток как электрическую скорость. Электрической координатой системы при этом является электрический заряд q , перенесенный через поперечное сечение контура от некоторого начального момента времени, так как $i = dq/dt$.

Силы инерции наиболее полно проявляются в системе, не имеющей трения. Соответственно и электромагнитная инерция выявляется наиболее полно в контурах, электрическое сопротивление которых равно нулю. Такую сверхпроводящую цепь можно осуществить на опыте. Явление сверхпроводимости заключается в том, что некоторые металлы, например свинец, олово, ртуть, при весьма низких температурах (порядка нескольких градусов Кельвина) имеют удельное сопротивление, практически равное нулю.

Положим, что свинцовое кольцо внесено во внешнее магнитное поле (рис. 1-33) и заморожено, т. е. сделано сверхпроводящим.

Пусть при этом с кольцом сцепляется внешний поток $\Psi_M = \Psi_0$. Будем теперь выносить кольцо из внешнего поля. В кольце возникает внешняя э. д. с. $e_M = -\frac{d\Psi_M}{dt}$, под действием которой в контуре кольца появляется ток i и образуется поток самоиндукции Ψ_L . Сумма внешней э. д. с. и э. д. с. самоиндукции должна быть равна падению напряжения ir в контуре. Так как $r = 0$, то получаем:

$$-\frac{d\Psi_M}{dt} - \frac{d\Psi_L}{dt} = 0,$$

откуда следует, что

$$\Psi_M + \Psi_L = \text{const.}$$

В начальном положении контура $\Psi_M = \Psi_0$ и $\Psi_L = 0$ (рис. 1-33, а). Следовательно, $\Psi_M + \Psi_L = \Psi_0$. Когда контур будет вынесен за пределы внешнего поля (рис. 1-33, б), будем иметь: $\Psi_M = 0$ и $\Psi_L = Li = \Psi_0$.

Мы видим, что при $r = 0$ электромагнитная инерция проявляется в полной мере — результирующее потокосцепление остается постоянным и лишь совершается преобразование внешнего потока в поток самоиндукции.

1-12. Потенциальное и вихревое электрические поля

Вернемся к основным определениям терминов: «электродвижущая сила», «электрическое напряжение» и «разность электрических потенциалов», чтобы ясно себе представить, в каких случаях можно пользоваться тем или иным из этих терминов.

Э. д. с., действующая вдоль некоторого пути, равна линейному интегралу вдоль этого пути напряженности стороннего электрического поля, а также электрического поля, индуктированного изменяющимся магнитным полем. Появление э. д. с. может быть обусловлено различными причинами. Если в электрической цепи содержатся участки с электролитической проводимостью, то э. д. с. может возникать вследствие электрохимических процессов. В месте контакта двух проводников из различных металлов возникает контактная э. д. с. При изменении магнитного потока в контурах, расположенных в любой среде, возникают э. д. с. индукции.

Понятие «электрическое напряжение» или «падение напряжения» связано с результирующим электрическим полем. *Электрическое напряжение вдоль некоторого пути от точки А до точки В равно линейному интегралу напряженности результирующего электрического поля (электростатического, стационарного, стороннего, индуктированного) вдоль этого пути.*

Необходимо подчеркнуть, что напряжение между двумя точками A и B (рис. 1-34) при переменном магнитном поле зависит от выбора пути, по которому мы составляем линейный интеграл напряженности электрического поля от точки A к точке B . Действительно, для замкнутого контура $AmBnA$ в переменном магнитном поле имеем:

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Следовательно,

$$\int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AnB} \mathbf{E} d\mathbf{l} - \frac{d\Phi}{dt}.$$

В виде примера рассмотрим цепь переменного тока (рис. 1-35). Магнитное поле, окружающее проводники такой цепи, изменяется

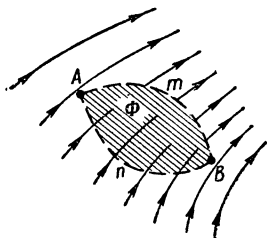


Рис. 1-34

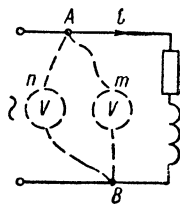


Рис. 1-35.

во времени. Поэтому в контурах, которые мы можем себе представить мысленно в диэлектрике, индуцируются электродвижущие силы. Вследствие этого напряжение между точками A и B цепи *зависит от выбора пути* от точки A к точке B . И действительно, показание вольтметра в этом случае в принципе зависит от положения вольтметра и соединительных проводников по отношению к контуру цепи. Отсюда ясно, что по отношению к цепям переменного тока, если поступать строго, нельзя говорить о напряжении между двумя точками цепи или о напряжении на зажимах цепи, не делая оговорок, вдоль какого пути определяется напряжение. Однако мы часто пользуемся выражением «напряжение на зажимах цепи переменного тока» без всяких оговорок, так как указанная неопределенность в обычных цепях при низких частотах и не слишком больших токах практически незначительна, если, конечно, не выбирать путей интегрирования в местах, где переменные магнитные поля особенно сильны. Эта неопределенность становится практически ощутимой при очень высоких частотах и при весьма

больших токах в цепи. В таких случаях возможно говорить только о напряжении между двумя точками цепи вдоль определенного заданного пути.

Как ранее было показано, линейный интеграл напряженности электрического поля совершенно не зависит от выбора пути между точками A и B в электростатическом поле и электрическом поле постоянных токов, протекающих в неподвижных проводниках, если путь интегрирования не проходит через источники э. д. с. В таких полях э. д. с. в любом замкнутом контуре, не проходящем через источники э. д. с., равна нулю. Такие поля могут быть полностью охарактеризованы скалярным электрическим потенциалом, т. е. являются потенциальными полями. По отношению к ним применим термин «разность потенциалов в точках A и B ».

Таким образом, понятие «разность потенциалов», применимое только к потенциальным полям, или, соответственно, к потенциальным составляющим результирующего поля, имеет более узкий смысл, чем понятие «напряжение», применимое к любым электрическим полям.

Разность электрических потенциалов двух точек равна линейному интегралу напряженности потенциального (электростатического и стационарного) электрического поля от одной данной точки до другой.

В случае потенциального поля понятия «напряжение между точками A и B » и «разность потенциалов в точках A и B » по существу совпадают.

Рассмотрим несколько подробнее только что высказанные общие положения на конкретном примере цепи, изображенной на рис. 1-35.

Если бы ток в этой цепи был постоянным, то электрическое поле было бы стационарным и потенциальным, т. е. при этом можно было бы написать:

$$E = E_{\text{стат}} \text{ или } E = E_{\text{пот.}}$$

Это электрическое поле связано с зарядами на поверхности проводов и в данном случае является результатом наличия падения напряжения в соприкосновении цепи.

Электрическое напряжение между точками A и B в этом случае, как только что было отмечено, не зависит от выбора пути, и напряжение вдоль любого замкнутого контура равно нулю: $\oint E dl = 0$. Последнее согласуется с тем, что э. д. с. в любом заданном контуре $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ в таком поле равна нулю, так как $\Phi = \text{const.}$

Если ток в проводах цепи станет изменяться во времени, то физически это поведет к изменению электромагнитного поля около проводов. В этом переменном поле напряжение между точками A и B в каждый момент времени зависит от выбора пути между точками

A и *B*. При этом формально можно результирующее электрическое поле рассматривать как наложение двух полей — стационарного (*потенциального*) электрического поля, так же как при постоянном токе, связанного с зарядами на поверхности проводов, и индуцированного (так называемого в и х р е в о г о) электрического поля, вызванного изменяющимся магнитным полем, и соответственно иметь:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{стац}} + \mathbf{E}_{\text{инд}} \text{ или } \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{пот}} + \mathbf{E}_{\text{вихр}}.$$

Для стационарного (потенциального) поля для любого замкнутого контура имеем:

$$\oint \mathbf{E}_{\text{стац}} d\mathbf{l} = 0.$$

Для индуцированного (вихревого) поля, соответственно, имеем:

$$\oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$$

и для результирующего поля получаем:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E}_{\text{стац}} + \mathbf{E}_{\text{инд}}) d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0.$$

При принятом определении понятия «электродвижущая сила» только величина $\oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l}$ рассматривается как электродвижущая сила. Ее можно представить как сумму э. д. с. на отдельных участках контура, например (рис. 1-35) в виде

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l}.$$

Пользуясь принятыми определениями понятий «напряжение» и «электродвижущая сила», имеем для замкнутого контура:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l}, \quad (*)$$

т. е. *напряжение вдоль замкнутого контура равно э. д. с., индуцируемой в этом контуре*. Это получается всегда, так как $\oint \mathbf{E}_{\text{стац}} d\mathbf{l} = 0$. Для отдельных же участков контура напряжение и э. д. с. на участке не равны друг другу, например:

$$u_{AmB} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}_{\text{стац}} d\mathbf{l} + \int_{AmB} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} \neq \int_{AmB} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l},$$

так как

$$\int_{AmB} \mathbf{E}_{\text{стац}} d\mathbf{l} \neq 0.$$

Если рассматривать некоторый замкнутый контур электрической цепи, то в нем, помимо э. д. с. $e_{\text{инд}}$, индуктируемых изменяющимся во времени магнитным потоком, могут еще действовать сторонние э. д. с. $e_{\text{стор}}$, например, электрохимического или контактного происхождения. При этом вместо уравнения (*) будем иметь:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{\text{стор}} d\mathbf{l}.$$

1-13. Связь магнитного поля с электрическим током

Магнитное поле во всех без исключения случаях связано с электрическим током. Электрический ток и его магнитное поле всегда существуют одновременно и, по сути дела, являются лишь разными характеристиками единого физического процесса. В настоящем параграфе мы поставим перед собой задачу установить связь между ними.

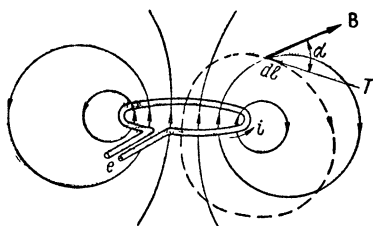


Рис. 1-36.

Рассмотрим произвольной формы проводящий контур, по которому протекает электрический ток i (рис. 1-36). Вокруг него существует магнитное поле. Предположим, что контур находится в пустоте.

Составим линейный интеграл магнитной индукции вдоль некоторого замкнутого контура, охватывающего контур с током и изображенного на рисунке пунктиром. Назовем этот контур контуром интегрирования. Опыт показывает, что независимо от формы контура интегрирования интеграл магнитной индукции вдоль него пропорционален току, охватываемому этим контуром, т. е. имеет место равенство:

$$\oint B \cos \alpha dl = \oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i.$$

Величину μ_0 мы назовем магнитной постоянной. Она имеет физическую размерность, связанную с размерностью электрической постоянной ϵ_0 . Действительно, левая часть равенства имеет следующую размерность:

$$[Bl] = \left[\frac{\Phi}{l} \right] = \left[\frac{ut}{l} \right] = [Et] = \left[\frac{qt}{\epsilon_0 l^2} \right].$$

Учитывая размерность электрического тока $[i] = \left[\frac{q}{t} \right]$, получаем размерность магнитной постоянной:

$$[\mu_0] = \left[\frac{t^2}{\epsilon_0 l^2} \right] = \left[\frac{1}{\epsilon_0 v^2} \right].$$

Следовательно, размерность μ_0 равна размерности величины, обратной произведению электрической постоянной ϵ_0 на квадрат скорости. Числовое значение величины μ_0 зависит от выбора системы единиц измерения.

Единицей магнитной постоянной в системе единиц МКСА является *генри на метр* (1 *гн/м*). Действительно, из приведенной связи между интегралом магнитной индукции по замкнутому контуру и током i видно, что единицей μ_0 в системе единиц МКСА является $1 \text{ тл} \frac{\text{м}}{\text{а}} = 1 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{м}}{\text{а}} = 1 \frac{\text{вб}}{\text{а} \cdot \text{м}}$. Но 1 *вб/а* есть единица индуктивности 1 *генри*. В этой системе единиц при рациональной форме уравнений магнитная постоянная имеет значение

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ гн/м.}$$

Справедливость равенства

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 i$$

может быть проверена следующим опытом.

Возьмем тонкую гибкую ленту из изолирующего материала. Обовьем эту ленту равномерно по всей ее длине тонкой проволокой (рис. 1-37). Пусть ω_1 — число витков обмотки на единицу длины ленты, s — сечение ленты, нормальное к ее оси, и dl — элемент длины ленты. Магнитный поток сквозь сечение ленты равен: $\Phi = \int_s \mathbf{B} ds$.

Ввиду малости сечения ленты можно считать в пределах каждого сечения в отдельности поле однородным, т. е. при вычислении потока считать индукцию постоянной. Следовательно, $\Phi = B \cos \beta s$, где β — угол между нормалью к сечению s и направлением вектора \mathbf{B} . Но нормаль к сечению совпадает по направлению с dl . Следовательно, угол β равен углу α между направлением вектора \mathbf{B} и касательной T к оси ленты. Итак, поток, пронизывающий один виток обмотки, равен:

$$\Phi = B \cos \alpha s.$$

Потокоцепление с витками на отрезке dl ленты имеет значение:

$$d\Psi = \Phi \omega_1 dl = B \cos \alpha s \omega_1 dl.$$

Потокоцепление со всеми витками обмотки ленты на всей ее длине равно:

$$\Psi = s \omega_1 \oint B \cos \alpha dl.$$

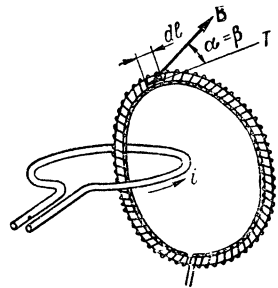


Рис. 1-37.

Таким образом, измеряя потокосцепление Ψ и зная величины s и ω_1 , мы получаем возможность измерить интеграл $\oint B \cos \alpha dl$ вдоль оси ленты. Описанную ленту для краткости мы будем называть магнитным поясом. Потокосцепление Ψ при постоянном токе i можно измерить с помощью баллистического гальванометра, выключая ток или размыкая ленту и быстро удаляя ее за пределы поля. При переменном токе амплитуду потока можно определить, измеряя амплитуду э. д. с., индуктируемой в обмотке ленты.

Производя опыты с магнитным поясом, мы убеждаемся, что интеграл $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$ по замкнутому контуру, охватывающему контур с током i , не зависит от формы контура интегрирования и пропорционален току i . Заметим при этом, что если положительное направление обхода контура интегрирования связано с положительным направлением тока i правилом правого винта, то $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$ и i получаются одного знака. Если контур интегрирования не охватывает тока, то интеграл $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$ вдоль него равен нулю, независимо от формы контура интегрирования.

Соотношение $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i$ выражает неразрывную связь магнитного поля и тока. Действительно, если совместить в магнитном поле контур интегрирования с любой линией магнитной индукции, которые всегда замкнуты, и выбрать направление обхода вдоль контура интегрирования в направлении вектора \mathbf{B} , то будем иметь $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} > 0$ и, следовательно, $i > 0$. Таким образом, каждая линия магнитной индукции обязательно охватывает собой электрический ток. Соответственно, электрический ток всегда окружен магнитным полем.

Магнитное поле является основным признаком существования электрического тока. О существовании электрического тока мы можем, вообще говоря, судить по различным признакам, например, по тепловому или по электрохимическому действию тока. Однако эти проявления тока имеют место лишь при надлежащих условиях, магнитное же поле неизменно сопутствует электрическому току. В отдельных случаях мы можем судить о наличии электрического тока только по его магнитному полю. Таким случаем является ток в сверхпроводящем контуре, протекающий без сколь-нибудь заметного выделения тепла.

Обобщим соотношение $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 i$ на случай более сложных контуров. Пусть имеется несколько контуров с электрическими токами, которые охватываются контуром интегрирования (рис. 1-38). Всегда можно при помощи дополнительных линий разделить этот контур на несколько контуров, охватывающих каждый только

один ток. Так, изображенный на рис. 1-38 контур $ambncpa$, охватывающий три тока, можно линиями ad , bd и cd разделить на контуры $ambda$, $bncdb$ и $cpadc$, охватывающие каждый по одному току. Имеем:

$$\oint_{ambda} \mathbf{B}dl = \mu_0 i_1; \quad \oint_{bncdb} \mathbf{B}dl = \mu_0 i_2; \quad \oint_{cpadc} \mathbf{B}dl = \mu_0 i_3.$$

Сложим эти равенства. При этом составляющие интегралов вдоль линий ad , bd и cd попарно скомпенсируются и в левой части останется интеграл вдоль контура $ambncpa$. Получаем

$$\oint_{ambncpa} \mathbf{B}dl = \mu_0 (i_1 + i_2 + i_3).$$

Правая часть уравнения представляет собой сумму всех токов, проходящих сквозь поверхность, ограниченную контуром интегри-

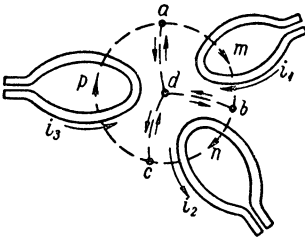


Рис. 1-38.

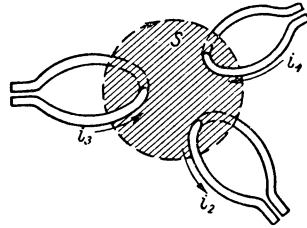


Рис. 1-39.

рования. На рис. 1-39 эта поверхность заштрихована и обозначена через s . Положительными мы должны считать токи, направленные в сторону поступательного движения правого винта, головка которого вращается в направлении выбранного положительного обхода контура интегрирования, так как при этом направление линий магнитной индукции поля тока совпадает с положительным направлением обхода контура интегрирования. В случае, изображенном на рис. 1-39, токи i_1 и i_3 положительны, а ток i_2 отрицателен.

Может оказаться, что условные положительные направления токов в электрических контурах заданы независимо от выбора положительного направления обхода контура интегрирования. В этом случае в правой части перед алгебраическим выражением каждого тока должен быть поставлен знак плюс или минус в зависимости от того, соответствуют или не соответствуют правилу правого винта условные положительные направления тока и обхода контура интегрирования.

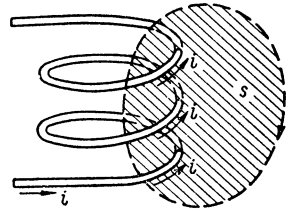


Рис. 1-40.

Рассмотрим важный частный случай, когда имеется катушка, состоящая из ω витков, по которым протекает ток i , и контур интегрирования охватывает все витки катушки (рис. 1-40). Сумма токов, проходящих сквозь поверхность s , ограниченную контуром интегрирования, при этом равна ωi . Следовательно,

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \omega i.$$

1-14. Намагниченность вещества и напряженность магнитного поля

В предыдущем параграфе был рассмотрен случай, когда магнитное поле контуров с токами существует в пустоте. Опыт показывает, что если те же контуры с теми же токами окружить веществом или хотя бы в части пространства около них расположить тела из того или иного вещества, то магнитное поле в большей или меньшей мере изменяется. Это изменение поля является следствием возникновения в самом веществе под действием внешнего магнитного поля определенной ориентации элементарных внутримолекулярных и внутриаиомных электрических токов.

Элементарные токи существуют внутри всякого вещества и при отсутствии внешнего поля. Мы представляем себе эти токи как движение электронов по орбитам внутри атомов вещества и как вращение электронов вокруг своих осей. К понятию «элементарный электрический ток» мы здесь относим и то еще не изученное внутреннее движение в элементарных частицах, которое приводит к появлению магнитных моментов этих частиц, о чем будет сказано в конце этого параграфа. Если элементарные токи внутри вещества ориентированы хаотически, то при макроскопическом рассмотрении явления они не создают магнитного поля. Однако если под действием внешнего поля, в которое вносится вещество, появляется в известной мере согласованная ориентация элементарных токов, то они создают свое дополнительное магнитное поле, которое, налагаясь на внешнее поле, изменяет его.

Существуют вещества, в которых элементарные токи под действием внешнего поля располагаются так, что происходит усиление поля. К ним относятся так называемые парамагнитные и ферромагнитные вещества. Существует другая группа веществ, называемых диамагнитными, в которых под действием внешнего магнитного поля возникают такие дополнительные элементарные токи, которые ослабляют вызвавшее их поле.

Рассмотрим катушку с током i , имеющую ω витков, в которую внесено тело из какого-либо вещества (рис. 1-41).

Составим линейный интеграл магнитной индукции вдоль замкнутого контура $AmCnA$, охватывающего все витки катушки. Часть

AmC контура интегрирования расположена внутри тела и часть CnA — в пустоте.

Под действием магнитного поля, вызванного током i в катушке, тело намагничивается, т. е. элементарные токи в веществе тела ориентируются в известной мере между собой согласованно и создают свое магнитное поле. Сумма элементарных токов, охватывающих линию AmC , будет отличаться от нуля. Обозначим эту сумму через i' . Будем иметь:

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 w i + \mu_0 i'.$$

Пусть di' — сумма элементарных токов, охватывающих отрезок dl линии AmC . Величина di'/dl представляет собой охватывающий линию AmC элементарный ток, отнесенный к единице длины этой линии в данной ее точке M . Естественно, что величина di'/dl зависит от направления линии AmC , т. е. от направления отрезка dl в рассматриваемой точке M . При некотором определенном направлении, которое мы обозначим единичным вектором \mathbf{n}_0 , величина di'/dl имеет наибольшее значение. Обозначим отрезок dl в этом направлении через dn и введем векторную величину

$$\mathbf{J} = \frac{di'}{dn} \mathbf{n}_0,$$

которую назовем намагниченностью вещества.

Намагниченность вещества по величине численно равна сумме элементарных токов, охватывающих единицу длины линии, проведенной через данную точку в таком направлении, чтобы эта сумма была наибольшей. Направление вектора \mathbf{J} и есть такое направление. Оно связано с направлением элементарных токов правилом правого винта. Для произвольного направления отрезка dl имеем:

$$\frac{di'}{dl} = J \cos \alpha,$$

где α — угол между направлением вектора \mathbf{J} и положительным направлением касательной к линии AmC в рассматриваемой точке M . Таким образом, сумма элементарных токов, охватывающих всю линию AmC , имеет значение:

$$i' = \int_{AmC} \frac{di'}{dl} dl = \int_{AmC} J \cos \alpha dl = \int_{AmC} \mathbf{J} dl.$$

Так как на участке CnA замкнутого контура интегрирования (рис. 1-41) нет элементарных токов, то имеем:

$$\oint_{AmCnA} \mathbf{J} dl = \int_{AmC} \mathbf{J} dl = i'.$$

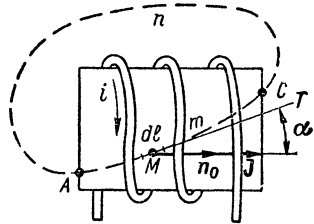


Рис. 1-41.

Итак, имеем:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \omega i + \mu_0 i' = \mu_0 \omega i + \mu_0 \oint \mathbf{J} d\mathbf{l}$$

или

$$\oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) d\mathbf{l} = \omega i.$$

Векторную величину, стоящую в скобках под знаком интеграла, обозначают \mathbf{H} и называют напряженностью магнитного поля. Имеем:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J},$$

откуда

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}).$$

В частном случае пустоты $\mathbf{J} = 0$ и $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Вводя обозначение \mathbf{H} в выражение под знаком интеграла, получаем:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \omega i.$$

Приведенное определение напряженности магнитного поля для общего случая ценно именно потому, что при этом интеграл напряженности магнитного поля вдоль любого *замкнутого* контура определяется *только макроскопическими токами*, протекающими в проводниках, охватываемых контуром интегрирования. Наличие элементарных токов в веществе *не влияет* на величину интеграла напряженности магнитного поля вдоль *замкнутого* контура.

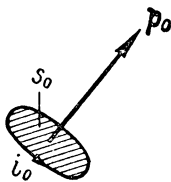


Рис. 1-42.

Определив напряженность во всех точках магнитного поля, можно провести ряд линий, обладающих тем свойством, что во всех точках этих линий направление касательных к ним совпадает с направлением вектора \mathbf{H} . Такие линии называют линиями напряженности магнитного поля. Их снабжают на рисунках стрелками, указывающими направление вектора \mathbf{H} .

Намагниченности вещества \mathbf{J} можно дать еще другое определение, связанное с понятием о магнитном моменте элементарного тока. Магнитным моментом p_0 элементарного тока i_0 называют произведение величины i_0 на площадку s_0 , охватываемую этим током. Магнитный момент есть векторная величина. Направление вектора \mathbf{p}_0 (рис. 1-42) принимают вдоль перпендикуляра к площадке s_0 и связывают с направлением тока i_0 правилом правого винта. Таким образом,

$$\mathbf{p}_0 = i_0 \mathbf{s}_0.$$

где s_0 — вектор, по величине численно равный s_0 и имеющий указанное направление.

Выделим внутри намагниченного вещества цилиндр с длиной l и основанием s (рис. 1-43) и предположим, что вещество в объеме цилиндра намагничено в макроскопическом смысле однородно. Пусть p — геометрическая сумма магнитных моментов p_0 всех элементарных токов в объеме цилиндра. Векторную величину p называют магнитным моментом данного объема вещества.

Предположим, что цилиндр выделен так, что вектор p направлен по его оси. Все элементарные токи в объеме цилиндра можно заменить одним эквивалентным током i'_0 , обтекающим поверхность цилиндра (рис. 1-43), выбрав величину i'_0 так, чтобы сохранить значение магнитного момента p , т. е. положив

$$i'_0 s = p.$$

Такой выбор необходимо сделать потому, что магнитное поле элементарных токов полностью определяется их магнитными моментами.

Проведем линию AB , проходящую по оси цилиндра. На длине l цилиндра эту линию охватывает ток i'_0 . Следовательно, в соответствии с ранее данным определением намагниченности J вещества имеем $i'_0 = J l$, т. е. $i'_0 s = p = J l s = J V$ или

$$J = \frac{p}{V} \text{ и } \mathbf{J} = \frac{\mathbf{p}}{V}.$$

Если вещество намагничено неоднородно, то необходимо перейти к пределу:

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{p}}{dV},$$

где Δp — магнитный момент объема ΔV вещества.

Таким образом, намагниченность вещества в данной точке равна пределу отношения магнитного момента некоторого объема вещества, содержащего данную точку, к этому объему, когда последний стремится к нулю.

Выше было отмечено, что к понятию «элементарный ток» мы отнесли и то еще не изученное внутреннее движение в элементарных частицах, которое приводит к появлению их магнитных моментов. Магнитный момент электрона имеет определенное значение, т. е. имеет квантовый характер. Электрон обладает также определенным моментом количества движения. Магнитный момент и момент количества движения электрона можно рассматривать как проявление вращения (спина) электрона вокруг его оси. Действительно,

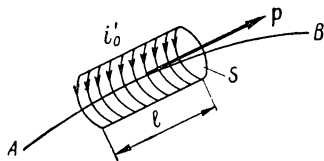


Рис. 1-43.

круговое движение элементов заряда электрона около его оси представляет собой замкнутый круговой элементарный ток, который, как всякий электрический ток, окружен связанным с ним магнитным полем. Однако такое простое представление не дает возможности согласовать между собой величины магнитного момента и момента количества движения электрона с возможными значениями радиуса и угловой скорости вращения электрона. Магнитным моментом обладают также и элементарные частицы, не обладающие электрическим зарядом, например нейтрон.

Таким образом, приходится признать, что магнитные моменты элементарных частиц являются результатом более сложных внутренних процессов в этих частицах, определяющих природу и основные свойства частиц. Однако здесь совершенно естественно продолжить те логические рассуждения, которые привели в свое время к отказу от представления о реальном существовании магнитных масс, подбных электрическим зарядам. То обстоятельство, что магнитное поле было обнаружено около проводников с макроскопическими электрическими токами, а не только около намагниченных тел, дало основание предположить, что и в случае намагниченных тел магнитное поле обуславливается также электрическими токами, существующими внутри вещества тела в форме элементарных (молекулярных) замкнутых токов.

В то время, когда было высказано впервые Ампером это предположение, еще не было развито представление об электромагнитном строении атомов и молекул вещества. Продолжая это рассуждение, мы в настоящее время можем высказать предположение, что и магнитный момент элементарных частиц также является результатом некоторого сложного внутреннего движения в этих частицах, имеющего характер замкнутых электрических токов, но это движение значительно более сложно, чем простое вращение электрона как целого вокруг своей оси. Существенно отметить, что и в квантовой теории формальное рассмотрение магнитного поля, обусловленного магнитными моментами электронов, приводит к некоторому общему выражению для плотности электрических токов.

Таким образом, имеются все основания понятием «элементарные токи» в веществе охватывать все явления, приводящие к намагниченности вещества, и в этом широком смысле сохранять утверждение, что во всех без исключения случаях магнитное поле связано с электрическими токами.

1-15. Закон полного тока

В соответствии с определением напряженности магнитного поля, данным в предыдущем параграфе, линейный интеграл напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равен электрину-

ческому току, охватываемому этим контуром, т. е. току сквозь поверхность s , ограниченную этим контуром:

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i.$$

В общем случае, когда ток i распределен по поверхности s с плотностью δ , различной в разных точках поверхности, имеем соотношение:

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_s \delta ds = i.$$

Например, если контур интегрирования охватывает часть сечения проводника с током (рис. 1-44), то в правой части уравнения должна быть учтена только та часть тока в проводнике, которая охватывается контуром интегрирования.

Согласно Максвеллу в правой части уравнения $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i$ под величиной i следует подразумевать не только токи проводимости, но и токи переноса, а также и токи смещения сквозь поверхность, ограниченную контуром интегрирования. Сумма токов проводимости, переноса и смещения может быть названа полным током сквозь рассматриваемую поверхность. Соответственно

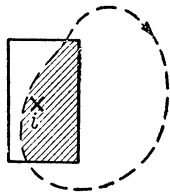


Рис. 1-44.

соотношение $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i$ именуют законом полного тока.

Линейный интеграл напряженности магнитного поля вдоль некоторого контура называют магнитодвижущей силой (м. д. с.) или намагничивающей силой вдоль этого контура. Магнитодвижущую силу принято обозначать буквой F .

Используя термин «магнитодвижущая сила», можно закон полного тока выразить следующими словами:

магнитодвижущая сила вдоль замкнутого контура равна полному току, охватываемому этим контуром.

Уравнение $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i$ при отмеченной широкой трактовке его правой части становится одним из основных уравнений электромагнитного поля.

Действительно, предположим, что токи проводимости и переноса отсутствуют и имеют место только токи смещения. Но токи смещения в диэлектрике возникают только при изменении во времени электрического поля. Следовательно, уравнение

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i$$

свидетельствует, что при всяком изменении во времени электрического поля возникает в том же пространстве поле магнитное, тесным

образом связанное с электрическим полем и с его изменениями и по сути представляющее с ним единое электромагнитное поле.

Заметим, что понятие «магнитодвижущая сила» может быть применено и к отрезку линии от точки A до точки B . При этом имеем:

$$F_{AB} = \int_A^B H dl.$$

Пользуясь понятием «магнитодвижущая сила», можно придать следующую смысл величине, которую мы называем напряженностью магнитного поля. Напряженность поля оказывается численно равной магнитодвижущей силе, приходящейся на единицу длины в направлении линии напряженности поля:

$$H = dF/dl.$$

Отсюда видно, что единицей напряженности магнитного поля в системе единиц МКСА является *ампер на метр* (1 а/м).

1-16. Основные уравнения электромагнитного поля

Весьма важно при построении любого раздела физики положить в его основу минимальное необходимое количество соотношений, принимаемых как опытные факты, рассматриваемых с соответствующими их обобщениями в качестве аксиом. Остальные соотношения должны выводиться из них как следствия, т. е. являться теоремами.

Выше в основу положены как вытекающие из опыта и соответствующих обобщений опыта максвеллов постулат, принцип непрерывности магнитного потока, закон электромагнитной индукции и закон полного тока.

На основании опытного закона Кулона и вытекающей из него для случая однородной и изотропной среды и электростатического поля теоремы Гаусса, обобщенной затем для любой среды и для любого изменяющегося во времени электрического поля, мы получили постулат Максвелла:

$$\oint_s \mathbf{D} ds = q,$$

связывающий электрическое поле с электрическими зарядами частиц или тел.

Опытный факт непрерывности линий магнитной индукции, непосредственно проверяемый всюду, где это достижимо в магнитном поле, окружающем электрические токи, обобщенный на основе современных физических представлений об элементарных токах

в веществе и о магнитных моментах элементарных частиц вещества на случай магнитного поля внутри любого твердого тела, где непосредственный эксперимент невозможен, сформулирован нами в качестве фундаментального принципа непрерывности магнитного потока:

$$\oint_s \mathbf{B} ds = 0.$$

Этот принцип гласит, что магнитных масс, как источников линий магнитного поля, аналогичных электрическим зарядам частиц или тел, являющихся источниками линий электрического поля, в природе не существует.

Установленный опытным путем для проводниковой замкнутой электрической цепи закон электромагнитной индукции, обобщенный для любого мысленно взятого контура в изменяющемся магнитном поле в любой среде,

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

дает одно из важнейших уравнений электромагнитного поля, связывающее изменяющееся магнитное поле с возникающим при этом полем электрическим. Линии такого электрического поля являются непрерывными, т. е. замкнутыми.

Также установленный опытным путем для токов проводимости и переноса закон полного тока, обобщенный на все виды электрического тока, включая и токи электрического смещения,

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i$$

дает другое важнейшее уравнение электромагнитного поля, связывающее движение электрически заряженных частиц и тел и изменяющееся электрическое поле с возникающим при этом магнитным полем.

Приняв эти соотношения за основные, мы получаем остальные соотношения как их следствие.


В общем случае эти уравнения необходимо дополнить связями между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} и между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} . В случае изотропной среды эти связи имеют вид: $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Кроме того, необходимо иметь в виду, что в общем случае ток i может быть током проводимости, током переноса или током электрического смещения, плотности которых имеют соответственно выражения:

$$\delta_{\text{пр}} = \gamma\mathbf{E}, \quad \delta_{\text{пер}} = \rho_+\mathbf{v}_+ + \rho_-\mathbf{v}_-, \quad \delta_{\text{см}} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}.$$

В первых же параграфах последней части, посвященной теории электромагнитного поля, мы увидим, что для полного определения

поля любого вектора необходимо знать значения интегралов этого вектора по всем возможным замкнутым контурам, а также знать истоки линий вектора, т. е. значения интегралов этого вектора по всем возможным замкнутым поверхностям. Это и осуществляется в избранных выше основных соотношениях. Таким образом, их выбор не является случайным. Он тесно связан с сущностью исследуемых явлений. Выразив эти соотношения в последней части курса в дифференциальной форме, мы получим возможность рассчитывать электромагнитное поле для различных конкретных задач с учетом граничных и начальных условий.

Для расчета энергии, переносимой электромагнитным полем, необходимо дополнительно знать распределение энергии в поле, что будет рассмотрено в следующей главе.





ЭНЕРГИЯ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

2-1. Энергия системы заряженных тел. Распределение энергии в электрическом поле

Система заряженных тел является носителем определенного запаса энергии. Эта энергия сообщается системе внешними источниками в процессе образования зарядов и может быть вновь возвращена источникам или преобразована в другие виды энергии при уменьшении зарядов.

Для получения выражения для энергии, запасенной в системе заряженных проводящих тел, рассмотрим работу, совершаемую внешними источниками при образовании зарядов системы. Элементарная работа, производимая внешними силами при увеличении заряда q_k некоторого тела на величину dq_k , равна $dA_k = U_k dq_k$, где U_k — потенциал тела. Полная работа при изменении зарядов всех n тел системы от нуля до конечного значения имеет выражение:

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} A_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{q_k} U_k dq_k.$$

Будем предполагать, что система заряжается весьма медленно, теоретически — бесконечно медленно. При этом электрические токи, возникающие при переносе зарядов на поверхность заряжаемых тел, бесконечно малы, а следовательно, бесконечно малы и потери в проводниках конечного сопротивления. Допустим также, что в самом диэлектрике при изменении напряженности поля не совершаются необратимых процессов. В таком случае на основании закона сохранения энергии мы можем утверждать, что вся работа, совершаемая источниками при образовании зарядов, идет на создание запаса энергии W_3 в системе: $A = W_3$. Потенциал U_k k -го тела зависит от зарядов q_1, q_2, \dots, q_n всех тел. При постоянной

диэлектрической проницаемости среды эта зависимость имеет линейный характер и согласно принципу наложения должна иметь вид

$$U_k = \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \dots + \alpha_{kk}q_k + \dots + \alpha_{kn}q_n.$$

Коэффициенты α называют потенциальными коэффициентами. Это выражение следует подставить под знак интеграла в выражении для работы A .

На основании закона сохранения энергии мы можем утверждать, что работа, совершаемая внешними источниками при увеличении зарядов тел от нуля до их конечных значений, не зависит от порядка установления зарядов. Иначе мы всегда могли бы выбрать такой порядок установления зарядов и отличный от него такой порядок уменьшения зарядов, чтобы энергия, затраченная внешними источниками, была меньше энергии, им возвращенной, что явилось бы нарушением закона сохранения энергии. Поэтому мы вправе выбрать порядок установления зарядов по своему усмотрению. Предположим, что все заряды возрастают пропорционально друг другу, т. е. $q_s = \gamma_{ks}q_k$, где $\gamma_{ks} = \text{const}$. Тогда потенциал каждого тела будет возрастать пропорционально его заряду:

$$U_k = (\alpha_{k1}\gamma_{k1} + \alpha_{k2}\gamma_{k2} + \dots + \alpha_{kn}\gamma_{kn})q_k = m_kq_k,$$

причем $m_k = \text{const}$. Искомая работа равна:

$$A = \sum_{k=1}^n \int_0^{q_k} U_k dq_k = \sum_{k=1}^n m_k \int_0^{q_k} q_k dq_k = \sum_{k=1}^n \frac{m_k q_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{U_k q_k}{2}.$$

Используя равенство $A = W_{\text{э}}$, получаем:

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n U_k q_k.$$

Следовательно, энергия системы заряженных тел равна полусумме произведений потенциалов тел на их заряды.

В весьма важном частном случае заряженного конденсатора мы имеем два заряженных тела с зарядами q_1 и q_2 , равными по величине и противоположными по знаку. Положив $q = q_1 = -q_2$, получаем выражение для энергии заряженного конденсатора:

$$W_{\text{э}} = \frac{U_1 q_1}{2} + \frac{U_2 q_2}{2} = \frac{(U_1 - U_2) q}{2}.$$

Обозначая разность потенциалов U_1 и U_2 обкладок через u и пользуясь соотношением $q = Cu$, где C — емкость конденсатора, получаем:

$$W_{\text{э}} = \frac{uq}{2} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Покажем, что энергию электрически заряженных тел следует рассматривать как распределенную в электрическом поле, окружающем заряженные тела, что соответствует взгляду на электромагнитное поле, как на особый вид материи. Предположив это, мы должны считать, что каждый элемент объема диэлектрика является носителем определенного запаса энергии, и следует говорить об объемной плотности энергии в каждой точке поля. Обозначая объемную плотность энергии электрического поля через W'_s , мы можем выразить энергию системы заряженных тел как энергию всего электрического поля, окружающего их, в виде интеграла:

$$W_s = \int_V W'_s dV,$$

распространенного по всему электрическому полю.

Рассмотрим сначала простейший случай однородного поля. Таким является поле в средней части между параллельными пластинами (рис. 2-1). Выделим из обеих пластин противоположные друг другу части с поверхностями s . Пусть заряды, расположенные на этих частях пластин, равны: $q_1 = -q_2 = q$. Соответствующая им энергия имеет выражение: $W_s = \frac{uq}{2}$, причем u — разность потенциалов пластин. Так как поле однородно, то $u = Ed$, где d — расстояние между пластинами. Поток электрического смещения сквозь любую поверхность s , проведенную в диэлектрике между пластинами параллельно поверхностям пластин и пересекающую все трубки смещения, начинающиеся на заряде $q_1 = q$, равен этому заряду (§ 1-5). Ввиду однородности поля имеем $Ds = q$. Следовательно,

$$W_s = \frac{1}{2} DEsd = \frac{1}{2} DEV,$$

где $V = sd$ — объем диэлектрика, в котором сосредоточено поле зарядов q_1 и q_2 . Энергия, отнесенная к единице объема поля, получается равной

$$W'_s = \frac{W_s}{V} = \frac{1}{2} DE = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon}.$$

Энергия всего поля, таким образом, может быть представлена в виде интеграла:

$$W_s = \int_V \frac{\epsilon E^2}{2} dV.$$

Полученное выражение для объемной плотности энергии электрического поля справедливо лишь для изотропной среды, в которой

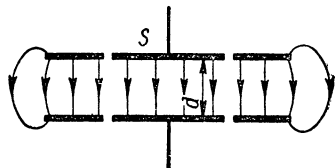


Рис. 2-1.

векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} совпадают по направлению. Покажем, что для анизотропной среды объемная плотность энергии равна:

$$W'_s = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2},$$

где $\mathbf{E}\mathbf{D} = ED \cos \alpha$ есть скалярное произведение векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} , составляющих друг с другом угол α . Соответственно энергия всего поля может быть представлена в форме:

$$W_s = \int_V \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} dV.$$

Убедимся в справедливости этого выражения для общего случая неоднородного поля в анизотропной среде. С этой целью рассмотрим два проводящих тела, имеющих равные заряды противоположных знаков: $q_1 = -q_2 = q$ (рис. 2-2). Выделим в электрическом поле

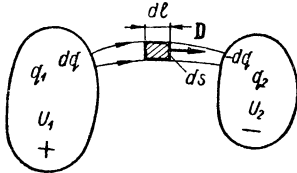


Рис. 2-2.

бесконечно тонкую трубку смещения. В объеме бесконечно малого отрезка dl трубки поле можно считать однородным. Энергия поля в объеме этого отрезка трубки равна:

$$W'_s ds dl = \frac{1}{2} DE \cos \alpha ds dl,$$

где ds — нормальное сечение трубки.

Интегрируя вдоль всей трубки и вспоминая, что поток смещения $D ds$ одинаков во всех поперечных сечениях трубки и равен заряду dq на конце трубки (§ 1-5), находим:

$$dW_s = \int_V \frac{1}{2} D ds E \cos \alpha dl = \frac{1}{2} D ds \int E \cos \alpha dl = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) dq,$$

так как интеграл $\int E \cos \alpha dl$ равен разности потенциалов на концах трубки. Для трубки конечного сечения, если заряды на ее концах расположены на поверхностях равного потенциала, например на поверхности двух заряженных проводящих тел, будем иметь:

$$\Delta W_s = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) \Delta q,$$

где Δq — заряд на конце трубки.

Суммируя энергию по всем трубкам смещения и замечая, что для всех трубок величина $U_1 - U_2$ имеет одинаковое значение, получаем:

$$W_s = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) q = \frac{1}{2} U_1 q_1 + \frac{1}{2} U_2 q_2.$$

Таким образом, выражение энергии в виде интеграла по всему объему поля $W_э = \int_V \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} dV$ эквивалентно выражению $W_э = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} q_k U_k$, которое было получено на основании закона сохранения энергии. В том случае, когда поле создается неподвижными зарядами, с формальной точки зрения безразлично, каким из этих выражений пользоваться при вычислении энергии. Однако электрическое поле может возникать при изменяющемся во времени магнитном поле и при полном отсутствии электрических зарядов. Такое поле, например, существует в электромагнитной волне, излученной радиоантенной. В этом случае при вычислении энергии остается единственная возможность рассматривать ее как энергию поля и, следовательно, пользоваться выражением: $W_э = \int_V \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} dV$.

Точно так же энергия электрического поля движущегося электрического заряда может быть определена именно из этого выражения. Пользуясь им, мы во всех случаях получаем величины, согласующиеся с опытом. Поэтому необходимо признать, что представление о распределении энергии в электрическом поле с объемной плотностью $\frac{1}{2} \mathbf{E}\mathbf{D}$ отвечает сущности рассматриваемого физического явления.

2-2. Силы, действующие на заряженные тела

Механические силы взаимодействия точечных заряженных тел могут быть вычислены при помощи закона Кулона. В случаях, когда заряженные тела нельзя рассматривать как точечные, непосредственное применение закона Кулона невозможно. В общем случае вычисление результирующей силы, действующей на данное заряженное тело, может быть выполнено достаточно просто, если известны емкости тел или емкости между телами как функции геометрических координат.

Выше было указано, что емкость зависит от диэлектрической проницаемости среды и от геометрических величин, обозначенных через g и определяющих форму, размеры и взаимное расположение тел. В дальнейшем мы будем называть величины g о б о б щ е н н ы м и г е о м е т р и ч е с к и м и к о о р д и н а т а м и системы. Это могут быть линейные перемещения тел по заданному пути, расстояния между телами, углы поворота тел вокруг некоторой оси, поверхности или объемы тел и т. д. При таком обобщенном понимании координат g точно так же и силы f , стремящиеся изменить координаты, должны рассматриваться как о б о б щ е н н ы е

силы. Во всех случаях обобщения сила f должна удовлетворять основному требованию, чтобы произведение силы на производимое ею изменение координаты равнялось работе, совершаемой силой при этом изменении координаты. В зависимости от выбора обобщенной координаты g и обобщенная сила получает тот или иной смысл. Так, если g — линейное перемещение, то f — обычная механическая сила; если g — угол поворота, то f — момент пары сил; если g — поверхность, то f — поверхностное натяжение; если g — объем, то f — давление.

Наименьшее число обобщенных координат, необходимое для определения положения системы, равно, как известно из механики, числу степеней свободы системы. Так, в случае тела, перемещающегося по некоторой направляющей, достаточно знать путь, пройденный телом вдоль направляющей от начального положения. В случае одного тела, закрепленного на оси, достаточно знать только угол поворота тела вокруг этой оси. Если тело закреплено в точке, то его положение может быть определено тремя углами поворота, и т. д. Каждой обобщенной координате соответствует своя обобщенная сила, стремящаяся изменить именно эту координату.

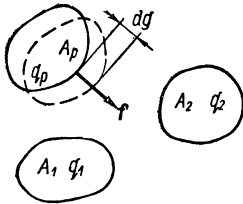


Рис. 2-3.

Рассмотрим произвольную систему n заряженных тел (рис. 2-3). Предположим, что все заряженные тела, кроме тела A_p , неподвижно закреплены, и только тело A_p может перемещаться так, что изменяется одна его координата g . Это изменение координаты g совершается под действием силы f , являющейся результатом взаимодействия заряженного тела A_p со всеми другими заряженными телами системы.

Будем исходить из предположения, что как возможные изменения зарядов тел, так и перемещение тела A_p происходит весьма медленно, теоретически — бесконечно медленно. При этом электрические токи, возникающие на поверхности тел вследствие перераспределения зарядов, бесконечно малы, и, следовательно, можно считать, что потери энергии в проводниках отсутствуют. Предположим также, что изменение напряженности поля в диэлектрике не сопровождается потерей энергии в нем. При этих условиях работа, затрачиваемая внешними источниками энергии на изменения dq_k зарядов тел, должна покрывать приращение энергии электрического поля и механическую работу, совершаемую силой f , изменяющей положение тела A_p :

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = d_g W_э + f dg.$$

Индекс g у величины $d_g W_\vartheta$ указывает, что рассматривается приращение энергии, соответствующее изменению только одной координаты g системы. Это уравнение справедливо независимо от того, каким образом изменяются заряды и потенциалы тела. Оно является выражением закона сохранения энергии применительно к рассматриваемому нами случаю.

Чтобы получить наиболее простое выражение для силы f , предположим, что заряды всех тел остаются неизменными: $q_k = \text{const}$. Это условие удовлетворяется, если все тела отключены от источников электродвижущей силы. Но тогда $dq_k = 0$ и, соответственно, равна нулю работа внешних источников:

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = 0.$$

В этом случае имеем:

$$0 = (d_g W_\vartheta)_{q_k = \text{const}} + f dg$$

или

$$f dg = - (d_g W_\vartheta)_{q_k = \text{const}}. \quad (*)$$

Общий индекс $q_k = \text{const}$ у приращения энергии указывает, что заряды сохраняются неизменными.

Если dg есть перемещение, происходящее под действием силы f , то $f dg > 0$. Из последнего равенства следует, что $d_g W_\vartheta < 0$, т. е. энергия электрического поля убывает. Действительно, механическая работа при отключенных внешних источниках энергии может совершаться только за счет внутренних запасов энергии в системе, в данном случае за счет энергии электрического поля.

Из равенства (*) получаем:

$$f = - \left(\frac{d_g W_\vartheta}{dg} \right)_{q_k = \text{const}} = - \left(\frac{\partial W_\vartheta}{\partial g} \right)_{q_k = \text{const}},$$

т. е. механическая сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна убыли энергии электрического поля, отнесенной к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что заряды всех тел сохраняются неизменными.

Рассмотрим еще другой, также весьма важный случай, когда во время движения системы поддерживаются неизменными потенциалы всех тел, т. е. когда $U_k = \text{const}$. Такой режим имеет место, когда все тела приключены к зажимам внешних источников э. д. с., напряжения на зажимах которых остаются неизменными. Так как при изменении геометрической конфигурации системы будут изменяться емкости между телами, то при постоянстве потенциалов тел должны изменяться их заряды. Дополнительные заряды могут сообщаться

системе только от внешних источников, которые должны на это затратить некоторую работу. Таким образом, все члены уравнения

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k = d_g W_{\text{в}} + fdg$$

теперь отличны от нуля. Однако, если $U_k = \text{const}$ и диэлектрические проницаемости сред не зависят от напряженности поля, то существует простое соотношение между работой внешних источников и приращением энергии электрического поля. Действительно, энергия электрического поля системы заряженных тел при этом может быть представлена в форме

$$W_{\text{в}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k,$$

и, следовательно, ее приращение при постоянстве потенциалов равно:

$$(d_g W_{\text{в}})_{U_k = \text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k dq_k,$$

т. е. в точности равно половине работы внешних источников. Остальная половина работы внешних источников идет на совершение механической работы fdg . Таким образом, механическая работа равна приращению энергии электрического поля:

$$fdg = (d_g W_{\text{в}})_{U_k = \text{const}}.$$

Если в системе происходит перемещение под действием силы f , то $fdg > 0$. Приращение энергии при $U_k = \text{const}$ также оказывается положительным, и энергия поля возрастает.

Из последнего равенства получаем еще одно выражение для механической силы:

$$f = \left(\frac{\partial W_{\text{в}}}{\partial g} \right)_{U_k = \text{const}},$$

т. е. механическая сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна увеличению энергии электрического поля, отнесенному к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что потенциалы всех тел поддерживаются постоянными.

Оба выражения для силы (и это необходимо подчеркнуть) тождественно равны друг другу, т. е. можно написать:

$$f = - \left(\frac{\partial W_{\text{в}}}{\partial g} \right)_{q_k = \text{const}} = + \left(\frac{\partial W_{\text{в}}}{\partial g} \right)_{U_k = \text{const}}.$$

Сила зависит только от положения тел и значений их зарядов в данный момент и не может зависеть от того, как будет развиваться энергетический процесс в том случае, если система придет в движение под действием силы.

Продемонстрируем тождественность обоих выражений для силы f на примере силы притяжения обкладок конденсатора. Энергия заряженного конденсатора

$$W_3 = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где $u = U_1 - U_2$ — разность потенциалов обкладок конденсатора. От координат явно зависит емкость C конденсатора. Определяя силу по формуле при $q_k = \text{const}$, воспользуемся выражением энергии через заряд конденсатора. Получаем:

$$f = - \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{q^2}{2C} \right)_{q = \text{const}} = - \frac{q^2}{2} \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial g} = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial g}.$$

При определении силы по формуле при $U_k = \text{const}$ воспользуемся выражением энергии через разность потенциалов. Находим:

$$f = + \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{Cu^2}{2} \right)_{u = \text{const}} = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial g}.$$

Итак, действительно, оба выражения для силы совершенно одинаковы. Только при взятии производной следует считать постоянными в одном случае заряды, а в другом потенциалы.

Так как при движении под действием силы f имеем $f dg > 0$, то из последнего выражения следует, что при таком движении $dC > 0$, т. е. емкость возрастает. Следовательно, механические силы, действующие на обкладки конденсатора, стремятся увеличить емкость конденсатора.

Ценность полученных выражений в их общности: для вычисления силы нам достаточно только знать, как зависят от координат электрические емкости C , входящие в выражение для энергии электрического поля.

В качестве примера рассмотрим силы взаимного притяжения обкладок заряженного плоского конденсатора. Будем определять силу, действующую на вырезанную центральную часть обкладки, окруженную охранным кольцом, достаточно широким, чтобы поле под центральной частью обкладки можно было считать однородным (рис. 2-1). Емкость этой центральной части конденсатора равна (§ 3-5): $C = \epsilon s/d$, причем s — внутренняя поверхность вырезанной части обкладки и d — расстояние между обкладками. Сила, стремящаяся изменить расстояние d , равна:

$$f = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} = - \frac{u^2}{2} \frac{\epsilon s}{d^2}.$$

Ввиду однородности поля в рассматриваемой системе имеем $\frac{u^2}{d^2} = E^2$ и, стало быть, $f = -\frac{\varepsilon E^2}{2} s = -\frac{ED}{2} s$. Знак минус указывает, что сила действует в сторону уменьшения расстояния d , т. е. стремится сблизить обкладки. Абсолютное значение силы, приходящейся на единицу поверхности обкладки,

$$f = \frac{|f|}{s} = \frac{ED}{2}$$

численно равно энергии электрического поля в единице объема диэлектрика.

2-3. Энергия системы контуров с электрическими токами. Распределение энергии в магнитном поле

В электрических цепях при установлении в них токов возникают э. д. с. индукции. Внешние источники энергии, к которым приключены электрические цепи, при этом совершают работу, так как э. д. с. источников должны преодолевать э. д. с. индукции, возникающие в контурах цепей. Часть энергии, отдаваемой источниками, запасается в электрических цепях и может быть вновь полностью или частично возвращена при уменьшении токов в контурах цепей.

Напряжение u_k , создаваемое внешним источником энергии на зажимах k -й цепи, должно иметь составляющую, равную падению напряжения в сопротивлении цепи, и составляющую, уравновешивающую э. д. с., индуктируемую в этой цепи:

$$u_k = i_k r_k + \frac{d\Psi_k}{dt}.$$

Предположим, что внутреннее сопротивление источника энергии равно нулю или же что оно учтено в сопротивлении цепи. В таком случае э. д. с. e_k источника, приключенного к зажимам цепи, равна напряжению u_k , и работа источника энергии, совершаемая за время dt , равна:

$$u_k i_k dt = i_k^2 r_k dt + i_k d\Psi_k.$$

Первое слагаемое представляет собой энергию, теряемую в проводниках цепи в связи с необратимым процессом выделения тепла.

Второе слагаемое представляет собою часть работы источника, связанную с изменением потокосцепления Ψ_k . Эта часть работы нас непосредственно и будет интересовать. Обозначим ее:

$$i_k d\Psi_k = dA_k.$$

Пусть в рассматриваемой системе цепей имеется n отдельных контуров. Полная работа всех источников энергии, затрачиваемая ими в связи с изменением потокосцеплений во всех n контурах системы от нуля до конечного значения, имеет выражение:

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} A_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k.$$

Предположим, что магнитная проницаемость среды не зависит от напряженности поля и что токи устанавливаются весьма медленно. При этом в среде, окружающей проводники электрических цепей, не совершается никаких необратимых процессов. Все контуры будем считать геометрически неизменяемыми и неподвижными. Следовательно, в системе не совершается механической работы на перемещение контуров. При таких условиях мы можем утверждать на основании закона сохранения энергии, что вся работа A идет на создание запаса энергии W_m в системе электрических цепей, т. е. $A = W_m$.

При бесконечно медленном установлении токов магнитное поле, окружающее контуры с токами, может рассматриваться в каждый отдельный момент времени как постоянное поле. Поэтому токи в контурах и потоки, с ними сцепляющиеся, связаны между собой собственными и взаимными индуктивностями, определяемыми при постоянных токах. Эти индуктивности зависят только от геометрических координат системы и от значения магнитной проницаемости.

Поскольку принято, что величина μ не зависит от напряженности поля, мы можем пользоваться принципом наложения и рассматривать потокосцепление Ψ_k с k -м контуром, как сумму потокосцепления самоиндукции, определяемого током в этом же контуре, и потокосцеплений взаимной индукции, определяемых токами в остальных контурах:

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} i_p \quad (p \neq k).$$

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что работа A не зависит от порядка установления токов. Иначе всегда можно было бы выбрать такой порядок установления токов и отличный от него такой порядок уменьшения токов вновь до нуля, чтобы энергия, затраченная внешними источниками, была меньше энергии, им возвращенной, что явилось бы нарушением закона сохранения энергии. Поэтому мы имеем право выбрать порядок установления токов по своему усмотрению. Интегрирование в выражении для работы A проще всего выполнить, если положить, что все токи возрастают пропорционально друг другу, т. е. $i_p = \alpha_{kp} i_k$,

где $\alpha_{kp} = \text{const}$. При этом выражение для потокосцепления можно привести к виду:

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp} i_k = (L_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp}) i_k = m_k i_k,$$

где

$$p \neq k \text{ и } m_k = (L_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} \alpha_{kp}) = \text{const}.$$

Искомая работа получается равной

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \int_0^{i_k} i_k di_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k i_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{i_k \Psi_k}{2}.$$

Используя равенство $A = W_m$, находим:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k.$$

Следовательно, энергия системы контуров с токами равна полусумме произведений токов в контурах на потокосцепления контуров.

Подставим в полученное нами выражение для энергии W_m выражения потокосцеплений Ψ_k через токи в контурах и собственные и взаимные индуктивности контуров. Замечая, что $M_{kp} = M_{pk}$, получим:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \dots + \frac{1}{2} L_k i_k^2 + \dots + \\ + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + \dots + M_{kp} i_k i_p + \dots$$

Таким образом, энергия системы контуров с токами есть квадратичная функция токов в контурах.

Равенство $M_{kp} = M_{pk}$ является выражением принципа взаимности для рассматриваемого случая. Справедливость равенства $M_{kp} = M_{pk}$ можно показать, рассматривая два контура. Устанавливая сначала ток i_1 , а затем ток i_2 , получим выражение для энергии $\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M_{12} i_1 i_2$. Устанавливая сначала ток i_2 , а затем ток i_1 , получим $\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M_{21} i_1 i_2$. Так как энергия магнитного поля контуров не зависит от порядка установления токов, то $M_{12} = M_{21}$.

Энергию системы токов мы представляем себе распределенной в магнитном поле этих токов. Согласно этому, энергию системы токов всегда можно выразить в виде объемного интеграла:

$$W_m = \int_V W_m' dV,$$

распространенного по всему полю, причем W'_m — объемная плотность энергии магнитного поля.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда поле можно считать однородным. Именно, рассмотрим тонкий кольцевой соленоид с равномерно распределенной обмоткой, имеющей w витков (рис. 2-4). Пусть s — поперечное сечение сердечника, l — его длина и μ — абсолютная магнитная проницаемость материала сердечника. Величину μ будем предполагать постоянной. При плотной обмотке все поле сосредоточено внутри сердечника и каждая линия магнитной индукции сцепляется со всеми витками обмотки. Следовательно, потокосцепление Ψ с обмоткой связано с потоком Φ сквозь сечение сердечника соотношением $\Psi = w\Phi$.

Энергия, запасенная в такой цепи, равна $W_m = \frac{\Psi i}{2} = \frac{\Phi w i}{2}$. Так как в пределах сечения s можно считать магнитную индукцию постоянной, то можно написать: $\Phi = Bs$. Кроме того, на основании закона полного тока имеем: $w i = \oint H d l = H l$, так как $H = \text{const}$ вдоль сердечника. Таким образом, выражение для энергии может быть представлено в виде $W_m = \frac{B H s l}{2}$. Величина $s l = V$ есть объем пространства, занятого магнитным полем. Следовательно, объемная плотность энергии магнитного поля имеет выражение:

$$W'_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B H}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Для анизотропной среды объемная плотность энергии поля должна иметь выражение:

$$W'_m = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2},$$

где $\mathbf{B}\mathbf{H} = B H \cos \alpha$ — скалярное произведение векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} , имеющих в общем случае в анизотропной среде различные направления. Угол α есть угол между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} .

Покажем, что это выражение для объемной плотности энергии поля справедливо в самом общем случае неоднородного поля в анизотропной среде, т. е. что энергия поля может быть представлена в виде интеграла:

$$W_m = \int_V \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV,$$

распространенного по всему полю.

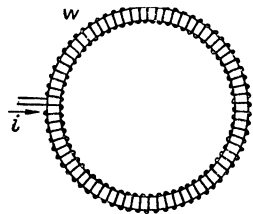


Рис. 2-4.

С этой целью рассмотрим поле катушки, изображенной на рис. 2-5. Представим все поле разделенным на элементарные трубки магнитной индукции. Выделим в одной из таких трубок элементарный отрезок длиной dl . Пусть ds есть сечение трубки, нормальное к ее оси. В пределах бесконечно малого объема $dV = dsdl$ отрезка трубки поле можно считать однородным. Пользуясь выражением для объемной плотности энергии, получаем энергию поля в объеме dV :

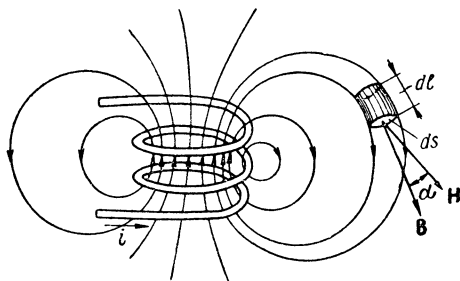


Рис. 2-5.

$$W'_m dV = \frac{BH}{2} dV = \frac{BH \cos \alpha ds dl}{2}.$$

Вычислим теперь энергию dW_m в объеме всей элементарной трубки. С этой целью проинтегрируем полученное выражение вдоль

оси трубки. Поток $d\Phi = Bds$ сквозь сечение трубки имеет постоянное значение вдоль всей трубки и может быть вынесен за знак интеграла. Получаем:

$$dW_m = \oint \frac{BH \cos \alpha}{2} ds dl = \frac{d\Phi}{2} \oint H \cos \alpha dl.$$

На основании закона полного тока имеем:

$$\oint H \cos \alpha dl = wi,$$

где w — число витков, с которыми сцепляется данная трубка. Замечая, что $w d\Phi = d\Psi$ есть доля потокосцепления, вносимая данной трубкой в величину потокосцепления всей цепи, получаем:

$$dW_m = \frac{d\Phi}{2} wi = \frac{id\Psi}{2}.$$

Для получения энергии W_m всего поля необходимо просуммировать энергии всех элементарных трубок. Выполняя такое суммирование, находим:

$$W_m = \int \frac{id\Psi}{2} = \frac{i}{2} \int d\Psi = \frac{i\Psi}{2},$$

т. е. приходим к выражению, полученному на основании закона сохранения энергии.

Таким образом, энергия всего магнитного поля в общем случае может быть представлена в виде интеграла:

$$W_m = \int_V \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}}{2} dV,$$

где интегрирование распространяется по объему всего пространства, в котором существует магнитное поле.

2-4. Электромагнитная сила

Проводники с электрическими токами, расположенные в магнитном поле, испытывают механические силы. Эти механические силы называют электромагнитными силами или электродинамическими силами. Электромагнитные силы возникают не только в контуре с током, расположенном во внешнем поле, но и в том случае, когда этот контур уединен, и поле, его окружающее, определяется током в самом контуре.

К электромагнитным силам мы относим также механические силы, действующие на тела из ферромагнитного материала, расположенные в магнитном поле, так как по существу и в этом случае мы имеем дело с механическими силами, которые испытывают в магнитном поле электрические токи. В данном случае это элементарные токи, существующие в теле из ферромагнитного материала.

Рассмотрим систему, состоящую из n контуров с токами. Положение контуров определяется необходимым числом обобщенных геометрических координат g . Обобщенной геометрической координатой, как было разъяснено в § 2-2, может быть любая геометрическая величина, определяющая положение системы в пространстве. Механические силы, стремящиеся изменить координаты системы, при этом также должны рассматриваться как обобщенные силы.

Пусть под действием силы f некоторая координата g системы получает приращение dg в направлении действия силы. Предположим, что все остальные координаты системы остаются неизменными. Например, один из контуров системы (рис. 2-6) перемещается в некотором направлении, все же остальные контуры остаются неподвижными. Сила f при этом совершает работу $f dg$. В результате изменения координаты g в общем случае произойдет изменение энергии магнитного поля контуров с токами на величину $d_g W_m$.

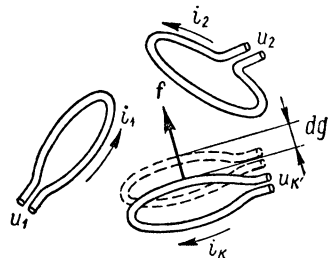


Рис. 2-6.

Индексом g мы отмечаем, что изменяется только одна геометрическая координата.

Предположим, что в среде, окружающей проводники, отсутствуют необратимые процессы. В таком случае работа внешних источников энергии, действующих на зажимах контуров системы, будет расходоваться на выделение тепла в контурах, на изменение запаса энергии в магнитном поле и на механическую работу $\int dg$, совершаемую электромагнитной силой:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k i_k dt = \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2 r_k dt + d_g W_m + \int dg.$$

Для напряжения u_k , создаваемого внешним источником энергии на зажимах k -го контура, имеем:

$$u_k = i_k r_k + \frac{d\Psi_k}{dt},$$

где Ψ_k — потокосцепление с этим контуром. Следовательно, сумма работ всех источников энергии может быть представлена также в виде:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k i_k dt = \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2 r_k dt + \sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k.$$

Сравнивая между собой оба выражения для суммы работ источников энергии, имеем:

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = d_g W_m + \int dg,$$

т. е. часть работы источников, связанная с изменением потоков в контурах, затрачивается на изменение энергии магнитного поля и на механическую работу.

Последнее уравнение справедливо независимо от того, каким образом изменяются во времени токи в контурах и потокосцепления контуров. Оно является выражением закона сохранения энергии применительно к рассматриваемому случаю.

Наиболее простые выражения для силы f получаются, если предположить, что либо потокосцепления со всеми контурами, либо токи во всех контурах остаются неизменными.

Пусть при движении контура потокосцепления поддерживаются неизменными, т. е. $\Psi_k = \text{const}$. Так как при изменении координаты изменяются зависящие от нее индуктивности, то, очевидно, для поддержания постоянства потокосцеплений необходимо соответствующим образом изменять токи в контурах. Этот частный режим интересен тем, что источники энергии совершают работу только на

выделение тепла в контурах, так как $d\Psi_k = 0$ и $\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = 0$.

В частности, если бы сопротивления r_k всех контуров были равны нулю, то источники энергии были бы совершенно не нужны, так как в сверхпроводящих контурах потоки сохраняются неизменными согласно принципу электромагнитной инерции. В случае $\Psi_k = \text{const}$ имеем:

$$0 = (d_g W_m)_{\Psi_k = \text{const}} + fdg.$$

Так как мы рассматриваем перемещение dg под действием силы f , то $fdg > 0$, и, следовательно, $d_g W_m < 0$, т. е. энергия магнитного поля убывает. Этого и следовало ожидать, так как положительная работа электромагнитной силы может совершаться в данном случае только за счет энергии магнитного поля. Из последнего уравнения получаем:

$$f = - \left(\frac{d_g W_m}{dg} \right)_{\Psi_k = \text{const}} = - \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_k = \text{const}},$$

т. е. *электромагнитная сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна убыли энергии магнитного поля, отнесенной к единице производимого силой изменения координаты в предположении, что потокосцепления контуров сохраняются неизменными.*

Предположим теперь, что во всех контурах токи поддерживаются неизменными. При движении под действием электромагнитной силы одного из контуров будут изменяться потокосцепления Ψ_k и часть работы источников, связанная с изменением потокосцеплений контуров, не будет равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k \neq 0.$$

Между величиной этой работы и приращением энергии W_m магнитного поля в рассматриваемом случае существует простое соотношение. Мы имели выражение для энергии:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k.$$

При $i_k = \text{const}$ получаем:

$$(d_g W_m)_{i_k = \text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k.$$

Приходим к замечательному выводу: при постоянстве токов приращение энергии магнитного поля в точности равно половине

рассматриваемой части работы, совершаемой источниками энергии. Остальная половина этой части работы источников в соответствии с уравнением:

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k d\Psi_k = d_g W_m + f dg$$

идет на совершение механической работы. Поэтому

$$f dg = + (d_g W_m)_{i_k = \text{const.}}$$

Таким образом, при постоянстве токов получение механической работы связано с неизбежным увеличением запаса энергии в системе, в точности равным совершенной механической работе.

Из последнего равенства получаем еще одно выражение для электромагнитной силы:

$$f = + \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const.}}$$

т. е. электромагнитная сила, стремящаяся изменить данную координату системы, равна увеличению энергии магнитного поля, отнесенному

к единице производимого силой изменения координаты, в предположении, что токи в контурах поддерживаются неизменными.

Необходимо подчеркнуть, что оба полученные нами выражения определяют собой одну и ту же силу, т. е. можно написать:

$$f = - \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_k = \text{const}} = + \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const.}}$$

Рассмотрим силу f , действующую на среднюю часть полюса электромагнита, изображенного на рис. 2-7, и стремящуюся изменить расстояние d между полюсами. Из всего полюса мы вырезаем только его среднюю часть, около которой поле можно считать однородным. Для вычисления силы воспользуемся выражением:

$$f = - \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_k = \text{const.}}$$

При бесконечно малом перемещении средней части полюса поле остается однородным. Так как $\Psi = \text{const}$, то неизменной остается и магнитная индукция B , а также объемная плотность энергии поля $W'_m = \frac{B^2}{2\mu}$. Поэтому изменение энергии поля происходит только вследствие изменения объема пространства между вырезанной частью северного полюса и южным полюсом. Энергия, заклю-

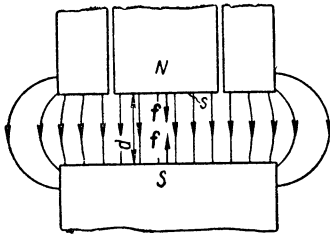


Рис. 2-7.

ченная в этом объеме, равна $W_m = W'_m s d$, где s — поверхность вырезанной части полюса. Таким образом, имеем:

$$f = - \frac{\partial W_m}{\partial d} = - W'_m s = - \frac{B^2}{2\mu_0} s = - \frac{BH}{2} s,$$

причем абсолютная магнитная проницаемость воздуха принята равной μ_0 . Знак минус указывает на то, что силы стремятся уменьшить расстояние между полюсами. Абсолютное значение силы, приходящейся на единицу поверхности полюса, равно:

$$f' = \frac{|f|}{s} = \frac{BH}{2},$$

т. е. численно равно энергии магнитного поля в единице объема пространства между полюсами электромагнита.

В простейшем случае одного контура с током для энергии магнитного поля имеем:

$$W_m = \frac{Li^2}{2}.$$

Воспользуемся для вычисления электромагнитной силы выражением, полученным в предположении, что $i_k = \text{const}$. Получаем:

$$f = \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i = \text{const}} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial g}.$$

Если перемещение dg происходит под действием силы f , то $f dg > 0$ и, стало быть, $dL > 0$. Следовательно, в контуре возникают такие силы, которые стремятся так деформировать контур, чтобы его индуктивность увеличилась.

Заметим здесь, что последнее выражение уже не требует никаких оговорок о постоянстве тока. Эта оговорка полностью использована при вынесении i^2 за знак производной. Выражение это пригодно и для вычисления мгновенного значения электромагнитной силы при данном мгновенном значении переменного тока.

Выше указывалось, что обе формулы, полученные в предположении, что $\Psi_k = \text{const}$, и в предположении, что $i_k = \text{const}$, тождественны, т. е. можно написать:

$$f = - \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_k = \text{const}} = + \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const}}.$$

Продемонстрируем это на примере одного контура. Чтобы воспользоваться первой формулой для силы, следует выразить энергию через потокосцепление самоиндукции. Имеем:

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{(Li)^2}{2L} = \frac{\Psi_L^2}{2L}.$$

Получаем:

$$f = - \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{\Psi_L = \text{const}} = - \frac{\Psi_L^2}{2} \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{1}{L} \right) = \frac{\Psi_L^2}{2L^2} \frac{\partial L}{\partial g} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial g},$$

что полностью совпадает с результатом, полученным из выражения:

$$f = \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i = \text{const}}.$$

Рассмотрим случай двух контуров с токами. Для энергии магнитного поля системы, состоящей из двух контуров с токами, имеем выражение:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

Найдем электромагнитную силу, стремящуюся изменить координату g , определяющую взаимное расположение контуров. От этой координаты зависит только взаимная индуктивность. Поэтому искомая электромагнитная сила равна:

$$f = \left(\frac{\partial W_m}{\partial g} \right)_{i_k = \text{const}} = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g}.$$

В этом выражении вынесены за знак производной оба тока. Вынося за знак производной только ток в одном из контуров, мы получим:

$$f = i_1 \left[\frac{\partial (M i_2)}{\partial g} \right]_{i_2 = \text{const}} = i_1 \left(\frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g} \right)_{i_2 = \text{const}}.$$

или

$$f = i_2 \left[\frac{\partial (M i_1)}{\partial g} \right]_{i_1 = \text{const}} = i_2 \left(\frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g} \right)_{i_1 = \text{const}}.$$

Если контуры перемещаются под действием силы f , то $f dg > 0$. В таком случае из первого равенства имеем: $i_1 d\Psi_{1M} > 0$. Таким образом, при $i_1 > 0$ и $d\Psi_{1M} > 0$, т. е. потокосцепление взаимной индукции Ψ_{1M} увеличивается. Иными словами, если потокосцепление самоиндукции $L_1 i_1$ положительно, то потокосцепление взаимной индукции $M i_2$ стремится принять наибольшее возможное положительное значение. При $i_1 < 0$ имеем: $d\Psi_{1M} < 0$, т. е. Ψ_{1M} уменьшается. Следовательно, если потокосцепление самоиндукции $L_1 i_1$ отрицательно, то и потокосцепление взаимной индукции Ψ_{1M} стремится стать отрицательным и притом наибольшим по абсолютному значению. Анализируя второе равенство, мы приходим к аналогичным выводам по отношению к потокосцеплению взаимной индукции $M i_1$ второго контура.

Итак, электромагнитные силы стремятся расположить жесткие контуры системы таким образом, чтобы каждый контур охватывал возможно большую часть внешнего потока с положительной своей стороны при условии, что токи в контурах постоянны.

Слова «с положительной своей стороны» здесь следует понимать в том смысле, что контуры стремятся расположиться так, чтобы линии магнитной индукции внешнего потока внутри контуров про-

ходили в том же направлении, что и линии магнитной индукции потоков самоиндукции.

Определим еще вращающий момент f , который испытывает плоский контур с током i во внешнем однородном магнитном поле. Пусть B — магнитная индукция внешнего поля, s — поверхность, ограниченная контуром тока, и α — угол, составляемый положительной нормалью N к этой поверхности с вектором \mathbf{B} и отсчитываемый от направления вектора \mathbf{B} (рис. 2-8). Положительное направление нормали свяжем с положительным направлением тока i правилом правого винта.

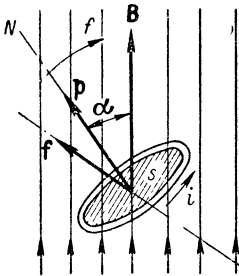


Рис. 2-8.

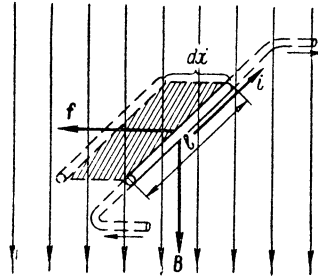


Рис. 2-9.

Согласно вышеприведенным выражениям:

$$f = i_1 \left(\frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g} \right)_{i_2 = \text{const}} \quad \text{и} \quad f = i_2 \left(\frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g} \right)_{i_1 = \text{const}},$$

искомый вращающий момент можно представить как произведение тока i в контуре на производную $\partial \Psi / \partial \alpha$ от внешнего потокоцепления по углу α . Имеем:

$$\Psi = Bs \cos \alpha \quad \text{и} \quad f = i \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = -isB \sin \alpha = -pB \sin \alpha,$$

где $p = is$ есть магнитный момент замкнутого тока.

В векторной форме последнее выражение имеет вид (рис. 2-8)

$$\mathbf{f} = [\mathbf{p}\mathbf{B}].$$

Мы приходим к замечательному выводу, что вращающий момент не зависит отдельно от i и s , а определяется магнитным моментом p .

Сказанное полностью относится к любым элементарным токам, так как по определению элементарным мы называем замкнутый ток, протекающий по столь малому контуру, что в пределах этого контура внешнее поле можно считать однородным.

В заключение определим электромагнитную силу, действующую на прямолинейный отрезок проводника с током i , имеющий длину l , расположенный во внешнем однородном поле нормально к вектору

магнитной индукции \mathbf{B} (рис. 2-9). Отрезок составляет часть замкнутого контура тока. Со стороны внешнего поля он испытывает силу, которая стремится переместить его в таком направлении, чтобы при этом перемещении происходило наибольшее возможное увеличение потока, сцепляющегося с контуром тока. Это условие удовлетворяется, если сила действует перпендикулярно к вектору \mathbf{B} и перпендикулярно к оси отрезка проводника. Направление силы можно определить, пользуясь правилом левой руки. Если большой, указательный и средний пальцы левой руки расположить взаимно перпендикулярно и так, чтобы указательный палец был направлен в сторону поля, а средний — в сторону тока, то большой палец будет указывать направление силы. Это правило легко запоминается, если заметить, что порядок пальцев на руке: большой, указательный, средний — соответствует алфавитному порядку начальных букв слов: движение, поле, ток.

Предположим, что отрезок проводника переместится под действием электромагнитной силы на расстояние dx (рис. 2-9). Внешнее потокоцепление с контуром тока при этом получает приращение:

$$d\Psi = d\Phi = Bldx.$$

Согласно выражениям

$$f = i_1 \left(\frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g} \right)_{i_2 = \text{const}} \quad \text{и} \quad f = i_2 \left(\frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g} \right)_{i_1 = \text{const}},$$

искомая сила может быть представлена как произведение тока i в отрезке проводника на производную $\frac{d\Psi}{dx}$ от внешнего потокоцепления по координате. Получаем:

$$f = i \frac{d\Psi}{dx} = i \frac{Bldx}{dx} = Bli.$$

Представляет интерес сравнить полученное выражение с выражением для э. д. с., индуктируемой в движущемся проводнике:

$$e = Blv.$$

Механическая сила f , стремящаяся изменить геометрическую координату x проводника, определяется электрической скоростью, т. е. током в проводнике $i = dq/dt$. Э. д. с., стремящаяся вызвать ток в проводнике, определяется геометрической скоростью проводника $v = dx/dt$.



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

3-1. Электрические и магнитные цепи

Изложенное в предыдущих двух главах со всей ясностью показывает, что любое электромагнитное явление, происходящее в системе заряженных тел и контуров с токами, т. е. в любом электротехническом устройстве, определяется не только физическими процессами, происходящими на самих заряженных телах и в проводниках, образующих контуры с токами, но и не в меньшей мере физическими процессами в диэлектрике, окружающем эти тела и проводники. Даже можно сказать больше — именно электромагнитное поле в диэлектрике, окружающее заряженные тела и проводники с токами, является носителем энергии системы, которая может передаваться от одной части системы к другой. Электрическое поле заряженных тел целиком находится вне этих тел в окружающем их диэлектрике. Магнитное и электрическое поля электрических токов, протекающих по проводникам, существует и вне проводников и внутри них. Однако электрическое поле внутри проводников с током связано только с конечным удельным сопротивлением материала этих проводников и, соответственно, определяет потери энергии в проводниках. Энергия же, передаваемая вдоль проводников, целиком относится к электромагнитному полю в среде, окружающей проводники. Электрическая емкость и индуктивность любых элементов электротехнического устройства определяется их электрическими и магнитными полями при заданных зарядах и токах.

Таким образом, рассматривая явление во всей его полноте, во всех случаях необходимо изучать электромагнитное поле исследуемого устройства.

Математическое описание электромагнитных полей, хотя и дает нам полную картину явлений, оказывается сложным; этому будет посвящена последняя, четвертая часть курса.

В большинстве случаев представляется возможным достаточно точно описать процессы в электротехнических устройствах, пользуясь только такими интегральными понятиями, как электродвижущая сила $e = \oint (\mathbf{E}_{\text{стор}} + \mathbf{E}_{\text{инд}}) d\mathbf{l}$, электрическое напряжение

$$u = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}, \text{ электрический заряд } q = \oint \mathbf{D} ds, \text{ электрический ток } i = \int_s \delta ds = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l}, \text{ магнитный поток } \Phi = \int_s \mathbf{B} ds, \text{ не рассматривая}$$

распределение в пространстве и изменения во времени величин $\mathbf{E}_{\text{стор}}$, $\mathbf{E}_{\text{инд}}$, \mathbf{E} , \mathbf{D} , δ , \mathbf{H} и \mathbf{B} , характеризующих электромагнитное поле во всех его точках. Такая возможность возникает вследствие того, что мы обычно стремимся создать определенные достаточно узкие пути для электрического тока, располагая вдоль этих путей проводники из материалов с высокой электрической проводимостью, окруженных хорошо изолирующей средой, например, в линиях электропередач, в электрических сетях, в обмотках электрических машин и т. д., или помещая вдоль этих путей какие-либо другие хорошо проводящие ограниченные по размерам устройства, например, электронные лампы, полупроводниковые приборы, электролитические ванны и т. д.

Совокупность устройств, предназначенных для прохождения в них электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, токе и напряжении, называют электрической цепью.

Точно так же мы во многих случаях стремимся создать определенный путь, по которому должны замыкаться линии магнитной индукции, располагая вдоль этого пути тела из ферромагнитного материала с высокой магнитной проницаемостью, окруженные средой со значительно меньшей магнитной проницаемостью, например, воздухом. В этом случае с достаточной точностью представляется возможным описывать процесс с помощью интегральных понятий магнитодвижущая сила (намагничивающая сила) $i\omega = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l}$ и магнитный поток $\Phi = \int_s \mathbf{B} ds$.

Совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела и образующих замкнутую цепь, в которой при наличии магнитодвижущей силы образуется магнитный поток и вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции, называют магнитной цепью.

Сказанное дает возможность построить теорию электрических и магнитных цепей, в которой электромагнитные явления в различных устройствах описываются с помощью понятий об э. д. с., напряжении, токе, м. д. с. и магнитном потоке. Развитию этой теории посвящаются вторая и третья части настоящего курса. Вместе

с тем чрезвычайно важно дать себе отчет о тех допущениях, на которых построена эта теория, и, следовательно, о тех ограничениях, при которых справедливы те или иные ее положения. Сделать это можно исходя из основных закономерностей, характеризующих электромагнитное поле, рассмотренных в первых двух главах настоящей первой части. Переход от полной картины явлений в электромагнитном поле к упрощенной картине процессов в электрических и магнитных цепях с учетом допускаемых при этом отклонений от действительной сложной картины явлений и, следовательно, принимаемых при этом абстракций и будет нашей основной задачей в этой главе. Вместе с тем, мы здесь поставим задачу ввести основные общие понятия теории электрических и магнитных цепей, относящиеся ко всем ее разделам, и дать им определения.

3-2. Элементы электрических цепей.

Активные и пассивные части электрических цепей

Основными элементами электрических цепей являются источники электромагнитной энергии, устройства для передачи и преобразования электромагнитной энергии и приемники этой энергии.

Источниками электромагнитной энергии являются различные генерирующие устройства, в которых энергия того или иного вида — тепловая, химическая, ядерная, энергия механического движения и т. д. — преобразуется в электромагнитную. Таковыми являются, например, электрические вращающиеся генераторы, гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы и т. д. В настоящее время разрабатываются новые устройства для прямого преобразования тепловой, ядерной и химической энергии в электромагнитную, такие, как, например, магнитогидродинамические генераторы и топливные элементы.

Передающими электромагнитную энергию элементами цепи являются, например, линии электропередачи, электрические сети, линии связи.

Преобразование электромагнитной энергии осуществляется с помощью трансформаторов, изменяющих напряжение и ток, преобразователей частоты, ламповых генераторов, а также ионных и полупроводниковых инверторов, преобразующих постоянный ток в переменный, выпрямителей, преобразующих переменный ток в постоянный, и т. п.

Приемниками в электрической цепи являются устройства, в которых осуществляется преобразование электромагнитной энергии в энергию другого вида, например, в электродвигателях — в механическую работу, в электролизерах и в заряжаемых аккумуляторах — в химическую энергию, в электрических печах и

нагревательных устройствах — в тепловую энергию, в радиоприемниках — в акустическую энергию и т. д.

Во всех случаях, когда то или иное устройство — элемент электрической цепи — имеет основным назначением генерирование, передачу, преобразование или потребление электромагнитной энергии, на первый план выдвигается требование его высокого коэффициента полезного действия.

Во многих случаях главным назначением тех или иных элементов электрической цепи является передача или преобразование электрических сигналов, а также выполнение операций измерения тех или иных величин или управления какими-нибудь процессами. Таковыми являются телефонные и телеграфные линии связи и их концевые устройства, весьма разнообразные элементы устройств

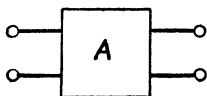


Рис. 3-1.

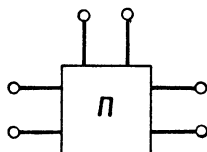


Рис. 3-2.

автоматики, электроизмерительных устройств, счетно-решающих и управляющих электронных вычислительных машин, различных радиотехнических устройств и т. д. Во всех этих случаях главным требованием является получение определенного качества передаваемого или преобразуемого сигнала. Естественно, и в этих случаях происходит передача и преобразование электромагнитной энергии и имеет значение, хотя и не основное, достижение возможно высокого коэффициента полезного действия.

Наряду с упомянутыми требованиями элементы электрических цепей должны удовлетворять также многим другим требованиям — надежности работы, долговечности, если необходимо — быстродействию, устойчивости работы, точности действия и т. д.

Соответственно этому электрические цепи современных электротехнических устройств являются весьма сложными. Поэтому и теория электрических цепей все время развивается и ей становятся свойственными все более обобщенные методы. В настоящем курсе, начав с исследования простейших электрических цепей, мы постепенно перейдем к общим методам расчета сложных электрических цепей.

Условимся в дальнейшем часть электрической цепи, в которой действуют источники электромагнитной энергии, называть активной частью цепи, или короче — активной

цепью. Ее мы будем нередко обозначать прямоугольником с буквой А в середине и с тем или иным количеством выводов (проводников), с помощью которых она присоединяется к остальной части цепи (рис. 3-1).

Часть электрической цепи, в которой нет источников электромагнитной энергии, мы будем называть п а с с и в н о й ч а с т ь ю ц е п и, или короче — п а с с и в н о й ц е п ь ю. Ее будем обозначать также прямоугольником с соответствующим количеством выводов для присоединения к остальной части цепи, но с буквой П в середине прямоугольника (рис. 3-2). Внутри этих прямоугольников предполагаются находящимися все элементы рассматриваемой части цепи, со всеми соединениями между ними.

3-3. Физические явления в электрических цепях. Цепи с распределенными параметрами

Наиболее простые явления имеют место в электрических цепях постоянного тока. Длительный постоянный ток в электрической цепи может быть только или током проводимости, или током переноса. Ток смещения в диэлектрике не может быть постоянным сколь угодно долгое время, так как электрическое смещение и поляризованность диэлектрика не могут возрастать беспредельно без нарушения электрической прочности диэлектрика. Поэтому в цепь постоянного тока могут входить только такие устройства, в которых ток существует в виде тока проводимости, например, провода линии передачи, обмотки машин, электролитические ванны, гальванические элементы, аккумуляторы и т. д., или такие, в которых ток существует в форме тока переноса, например электронные лампы. Конденсаторы с идеальным диэлектриком, удельная проводимость которого предполагается равной нулю, не проводят постоянного тока.

Хотя вокруг цепи постоянного тока существует магнитное поле, но оно не изменяется во времени, и, следовательно, в цепи постоянного тока не индуктируются э. д. с.

Если изолирующая среда между проводами обладает хотя и малой, но конечной удельной проводимостью, то под действием постоянного напряжения между проводами через нее будет протекать ток утечки. Ток утечки будет отходить в изолирующую среду от всех элементов проводов, соприкасающихся с ней, в результате чего ток вдоль провода будет иметь разные значения. Здесь мы имеем простейший случай цепи с распределенными вдоль нее параметрами, а именно с распределенной вдоль цепи проводимостью утечки.

При переменных токах и напряжениях явления в электрической цепи оказываются более сложными. Переменный ток, т. е. изменяющийся во времени ток, может существовать и в диэлектрике в виде тока смещения. Поэтому в электрическую цепь переменного тока могут входить также конденсаторы, обкладки которых разделены диэлектриком. При переменном напряжении на конденсаторе возникает переменное электрическое поле между его металлическими обкладками, и, следовательно, в разделяющем обкладки диэлектрике возникает ток смещения. С учетом тока электрического смещения линии тока, как было отмечено в § 1-7, оказываются всегда замкнутыми.

Рассмотрим процессы в электрической цепи с последовательно включенным конденсатором, происходящие при зарядке (рис. 3-3)

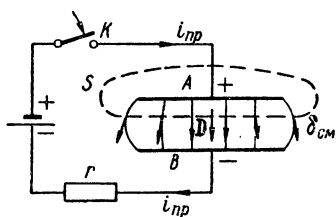


Рис. 3-3.

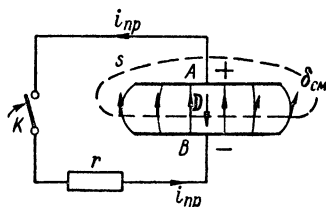


Рис. 3-4.

и при разрядке (рис. 3-4) конденсатора. Если не принимать во внимание токов смещения, то эта цепь кажется разомкнутой. Предположим, что при помощи ключа K незаряженный конденсатор включается в некоторый момент времени в цепь источника постоянной э. д. с. (рис. 3-3). Конденсатор заряжается; электрические заряды, переносимые от одной обкладки конденсатора к другой по соединяющему их проводнику, собираются на обкладках. При увеличении заряда на обкладках возрастает электрическое поле между ними, и в диэлектрике возникают токи электрического смещения. Если мы охватим одну из обкладок, например обкладку A , замкнутой поверхностью s , то во время, когда по проводнику, пересекающему эту поверхность, протекает ток проводимости $i_{нр}$, в диэлектрике образуется ток смещения, проходящий сквозь поверхность s изнутри наружу и в точности равный току $i_{нр}$ в проводнике. Линии тока смещения в диэлектрике являются продолжением линий тока в проводнике. Действительно, электрическое поле направлено от положительной обкладки A к отрицательной B и при этом возрастает. Следовательно, линии тока смещения направлены также от положительной обкладки к отрицательной. Электрический ток, протекающий в проводнике к положительной обкладке в форме тока проводимости, продолжается в диэлектрике

в виде тока смещения и далее от отрицательной обкладки в проводнике вновь в форме тока проводимости. Таким образом, цепь электрического тока является замкнутой.

Если отключить заряженный конденсатор от источника э. д. с. и затем замкнуть его на сопротивление r (рис. 3-4), то конденсатор начнет разряжаться. Ток $i_{пр}$ в проводнике будет протекать от положительной обкладки A к отрицательной B . В диэлектрике электрическое поле по-прежнему остается направленным от положительной обкладки к отрицательной. Однако теперь поле ослабевает и, следовательно, вектор плотности тока направлен против вектора смещения D . Линии тока смещения направлены от отрицательной обкладки к положительной и являются продолжением линий тока в проводнике.

Согласно принципу непрерывности электрического тока (§ 1-7), в любой момент времени как при зарядке, так и при разрядке конденсатора ток смещения в диэлектрике между обкладками конденсатора в точности равен току $i_{пр}$ в проводниках.

Ток смещения при переменном напряжении возникает не только в конденсаторах, т. е. в устройствах, построенных специально для использования их емкости, но также и в диэлектрике, окружающем любые элементы цепи переменного тока, поскольку между этими элементами существует переменное напряжение, т. е. существует переменное электрическое поле. Так, например, ток смещения возникает в диэлектрике между проводами линии передачи, если напряжение между проводами изменяется во времени (см. рис. 1-19). Вследствие этого переменный ток в проводах линии не одинаков в разных местах линии, даже если удельная проводимость диэлектрика равна нулю, так как вдоль всей линии ток ответвляется от проводов через диэлектрик в виде тока смещения. Говорят, что провода линии по отношению друг к другу так же, как и конденсатор, обладают емкостью. Сказанное справедливо для любого устройства при переменном токе. Так, например, в реостате при переменном токе появляется переменное падение напряжения, т. е. в проволоке реостата и в окружающем его диэлектрике возникает переменное электрическое поле. Поэтому между отдельными участками проволоки реостата через диэлектрик проходят токи смещения, вследствие чего, принципиально говоря, ток в разных местах проволоки реостата имеет различные значения. Говорят, что отдельные участки реостата обладают по отношению друг к другу электрической емкостью.

Если по индуктивной катушке проходит переменный ток, то в катушке в отдельных ее витках индуцируется переменная э. д. с. На зажимах катушки и между ее витками появляется переменное напряжение, т. е. переменное электрическое поле, что приводит к возникновению в диэлектрике между витками катушки токов

смещения. И в этом случае, строго говоря, ток в различных местах проволоки катушки имеет разные значения. Говорят, что существует электрическая емкость между витками катушки.

Итак, *электрическая емкость принципиально всегда распределена вдоль всей цепи.*

То же следует сказать и об индуктивности цепи. Нет такого участка цепи, который при прохождении по нему тока не охватывался бы магнитным потоком. Поэтому при переменном токе на каждом участке цепи индуктируются э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции. Говорят, что каждый участок, каждый элемент цепи обладает индуктивностью. Индуктивностью обладают не только катушки, но и провода линии, реостаты и любые другие элементы цепи переменного тока. Даже конденсаторы обладают индуктивностью, хотя и очень малой. Таким образом, *индуктивность также всегда распределена вдоль всей цепи.*

Поглощение электромагнитной энергии и преобразование ее в тепловую энергию при переменном токе происходит точно так же во всех элементах цепи. Не только реостаты, но и индуктивные катушки и провода линии, а также другие элементы цепи обладают отличным от нуля электрическим сопротивлением, и при прохождении тока в них поглощается электромагнитная энергия и происходит выделение тепла. Если катушка имеет сердечник из ферромагнитного материала, то, кроме потерь энергии в обмотке катушки, происходят потери энергии в сердечнике на гистерезис и на вихревые токи. В конденсаторах при переменном напряжении имеют место потери в диэлектрике. В электронных лампах тепло выделяется на аноде, так как ускоренные в электрическом поле электроны теряют здесь свою скорость. В ионных приборах электромагнитная энергия переходит в тепловую не только на электродах, но и в газовом промежутке между электродами.

Характеризуя способность какого-либо элемента цепи при прохождении по нему тока поглощать электромагнитную энергию электрическим сопротивлением этого участка, мы, в соответствии со сказанным, должны утверждать, что *электрическое сопротивление распределено по всей электрической цепи.*

Все сказанное выше свидетельствует, что во всех случаях мы имеем дело с *электрическими цепями с распределенными параметрами*, и это обстоятельство существенно усложняет анализ процессов в цепи.

В отдельных участках цепи может происходить преобразование электромагнитной энергии не только в тепловую, но и в другие виды энергии, например, в аккумуляторах при их зарядке — в химическую энергию, в двигателях — в механическую работу и т. д. Однако эти преобразования совершаются не обязательно во всех элементах электрической цепи.

При изучении энергетических процессов в электрических цепях переменного тока нам придется обратить особое внимание на то, что электрическое и магнитное поля являются носителями определенного количества энергии. При переменных токах и напряжениях эти поля изменяются во времени. При усилении полей запас энергии в них возрастает, при ослаблении полей этот запас энергии убывает, переходя в другие виды энергии или возвращаясь к источникам энергии, действующим в цепи.

При изменениях тока и напряжения в электрической цепи, как мы увидим в конце четвертой части курса при рассмотрении переменного электромагнитного поля, вообще говоря, происходит излучение электромагнитного поля с присущей ему энергией. Однако в обычных цепях при сравнительно низких частотах тока и напряжения излучением можно пренебречь.

Наконец обратим внимание еще на одно существенное обстоятельство, отмеченное уже в § 1-12, а именно, что напряжение между двумя любыми точками A и B цепи переменного тока зависит от выбора пути между этими точками, вдоль которого определяется напряжение. Действительно, имеем: $u_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}$. Но два разных пути, например путь Amb и путь AnB (рис. 1-35), образуют замкнутый контур $AmbnA$, с которым сцепляется переменный магнитный поток Φ , существующий около рассматриваемой электрической цепи. Изменяющийся поток Φ индуктирует в контуре $AmbnA$ э. д. с. Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{AmB} - u_{AnB} &= \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} - \int_{AnB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \\ &= \oint_{AmBnA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \neq 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$u_{AmB} \neq u_{AnB}.$$

Таким образом, если быть совершенно строгим, то нельзя при переменном токе говорить о напряжении между какими-либо двумя точками цепи, в частности, о напряжении на зажимах цепи, как о некоторой вполне определенной величине. Следует говорить о напряжении между двумя точками цепи вдоль определенного заданного пути между этими точками.

Все изложенное свидетельствует о большой сложности физических процессов, происходящих в цепях переменного тока.

3-4. Научные абстракции, принимаемые в теории электрических цепей, их практическое значение и границы применимости. Цепи с сосредоточенными параметрами

Далеко не во всех случаях необходимо учитывать всю сложность физических процессов, происходящих в цепях переменного тока. Наоборот, в большинстве случаев можно сделать ряд допущений, существенно упрощающих задачу и вместе с тем не приводящих к заметным отклонениям от действительности.

Равномерное распределение электрического и магнитного полей вдоль цепи наблюдается в сравнительно редких случаях, например, в длинных линиях. Значительно чаще магнитное и электрическое поля распределяются вдоль цепи неравномерно. На одних участках цепи, например в конденсаторах, преобладает электрическое поле и выступают на первый план явления, связанные с его изменениями; на других участках, например в индуктивных катушках, преобладает магнитное поле и основными оказываются явления, возникающие вследствие изменения магнитного поля.

Точно так же и преобразование электромагнитной энергии в тепло часто бывает сосредоточено в основном в одном или нескольких участках цепи.

Рассмотрим в виде примера реостат. Он обладает наряду с сопротивлением r также некоторой емкостью между отдельными его витками и некоторой индуктивностью. Однако, если частота переменного тока невелика или вообще ток изменяется по любому закону достаточно медленно, то токи смещения, ответвляющиеся от участков проволоки в диэлектрике, ничтожны по сравнению с током проводимости в проволоке реостата. Этими токами смещения в таком случае можно пренебречь, что эквивалентно тому, что емкость C между участками проволоки реостата принимается равной нулю. Точно так же при низкой частоте тока или вообще при медленном его изменении можно пренебречь электродвижущей силой самоиндукции в реостате по сравнению с падением напряжения в его сопротивлении, что эквивалентно принятию равной нулю индуктивности L реостата. Иными словами, абстрагируясь от действительно сложной картины явления, мы допускаем, что реостат обладает только сопротивлением $r \neq 0$ и имеет $L = 0$ и $C = 0$. Заметим, что такой участок цепи можно характеризовать также его проводимостью $g = \frac{1}{r}$.

В качестве другого важного примера рассмотрим конденсатор. Вплоть до весьма высоких частот можно пренебречь индуктивностью L конденсатора и считаться только с его емкостью C . Если

в цепи имеется реостат и конденсатор, и энергия, поглощаемая в реостате, значительно превышает энергию, теряемую в диэлектрике конденсатора, то в первом приближении последней можно пренебречь или даже можно учесть ее при расчете соответствующим изменением сопротивления реостата. При такой абстракции мы допускаем, что конденсатор обладает емкостью $C \neq 0$, но для него $L = 0$ и $r = 0$.

Наконец важным примером является индуктивная катушка. Если частота тока в катушке не слишком велика, то можно пренебречь токами смещения между витками проволоки катушки по сравнению с током проводимости в самой катушке, т. е. пренебречь емкостью C между витками катушки. При не очень малой частоте можно пренебречь падением напряжения в сопротивлении проволоки катушки по сравнению с индуктируемой в ней э. д. с., т. е. положить равным нулю сопротивление катушки. При желании можно учесть сопротивление катушки, предположив условно, что последовательно с катушкой, имеющей $r = 0$, включен реостат, обладающий сопротивлением, равным сопротивлению проволоки действительной катушки. При такой абстракции мы полагаем, что катушка обладает индуктивностью $L \neq 0$ и имеет $r = 0$ и $C = 0$.

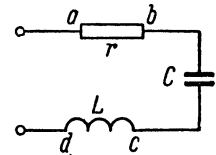


Рис. 3-5.

Пусть цепь (рис. 3-5) образована из последовательно соединенных реостата (участок ab), конденсатора (участок bc) и индуктивной катушки (участок cd). Будем предполагать, что преобразование электромагнитной энергии в тепло происходит только в реостате на участке ab , т. е. что на этом участке *сосредоточена* все сопротивление r цепи. Будем предполагать, что токи электрического смещения существуют только на участке bc между обкладками конденсатора, т. е. что в этом участке *сосредоточена* емкость C цепи. Наконец предположим, что переменный магнитный поток индуктирует э. д. с. только в катушке на участке cd , т. е. что в этом участке *сосредоточена* вся индуктивность L цепи.

Подобного рода электрические цепи, имеющие в общем случае значительно более сложную конфигурацию и содержащие различные элементы, называют электрическими цепями с *сосредоточенными параметрами*.

Практическое значение указанных научных абстракций исключительно велико. Приняв сделанные в них допущения, мы получаем возможность построить теорию электрических цепей с *сосредоточенными параметрами*, охватывающую огромный класс реальных электрических цепей, содержащих самые различные технические устройства. Сюда относятся все обычные электрические цепи при промышленной, а также при звуковой частоте, за исключением

длинных линий передачи энергии и протяженных линий связи. Многие электрические цепи, используемые в радиотехнике при весьма высоких частотах, также с большой точностью могут рассматриваться как цепи с сосредоточенными параметрами.

Чрезвычайно важно отдавать себе отчет о границах применимости подобных абстракций. Действительно, одна и та же реальная цепь может вести себя различно при разных частотах. Например, если при низкой частоте можно пренебречь емкостью между витками индуктивной катушки, то при очень высокой частоте такое допущение для той же катушки может привести к грубой ошибке и будет совершенно искажать действительную картину явления, так как при высоких частотах в действительных условиях токи смещения в диэлектрике около витков катушки могут быть сравнимы с током в проволоке катушки.

В качественном отношении зависимость от частоты тока и напряжения величин ошибок, которые могут быть получены при рассмотрении реальных цепей как цепей с сосредоточенными параметрами, ясна из изложенного в предыдущем и в настоящем параграфах. Количественный критерий допустимости подобного рассмотрения можно будет установить только после изучения переменного электромагнитного поля в конце последней части курса. Тогда мы вернемся к этому важному вопросу. Сейчас же только сформулируем этот критерий. Мы увидим, что переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью света. В воздухе эта скорость равна $v \approx 3 \cdot 10^8$ м/сек.

Электрическую цепь можно рассматривать как цепь с сосредоточенными параметрами, если скорости изменения напряжений и токов в цепи столь малы, что за время распространения электромагнитных волн вдоль всей цепи в любом направлении изменения напряжений и токов остаются малыми по сравнению с полными их изменениями в исследуемом режиме. При периодических токах и напряжениях это означает, что электромагнитная волна успевает пробежать вдоль всей цепи за ничтожную долю периода. В таких случаях можно не считаться с волновыми процессами, характеризующими переменное электромагнитное поле, и интересоваться в конденсаторах только изменением электрического поля, а в катушках только изменением магнитного поля.

В дальнейшем в настоящей главе будут рассматриваться цепи с сосредоточенными параметрами. В первых двенадцати главах второй части, а также во всех главах третьей части также будут рассматриваться цепи с сосредоточенными параметрами. Цепям с распределенными параметрами будут посвящены шестнадцатая и семнадцатая главы второй части.

3-5. Параметры электрических цепей. Линейные и нелинейные электрические и магнитные цепи

Из изложенного в предыдущих параграфах ясно, что основными параметрами электрических цепей являются сопротивление r , емкость C и индуктивность L . Если имеет место электромагнитное воздействие на данную цепь со стороны других цепей или даже если такое воздействие происходит внутри данной цепи со стороны одного ее участка на другой, то в число параметров цепи войдет еще взаимная индуктивность M .

Строго говоря, параметры цепи почти всегда в какой-то мере зависят от тока и от напряжения. Сопротивление r меняется с изменением тока хотя бы потому, что с изменением тока в проводниках изменяется их температура. Емкость конденсатора может зависеть от напряжения, если диэлектрическая проницаемость вещества диэлектрика в конденсаторе зависит от напряженности электрического поля. Индуктивность катушки зависит от тока, если магнитная проницаемость вещества сердечника катушки зависит от напряженности магнитного поля.

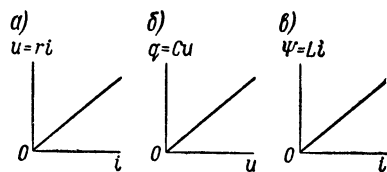


Рис. 3-6.

Однако во многих случаях эта зависимость выражена весьма слабо, ею можно пренебречь и полагать параметры цепи не зависящими ни от тока, ни от напряжения. В этих случаях x а р а к т е р и с т и к и элементов электрической цепи, т. е. зависимости напряжения u от тока i на участке с сопротивлением r , заряда q от напряжения u на конденсаторе с емкостью C и потокосцепления Ψ от тока i в катушке с индуктивностью L определяются на диаграммах прямыми линиями (рис. 3-6). Такие элементы цепи называют линейными. Процессы в цепях, содержащих только *линейные элементы*, описываются при постоянных токах *линейными* алгебраическими уравнениями, а при изменяющихся во времени токах *линейными* алгебраическими и дифференциальными уравнениями. Соответственно такие цепи называют *линейными электрическими цепями*. Вся вторая часть будет посвящена теории линейных электрических цепей.

Когда параметры элементов электрической цепи существенно зависят от тока или напряжения и, соответственно, характеристики этих элементов имеют на диаграммах криволинейный характер, то такие *элементы называют нелинейными*. Если электрическая цепь содержит хотя бы один нелинейный элемент, то она является *нелинейной электрической цепью*.

Магнитные цепи, содержащие участки из ферромагнитных материалов, как правило, нелинейны, так как магнитная проницаемость этих материалов зависит от напряженности магнитного поля.

Изучение нелинейных электрических и магнитных цепей имеет большое практическое значение в связи с широким использованием особых свойств таких цепей в современных электротехнических устройствах, особенно в устройствах автоматического управления и регулирования, в электроизмерительной технике, в радиотехнике и т. д. Явления в нелинейных цепях более сложны, чем в линейных, а поэтому более сложны и методы анализа явлений в нелинейных цепях. Основные положения теории нелинейных электрических и магнитных цепей будут рассмотрены в третьей части.

В дальнейшем в настоящей главе и во второй части будем предполагать, что параметры цепи не зависят от тока и напряжения, а также, если это не будет оговорено особо, — и от времени, т. е. что они постоянны.

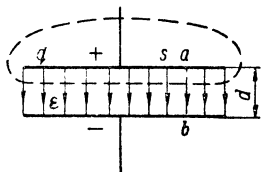


Рис. 3-7.

В виде примеров расчета величин C и L получим их выражения для некоторых простых элементов цепи.

Емкость плоского конденсатора определим, пренебрегая искажением поля у его краев. Применим постулат Максвелла к замкнутой поверхности, охватывающей заряд q одной пластины. След этой замкнутой поверхности изображен на рис. 3-7 пунктиром. Часть поверхности внутри конденсатора проведем нормально к линиям напряженности поля. Линии поля пересекают только эту часть замкнутой поверхности, равную поверхности пластины. Таким образом:

$$\oint \mathbf{D} ds = Ds = q \text{ и } E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon s}.$$

Разность потенциалов u_C пластин a и b конденсатора равна линейному интегралу вектора \mathbf{E} вдоль некоторого пути между пластинами. Пусть d — расстояние между пластинами. Выбирая путь интегрирования вдоль линии напряженности поля и замечая, что в однородном поле $E = \text{const}$, получим:

$$u_C = \int_a^b \mathbf{E} dl = \int_a^b E dl = E \int_a^b dl = Ed = \frac{q}{\epsilon s} d.$$

Следовательно,

$$C = \frac{q}{u_C} = \frac{\epsilon s}{d}.$$

Определим еще емкость отрезка концентрического кабеля длиной l с радиусом внутреннего провода r_1 и внутренним радиусом

наружного провода r_2 (рис. 3-8). Окружим внутренний провод замкнутой поверхностью, образованной цилиндрической поверхностью с радиусом r и двумя плоскими торцевыми поверхностями на концах отрезка кабеля. Поток вектора \mathbf{D} сквозь торцевые поверхности равен нулю. Применяя к этой замкнутой поверхности постулат Максвелла, получаем:

$$\oint \mathbf{D} ds = D 2\pi r l = q \quad \text{и} \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon 2\pi r l},$$

причем q — заряд рассматриваемого отрезка кабеля.

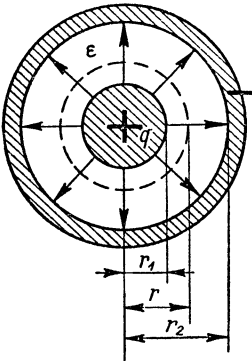


Рис. 3-8.

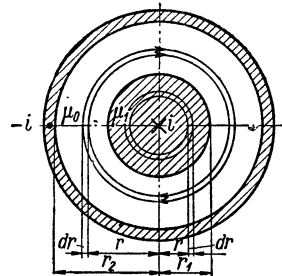


Рис. 3-9.

Разность потенциалов u_C между внутренним и наружным проводами определяется интегралом

$$u_C = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} dr = \frac{q}{\epsilon 2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

и, следовательно,

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Найдем выражение для индуктивности того же концентрического кабеля, полагая, что внутренний провод является прямым, а наружный обратным. На рис. 3-9 изображено магнитное поле в таком кабеле. Магнитным потоком в теле обратного провода пренебрежем ввиду малой толщины этого провода. Магнитное поле вне кабеля отсутствует, так как сумма токов в прямом и обратном проводах равна нулю и, следовательно, равен нулю линейный интеграл напряженности магнитного поля, взятый по любому контуру, охватывающему весь кабель. Таким образом, остается учесть поток

в изолирующем веществе и поток в теле внутреннего провода. Оба эти потока определяются только током i во внутреннем проводе. Рассматриваемый пример особенно интересен тем, что здесь необходимо рассчитать потокосцепление, которое определяется линиями магнитной индукции, проходящими в теле самого провода. Напряженность поля в изолирующем слое найдем из закона полного тока:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H 2\pi r = i; \quad H = \frac{i}{2\pi r}.$$

Напряженность поля в теле внутреннего провода получаем из этого закона, учтя, что магнитные линии здесь охватывают только часть тока, равную $i \frac{\pi r^2}{\pi r_1^2}$:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H 2\pi r = i \frac{r^2}{r_1^2}, \quad H = \frac{i}{2\pi r_1^2} r,$$

причем r — расстояние от оси кабеля до точки, в которой определяется \mathbf{H} . Последняя формула справедлива только при условии равномерного распределения тока по сечению провода, т. е., строго говоря, как увидим дальше, только при постоянном токе.

Разделим поток на кольцевые трубки, имеющие прямоугольное поперечное сечение $ds = l dr$, где l — длина отрезка кабеля. Поток сквозь сечение такой трубки равен:

$$d\Phi = B ds = \mu H l dr.$$

Трубки магнитной индукции, расположенные в слое изоляции, сцепляются один раз со всем током i , и, следовательно, положив для вещества изоляции $\mu = \mu_0$, для этих трубок имеем:

$$d\Psi = d\Phi = \mu_0 \frac{i}{2\pi r} l dr.$$

Потокосцепление Ψ' , определяемое линиями магнитной индукции, расположенными в изолирующем слое, равно:

$$\Psi' = \int_{r_1}^{r_2} \mu_0 \frac{i}{2\pi} l \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} i l \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Трубки магнитной индукции, расположенные в теле внутреннего провода, сцепляются только с частью тока, равной $i \frac{r^2}{r_1^2} = i_r$. Если весь провод рассматривать как один виток, то отношение i_r/i представляет собой часть витка, охватываемую данной трубкой магнитной индукции. Поэтому поток $d\Phi$ в трубке дает потокосцепление $d\Psi$ со всем током i , равное:

$$d\Psi = \frac{i_r}{i} d\Phi = \frac{r^2}{r_1^2} \mu \frac{i}{2\pi r_1^2} r l dr = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i l}{r_1^4} r^3 dr,$$

где μ — абсолютная магнитная проницаемость материала провода. Потокосцепление Ψ'' , определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися в теле провода, имеет значение:

$$\Psi'' = \int_0^{r_1} \frac{\mu}{2\pi r_1^2} il r^3 dr = \frac{\mu}{8\pi} il.$$

Искомая индуктивность выражается формулой:

$$L = \frac{\Psi' + \Psi''}{i} = \frac{l}{2\pi} \left(\mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu}{4} \right).$$

Из приведенных примеров ясны высказанные в § 1-8 и 1-11 общие положения, что емкость C определяется величиной ϵ среды, где существует электрическое поле, и геометрическими размерами, а индуктивность L определяется абсолютными магнитными проницаемостями μ сред, в которых существует магнитное поле, и геометрическими размерами.

3-6. Связи между напряжением и током в основных элементах электрической цепи

Обратимся вновь к простой электрической цепи, изображенной на рис. 3-5.

Первый участок цепи ab мы охарактеризовали сопротивлением r . Зная r , при заданном токе i можно, пользуясь законом Ома, найти напряжение u_r , необходимое для преодоления сопротивления этого участка цепи, а именно:

$$u_r = ri.$$

Второй участок цепи bc представляет собою конденсатор. Зная емкость конденсатора C , можно при заданной величине его заряда q найти напряжение u_C из соотношения $u_C = \frac{q}{C}$. Между током i и зарядом q существует связь $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$. Следовательно,

$$q = \int_0^t idt + q(0),$$

где $q(0)$ — заряд конденсатора в момент $t=0$, т. е. в момент, от которого мы начинаем отсчет времени. Соответственно:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt + \frac{q(0)}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0),$$

где $u_C(0)$ — напряжение на конденсаторе в начальный момент времени $t = 0$.

Третий участок цепи cd представляет собой индуктивную катушку. Зная индуктивность катушки L , можно при заданном токе определить величину потокосцепления самоиндукции $\Psi_L = Li$ и при заданной скорости изменения тока di/dt найти величину э. д. с. самоиндукции $e_L = -L \frac{di}{dt}$, возникающей в цепи, а также величину напряжения $u_L = -e_L = +L \frac{di}{dt}$ на зажимах катушки.

Выражая ток i в катушке и поток Ψ_L в ней через напряжение u_L на ее зажимах, получим:

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i(0) \text{ и } \Psi_L = Li = \int_0^t u_L dt + \Psi_L(0),$$

где $i(0)$ и $\Psi_L(0) = Li(0)$ — ток и поток в начальный момент времени $t = 0$.

При наличии взаимной индуктивности соответственно будем иметь $\Psi_{1M} = Mi_2$, $e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}$ и $u_{1M} = -e_{1M} = +M \frac{di_2}{dt}$. Выражая ток i_2 и поток $\Psi_{1M} = Mi_2$ через напряжение u_{1M} , найдем:

$$i_2 = \frac{1}{M} \int_0^t u_{1M} dt + i_2(0) \text{ и } \Psi_{1M} = Mi_2 = \int_0^t u_{1M} dt + \Psi_{1M}(0).$$

Напряжение на любом участке цепи равно линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль этого участка. Так как мы полностью пренебрегли электродвижущими силами, индуцируемыми переменными магнитными потоками в первом и во втором участках, то электрическое поле около этих участков является *потенциальным*. Следовательно, в выражениях

$$u_r = \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l} \text{ и } u_c = \int_b^c \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

пути интегрирования между точками a и b и между точками b и c могут быть заданы произвольно. Эти пути только не должны проходить через область магнитного поля катушки. В частности, они могут проходить вдоль проволоки реостата и внутри диэлектрика конденсатора. Но они могут пролегать и около реостата или около конденсатора, где также существует электрическое поле.

В выражении

$$u_L = \int_c^d \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

интеграл должен быть взят также вдоль пути, не проходящего в магнитном поле катушки, но отнюдь не вдоль проволоки катушки. Поясним это положение. Для простоты рисунка предположим, что катушка имеет один виток, совмещенный с плоскостью рисунка (рис. 3-10). Магнитный поток Φ , сцепляющийся с витком, проходит сквозь площадь, охватываемую витком и заштрихованную на рисунке. Линейный интеграл напряженности электрического поля, взятый по пути cmd внутри проволоки витка, равен нулю, так как мы полностью пренебрегли сопротивлением витка, а следовательно, напряженность электрического поля внутри материала проволоки равна нулю.

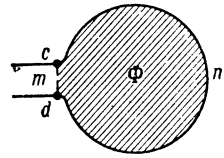


Рис. 3-10.

Согласно закону электромагнитной индукции, имеем:

$$\oint_{cmdc} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как $\int_{cnd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$, то $\int_{dmc} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$

и

$$\int_{cmd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = + \frac{d\Phi}{dt} = + \frac{dLi}{dt} = L \frac{di}{dt} = u_L.$$

При сделанных допущениях и оговорках мы можем, согласно сказанному в § 1-8 и 1-12, применять для величин u_r , u_C и u_L наряду с термином *напряжения* также и термин *разность потенциалов*.

3-7. Условные положительные направления тока и э. д. с. в элементах цепи и напряжения на их зажимах

При анализе процессов в электрической цепи необходимо обязательно задаться *условными положительными направлениями* токов и э. д. с. в элементах цепи и напряжений на их зажимах, обозначив такие направления на рисунке стрелками. Эти условные положительные направления можно задать произвольно. Действительные мгновенные значения тока i , напряжения u и э. д. с. e будут положительны, если действительные направления тока, напряжения и э. д. с. в данный момент времени совпадают с условно заданными их положительными направлениями. В дальнейшем для краткости часто вместо слов «условное положительное направление»

будем говорить «положительное направление», всегда понимая под этим, если не оговорено особо, именно «условное положительное», а не «действительное» направление соответствующей величины.

Иногда удобно выражать условное положительное направление токов, напряжений или э. д. с. не стрелками, а двойными индексами у их буквенного обозначения (i_{12} , u_{12} , e_{12} , i_{ab} , u_{ab} , e_{ab}). Эти индексы должны соответствовать обозначениям точек на графическом изображении цепи, причем положительным считается направление от точки цепи, отвечающей первому индексу, к точке цепи, отвечающей второму индексу. Например, $u_{ab} > 0$, когда действительное напряжение направлено от точки a к точке b .

Приняв приведенные в предыдущем параграфе связи между u_r и i , между q и u_C и между u_L и di/dt , мы должны считать условные

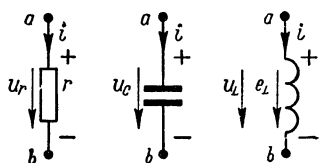


Рис. 3-11.

положительные направления тока, напряжения и э. д. с. в каждом отдельном элементе цепи ориентированными в одну и ту же сторону, что показано стрелками на рис. 3-11.

В самом деле, согласно связи $u_{ab} = r i_{ab}$, величины $u_r = u_{ab}$ и $i = i_{ab}$ должны быть при $r > 0$ одного знака, т. е. одновременно положительны

(случай знаков «+» и «—» на рис. 3-11) или одновременно отрицательны, что и соответствует одинаковому выбору их условных положительных направлений, т. е. одинаковому направлению стрелок. Это соответствует также тому, что всегда мощность $p_r = u_r i > 0$.

Для конденсатора имеем связь $u_{ab} = q_a/C$, так как для того, чтобы было $C > 0$, как сказано в § 1-8, необходимо брать заряд той пластины, от которой отсчитывается напряжение, т. е.

$$C = \frac{q_a}{u_a - u_b} = \frac{q_b}{u_b - u_a}.$$

Согласно этой связи величины u_{ab} и q_a — одного знака. Пусть в некоторый момент времени ток имеет действительное направление от зажима a к зажиму b , т. е. $i_{ab} > 0$. Пусть конденсатор заряжается, т. е. $q_a > 0$ (случай знаков «+» и «—» на рис. 3-11), а следовательно, и $u_C = u_{ab} > 0$, что соответствует выбору условных положительных направлений i и u_C , т. е. выбору стрелок, в одном направлении. Это соответствует также тому, что при зарядке конденсатора энергия поступает в него и мощность на его зажимах положительна: $p_C = u_C i > 0$.

Для катушки имеем связь $u_L = +L \frac{di}{dt}$, причем всегда $L > 0$, так как $L = \frac{\Psi_L}{i}$, а поток самоиндукции Ψ_L и ток в катушке i всегда

одного знака — направление тока и направление линий потока самоиндукции связаны между собой правилом правого винта. Если ток имеет действительное направление от зажима a к зажиму b , то $i_{ab} > 0$. Пусть при этом ток возрастает, т. е. $\frac{di}{dt} > 0$; тогда и $u_L = u_{ab} > 0$ (случай знаков «+» и «-» на рис. 3-11).

Таким образом, и в случае катушки, выбрав связь $u_L = +L \frac{di}{dt}$, мы тем самым выбираем условные положительные направления тока i и напряжения u_L , т. е. направления их стрелок, в одну сторону. Все это соответствует также тому, что при возрастании положительного тока, т. е. при возрастании абсолютного значения тока, увеличивается энергия магнитного поля в катушке и мощность на ее зажимах положительна: $p_L = u_L i > 0$.

Условное положительное направление для э. д. с. e_L следует принимать таким же, как и для u_L , так как при этом в согласии со связью $e_L = -u_L = -L \frac{di}{dt}$ всегда действительные направления величин e_L и u_L будут противоположны, т. е. если, например, действительное направление u_L на зажимах катушки будет по ее стрелке (от «+» к «-» на рис. 3-11), то действительное направление e_L в катушке в тот же момент времени окажется против ее стрелки (от «-» к «+» на рис. 3-11). Напряжение u_L , как было разъяснено в предыдущем параграфе, следует брать по пути между зажимами катушки, вне ее магнитного поля, например, от зажима c к зажиму d по пути ctd на рис. 3-10.

Рассмотрим теперь взаимную индуктивность M между двумя контурами. Важно иметь в виду, что если для всякого электрического контура $L > 0$, то взаимная индуктивность M может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, равной нулю, так как знаки потоков взаимной индукции зависят при выбранных положительных направлениях токов в контурах также еще и от взаимного расположения контуров. Положительные направления токов в обоих контурах всегда можно выбрать произвольно. Раз эти направления выбраны, то величину M мы должны считать положительной, когда при положительных токах потоки взаимной индукции, сцепляющиеся с контурами, оказываются также положительными, т. е. совпадают по знаку с потоками самоиндукции. Иными словами, $M > 0$, если при положительных токах магнитные потоки в контурах направлены согласно, и $M < 0$, если при положительных токах потоки направлены встречно.

При этих условиях, исходя из принятых в § 1-11 выражений для э. д. с. взаимной индукции $e_{1M} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$ и $e_{2M} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$ и принимая связи между напряжениями и э. д. с. в виде

$u_{1M} = -e_{1M} = +M \frac{di_2}{dt}$ и $u_{2M} = -e_{2M} = +M \frac{di_1}{dt}$ (с учетом, что $M_{12} = M_{21} = M$), мы должны условные положительные направления для этих величин принять такими же, как и для u_{1M} и u_{2M} , т. е. совпадающими с условными положительными направлениями токов i_1 и i_2 , что и показано стрелками на рис. 3-12.

Часто вместо этого маркируют один из зажимов каждой катушки звездочкой (*) (рис. 3-12). Это значит, что если положительное направление тока в обмотке одной из катушек принято от звездочки, то и положительное направление напряжения на зажимах другой катушки и э. д. с. взаимной индукции в ней также принимается от звездочки.

Соответственно выбранным положительным направлениям токов i_1 и i_2 , или соответственно выбранной маркировке звездочками, должен быть задан знак взаимной индуктивности, например, $M = +0,5$ гн или $M = -0,5$ гн.

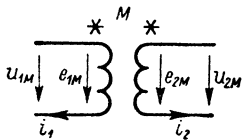


Рис. 3-12.

Мы будем стремиться, как правило, выбирать положительное направление токов i_1 и i_2 и маркировку звездочками согласованными между собой, как это сделано на рис. 3-12. При этом то и другое обозначения

взаимно заменяют друг друга. Если бы в особых случаях выбор положительных направлений токов оказался не согласованным с маркировкой звездочками, а знак M мы по-прежнему связали бы с маркировкой звездочками, то это значило бы, что надо писать

$$u_{1M} = -e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}$$

и

$$u_{2M} = -e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Некоторые авторы предпочитают считать всегда $M > 0$. Однако это приводит к ряду трудностей и, в частности, к необходимости всегда писать $u_{1M} = -e_{1M} = \pm M \frac{di_2}{dt}$, ставя знак «+», если при $i_1 > 0$ и $i_2 > 0$ включение согласное, а знак «-», если при $i_1 > 0$ и $i_2 > 0$ включение встречное. Маркировка звездочками при этом означает, что если оба тока в действительности направлены от звездочек, то включение согласное.

Неудобство при этом возникает, если индуктивно связаны три катушки или более. Тогда для каждой пары катушек в общем случае надо ставить свои значки, например, в случае трех катушек на рис. 3-13 для первой и второй катушек — звездочки, для второй и третьей квадратики, для третьей и первой треугольники, так как принимается $M_{12} > 0$, $M_{13} > 0$ и $M_{23} > 0$. При четырех катушках, изображенных на рис. 3-14, пришлось бы уже пользоваться шестью разными обозначениями. Если же придерживаться принятого выше правила, что M есть алгебраическая величина, то достаточно при любом числе магнитно связанных катушек поставить на одном из зажимов каждой из них только звездочку и считать что M_{12} , M_{13} , M_{23} и т. д. имеют заданные

знаки. В частности, для случаев на рис. 3-15 и 3-16 все величины M отрицательны.

Неудобство считать всегда $M > 0$ возникает также в случае, когда величина M является функцией времени, что мы имеем, например, во всех электрических машинах. При этом в наших обозначениях, если принимать M алгебра-

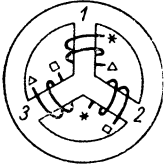


Рис. 3-13.

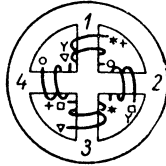


Рис. 3-14.

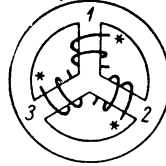


Рис. 3-15.

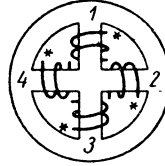


Рис. 3-16.

ической величиной, могущей быть положительной и отрицательной, получаем простое выражение:

$$e_{1M} = -\frac{d\Psi_{1M}}{dt} = -\frac{dMi_2}{dt} = -M\frac{di_2}{dt} - i_2\frac{dM}{dt}.$$

Если же считать всегда $M > 0$, то следует писать

$$e_{1M} = \mp M\frac{di_2}{dt} \mp i_2\frac{dM}{dt}.$$

Пусть, например, виток (контур 1) вращается в однородном поле внутри катушки (контур 2) с угловой скоростью Ω . Пусть ток i_2 изменяется во времени по закону $i_2 = I_{2m} \sin \omega t$. Считая M алгебраической величиной, следует положить $M = M_0 \cos \Omega t$, где $M_0 > 0$ есть максимальное значение M . Поток взаимной индукции, сцепляющийся с вращающимся витком, равен:

$$\Psi_{1M} = Mi_2 = M_0 I_{2m} \cos \Omega t \sin \omega t.$$

Имеем:

$$e_{1M} = -\frac{d\Psi_{1M}}{dt} = -M_0 \cos \Omega t \cdot \omega I_{2m} \cos \omega t + I_{2m} \sin \omega t \cdot \Omega M_0 \sin \Omega t.$$

Если же считать всегда $M > 0$, то следует положить $M = M_0 |\cos \Omega t|$,

$$\Psi_{1M} = \pm Mi_2 = \pm M_0 I_{2m} |\cos \Omega t| \sin \omega t$$

и, соответственно,

$$e_{1M} = -\frac{d\Psi_{1M}}{dt} = \mp M_0 |\cos \Omega t| \cdot \omega I_{2m} \cos \omega t \mp I_{2m} \sin \omega t \cdot M_0 \frac{d}{dt} |\cos \Omega t|.$$

Большое и ненужное усложнение в последнем случае является результатом отхода от сущности явления. По самой физической сущности всегда только $L > 0$, величина же M может иметь любой знак.

3-8. Источники э. д. с. и источники тока

Источники энергии в электрических цепях принято рассматривать как источники э. д. с. или как источники тока. К источникам э. д. с. обычно относят источники электромагнитной

энергии, в которых э. д. с. e не зависит или практически не зависит от тока, идущего от источника в приемник, и внутреннее сопротивление $r_{вн}$ которых мало, так что напряжение $u = e - ir_{вн}$ на зажимах источника сравнительно мало изменяется в пределах изменения тока от нуля до номинального $i_{н}$. На рис. 3-17 приведена так называемая *внешняя характеристика*, т. е. зависимость $u = f(i)$, такого источника при $e = \text{const}$ и $r_{вн} = \text{const}$. Она представляет собой прямую линию. Линейная цепь должна содержать только источники э. д. с. с такой линейной характеристикой. Если $r_{вн} = 0$ и $e = \text{const}$, то $u = e = \text{const}$, и такой источник мы будем называть *идеальным источником э. д. с.* Если в случае реального источника, имеющего $r_{вн} \neq 0$, условно вынести его внутреннее

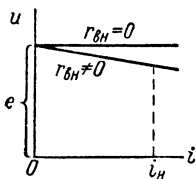


Рис. 3-17.

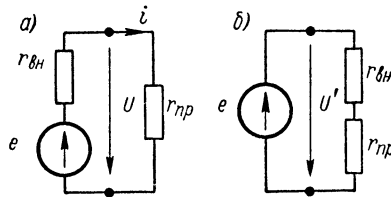


Рис. 3-18.

сопротивление, то получим условное изображение источника э. д. с., приведенное на рис. 3-18, а. Необходимо указать стрелкой положительное направление э. д. с. e . В общем случае это есть условное положительное направление э. д. с., так как э. д. с. может быть переменной, например, периодической величиной. Если теперь отнести $r_{вн}$ к приемнику, добавив его к сопротивлению приемника (рис. 3-18, б), то цепь будет рассматриваться как содержащая идеальный источник э. д. с.

В случае, когда характеристика $u = f(i)$ криволинейна, что может быть, если величина e нелинейно зависит от i , или когда $r_{вн}$ зависит от i , то цепь, содержащая такой источник, является нелинейной цепью. Во второй части, посвященной теории линейных электрических цепей, мы будем предполагать, что источники э. д. с. обладают линейной характеристикой. Источниками э. д. с. в указанном смысле являются, например, аккумуляторы, гальванические элементы, вращающиеся электрические генераторы постоянного тока.

К источникам тока обычно относят источники электромагнитной энергии, в которых ток не зависит или практически не зависит от напряжения u , которое создается источником на зажимах приемника. Условимся в дальнейшем заданный ток источника тока обозначать буквой \mathcal{I} , чтобы отличать его от токов i в приемнике и в различных его участках. Это будет соответствовать принятому отли-

чению обозначения заданной э. д. с. e источника э. д. с. от обозначения напряжения u на зажимах приемника и на его различных участках. Предполагается, что источник тока имеет достаточно малую внутреннюю проводимость $g_{вн}$, так что ток $i = \mathcal{I} - u g_{вн}$, поступающий в приемник, мало изменяется в пределах изменения напряжения u от нуля до номинального u_n . На рис. 3-19 показана внешняя линейная характеристика $i = f(u)$ источника тока при $\mathcal{I} = \text{const}$ и $g_{вн} = \text{const}$. Здесь же приведена характеристика идеального источника тока, имеющего $\mathcal{I} = \text{const}$ и $g_{вн} = 0$, при котором $i = \mathcal{I} = \text{const}$.

Если условно вынести проводимость $g_{вн}$, то получим условное изображение источника тока, приведенное на рис. 3-20. Необходи-

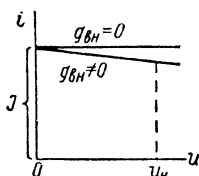


Рис. 3-19.

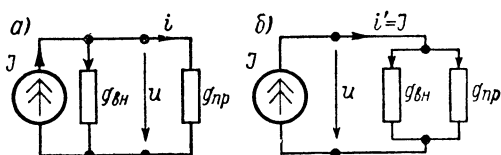


Рис. 3-20.

димо указать стрелкой условное положительное направление тока \mathcal{I} . Если отнести проводимость $g_{вн}$ к приемнику, добавив ее к проводимости $g_{пр}$ приемника (рис. 3-20, б), то цепь будет рассматриваться как содержащая идеальный источник тока. При изучении теории линейных цепей мы будем предполагать, что источники тока обладают линейной характеристикой. Источниками тока в указанном смысле являются, например, источники энергии, основанные на излучении заряженных частиц, выделяющихся при радиоактивном распаде вещества, так как при этом ток источника определяется скоростью распада.

Сказанное относилось к физической классификации источников электромагнитной энергии. Однако для удобства расчета электрических цепей весьма полезно производить замену источника э. д. с. эквивалентным источником тока или выполнять обратную замену источника тока эквивалентным источником э. д. с., хотя при этом и не будут соблюдаться вышеуказанные свойства, что выходной ток i эквивалентного источника тока или выходное напряжение u эквивалентного источника э. д. с. мало меняются с изменением нагрузки приемника в заданных пределах.

Источники э. д. с. и тока являются эквивалентными, если они обладают одной и той же внешней характеристикой $u = f(i)$ [или $i = f(u)$]. При присоединении к ним приемника с некоторым сопротивлением $r_{пр} = \frac{1}{g_{пр}}$ напряжение u и ток i в приемнике будут

в обоих случаях одинаковы. Иными словами, режим в приемнике не должен изменяться при замене источника э. д. с. эквивалентным источником тока и наоборот. Получим условия, которым должны удовлетворять эквивалентные источники э. д. с. и тока. Уравнение внешней характеристики источника э. д. с. имеет вид: $u = e - ir_{\text{вн}}$ или $i = \frac{e}{r_{\text{вн}}} - u \frac{1}{r_{\text{вн}}}$. Уравнение внешней характеристики источника тока имеет вид $i = \mathcal{I} - ug_{\text{вн}}$. Эти внешние характеристики совпадут при соблюдении условий:

$$\mathcal{I} = \frac{e}{r_{\text{вн}}} \text{ и } g_{\text{вн}} = \frac{1}{r_{\text{вн}}}.$$

По этим равенствам можно вычислить параметры \mathcal{I} и $g_{\text{вн}}$ источника тока, эквивалентного заданному источнику э. д. с., имеющему параметры e и $r_{\text{вн}}$. Соответственно, из соотношений

$$e = \frac{\mathcal{I}}{g_{\text{вн}}} \text{ и } r_{\text{вн}} = \frac{1}{g_{\text{вн}}}$$

можно получить параметры источника э. д. с., эквивалентного заданному источнику тока. Выше рассматривались источники постоянных э. д. с. и источники постоянного тока. Источники переменной во времени э. д. с. и источники переменного тока будут рассмотрены во второй и третьей частях курса.

3-9. Схемы электрических цепей. Элементы схемы цепи

Для расчета процессов в электрической цепи ее изображают на рисунке в виде так называемой схемы цепи.

Схемой электрической цепи называют графическое изображение электрической цепи, показывающее последовательность соединения ее участков и отображающее свойства рассматриваемой электрической цепи.

Условные изображения на схеме цепи основных элементов электрической цепи r , C , L и M были приведены на рис. 3-11 и 3-12. Условные изображения на схеме цепи источников э. д. с. и тока были даны на рис. 3-18 и 3-20.

Электрическая цепь и, соответственно, ее схема имеют в общем случае ветви и узлы.

Ветвью электрической цепи и, соответственно, ее схемы называют весь участок электрической цепи, в котором в любой момент времени ток имеет одно и то же значение вдоль всего участка.

Ветвь может содержать любое число последовательно соединенных элементов цепи: участков с сопротивлением, конденсаторов, индуктивных катушек, источников э. д. с. При этом *последователь-*

ным соединением участков электрической цепи называют соединение, при котором через все участки цепи проходит один и тот же ток. Примером схемы цепи с последовательным соединением участков является схема, изображенная на рис. 3-5.

Узел электрической цепи и, соответственно, ее схемы называют место соединения трех или большего числа ветвей. На схеме узел изображают точкой.

Параллельным соединением участков (ветвей) электрической цепи называют соединение, при котором все участки (ветви) цепи присоединяются к одной паре узлов, и на всех этих участках (ветвях) имеется одно и то же напряжение. Примером схемы цепи с параллельным соединением участков является схема, изображенная на рис. 3-20.

Смешанным соединением участков электрической цепи называют сочетание последовательного и параллельного соединения (пример — схема на рис. 3-31).

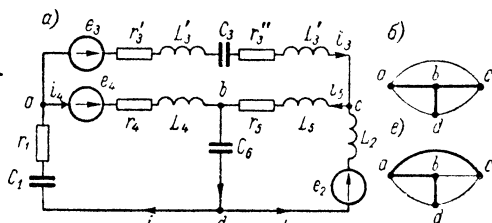


Рис. 3-21.

Более сложные электрические цепи могут не сводиться к последовательному и параллельному соединению участков (пример — схемы цепей на рис. 3-21, а и 3-22, а).

Электрическую цепь называют плоской (планарной), если она может быть изображена на плоскости в виде схемы с непересекающимися ветвями. Пример схемы плоской цепи дан на рис. 3-21, а; на рис. 3-22, а изображена неплоская (непланарная) цепь.

Контуром электрической цепи называют любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям. Пример — контур $abca$ на рис. 3-22, а.

Важным топологическим понятием электрической цепи является дерево электрической цепи. Дерево образуется совокупностью соединенных друг с другом ветвей, образующих один, в общем случае разветвленный путь по схеме, выбранных так, что они соединяют все узлы и не образуют замкнутых контуров. Одна и та же сложная цепь может иметь различные деревья. На рис. 3-21, б, в и 3-22, б, в, жирными линиями показаны по два варианта из числа возможных деревьев для цепей, изображенных на рис. 3-21, а и 3-22, а. При этом на топологической схеме цепи ветви изображаются линиями без изображения конкретных элементов, входящих в эти ветви. Ветви, входящие в дерево, называют главными ветвями. Остальные ветви называют дополнительными ветвями, или

х о р д а м и (тонкие линии на рис. 3-21, б, в и 3-22, б, в). Если цепь имеет q узлов, то главных ветвей в любом дереве будет $q - 1$. Если всего ветвей в цепи p , то дополнительных ветвей будет $n = p - q + 1$.

Заметим, что на топологической схеме источники э. д. с. и тока не изображаются. При этом ветвь с источником э. д. с. сохраняется.

Ветви же с идеальными источниками тока вообще не входят в топологическую схему, так как внутренняя проводимость таких источников равна нулю и, соответственно, сопротивление таких ветвей равно бесконечности.

В заключение отметим, что любая часть электрической цепи, имеющая два зажима (полюса), называется двухполюсником. Двухполюсник условно на схеме

изображают прямоугольником с двумя выводами (рис. 3-23). Рассмотрение целой части как одного двухполюсника полезно при выяснении общих свойств этих частей цепи. Различают активные (рис. 3-23, а) и пассивные (рис. 3-23, б) двухполюсники.

Активным называют двухполюсник, содержащий источники электрической энергии; в случае линейного двухполюсника обязательным дополнительным условием при этом является наличие на его разомкнутых зажимах напряжения, обусловленного источниками электрической энергии внутри него, т. е. необходимо, чтобы действия этих источников энергии не компенсировались взаимно внутри двухполюсника.

Пассивным называют двухполюсник, не содержащий источников электрической энергии; в случае линейного двухполюсника он может содержать источники электрической энергии, взаимно компенсирующиеся таким образом, что напряжение на его разомкнутых зажимах равно нулю.

Оговорка о возможности наличия взаимно компенсирующихся источников, при которых двухполюсник остается пассивным, необходима, так как сама идея представления целой части цепи как двухполюсника заключается в рассмотрении общих свойств этой части цепи лишь со стороны ее входных зажимов. Эта оговорка относится исключительно к линейным цепям, потому что в нелинейных цепях такая компенсация может быть только для одного или только для нескольких определенных режимов и не будет иметь

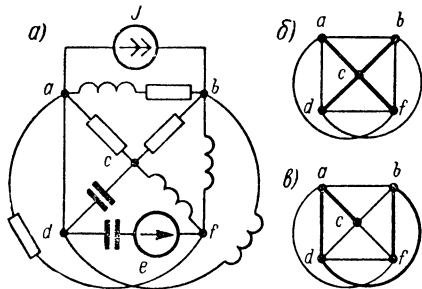


Рис. 3-22.

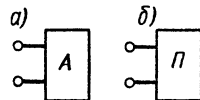


Рис. 3-23.

места для других режимов, так как параметры нелинейной цепи зависят от тока или напряжения.

В тринадцатой главе второй части мы введем аналогично понятие четырехполюсника как обобщенного элемента цепи.

3-10. Законы электрических цепей. Дифференциальные уравнения, описывающие процессы в цепях с сосредоточенными параметрами

При расчете электрических цепей используются два закона Кирхгофа. Рассмотрим их в применении к цепи с сосредоточенными параметрами.

Первый закон Кирхгофа применяется к узлам электрической цепи. Он вытекает из принципа непрерывности электрического тока (§ 1—7). Охватим узел цепи замкнутой поверхностью s (рис. 3-24). В соответствии с принятыми допущениями вся электрическая емкость в цепи с сосредоточенными параметрами предполагается сосредоточенной в конденсаторах, включенных в цепь. Это соответствует пренебрежению токами электрического смещения, отходящими от соединительных проводов к другим участкам цепи. Таким образом, сквозь замкнутую поверхность s (рис. 3-24) проходят только токи проводимости в проводниках, пересекающих эту поверхность. Согласно принципу непрерывности тока в данном случае получаем:

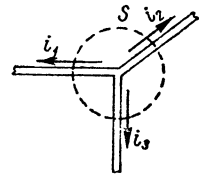


Рис. 3-24.

$$\oint_s \delta ds = i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

При любом числе n ветвей, присоединенных к узлу цепи, имеем:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0,$$

т. е. *сумма токов, расходящихся от узла электрической цепи, равна нулю*, что и является формулировкой первого закона Кирхгофа.

При составлении уравнений согласно первому закону Кирхгофа необходимо задаться условными положительными направлениями токов во всех ветвях, обозначив их на схеме стрелками. В левой части уравнения следует ставить знак «плюс» перед буквенными обозначениями токов, положительное направление которых принято от узла, и знак «минус» перед буквенными обозначениями токов, положительное направление которых принято к узлу. Для случая на рис. 3-24 перед всеми токами в уравнении следует

поставить знак плюс, как это написано выше. В случае же представленном на рис. 3-25, следует писать:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Если в результате расчета будет получено для некоторого тока в некоторый момент времени положительное число ($i_k > 0$), то это значит, что ток имеет в данный момент времени действительное направление согласно стрелке. Если же будет получено $i_k < 0$, то этот ток в действительности направлен против стрелки.

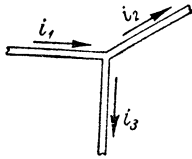


Рис. 3-25.

Второй закон Кирхгофа применяется к контурам электрической цепи. Он вытекает из полученного в § 1-12 соотношения:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{\text{стор}} d\mathbf{l}.$$

Величина $\oint \mathbf{E}_{\text{стор}} d\mathbf{l}$ равна сумме э. д. с. $\sum e_{\text{стор}}$ источников сторонних э. д. с., действующих в контуре. Величина $\oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l}$ включает в себя все индуцированные в контуре э. д. с. — как э. д. с. генераторов, действующих на принципе электромагнитной индукции, так и э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции, индуцируемых в катушках, включенных в контур. Например, для катушки $e_L = -L \frac{di}{dt}$. Если условиться справа в величину $\oint \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l}$ включать только сумму $\sum e_{\text{инд}}$ э. д. с. генераторов, рассматриваемых как источники энергии, то э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции, индуцируемые в катушках, должны быть перенесены в левую часть уравнения и учтены в величине $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$ как падения напряжения на зажимах катушек. Например, для катушки слева появится член $u_L = +L \frac{di}{dt}$. Слева в величину $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$ входят также падения напряжения ri на сопротивлениях, входящих в контур, и падения напряжения $u_C = \frac{q}{C}$ на содержащихся в контуре конденсаторах. Обозначив сумму э. д. с. источников энергии, действующих во всех n ветвях контура, в виде

$$\sum_{k=1}^{k=n} e_k = \sum_{k=1}^{k=n} e_{k \text{ стор}} + \sum_{k=1}^{k=n} e_{k \text{ инд}},$$

будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} e_k.$$

Итак, второй закон Кирхгофа гласит: *сумма падений напряжения во всех ветвях любого замкнутого контура электрической цепи равна сумме э. д. с. источников энергии, действующих в этом контуре.*

Если в k -й ветви содержатся в общем случае участок с активным сопротивлением r_k , катушка с индуктивностью L_k и конденсатор с емкостью C_k (рис. 3-26), то падение напряжения вдоль всей этой ветви будет складываться из падений напряжений u_{rk} , u_{Lk} и u_{Ck} на этих элементах, т. е. $u_k = u_{rk} + u_{Lk} + u_{Ck}$. Согласно полученным в § 3-6 выражениям, для этих падений напряжений мы можем написать:

$$u_k = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{q_k}{C_k} = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{Ck}(0).$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа должны быть заданы положительные направления токов i_k и э. д. с. e_k источников энергии во всех ветвях. Положительные направления падений напряжений u_k считаем совпадающими с положительными направлениями токов i_k . Выбрав затем некоторое направление обхода контура, мы должны при составлении суммы падений напряжений $\sum_{k=1}^n u_k$ и суммы э. д. с. $\sum_{k=1}^n e_k$ ставить перед буквенными обозначениями величин u_k и e_k знак «плюс», если положительное направление этих величин совпадает с направлением обхода контура, и знак «минус» в противоположном случае.

Пусть цепь состоит из p ветвей и имеет q узлов.

Если заданы э. д. с. всех источников в цепи и сопротивления всех ветвей, то неизвестными являются p токов в ветвях. Применяя к каждому из узлов первый закон Кирхгофа, мы получим q уравнений, причем только $(q - 1)$ из них независимы друг от друга. Независимость уравнений для первых $(q - 1)$ узлов вытекает из того, что всегда можно установить такой порядок выбора этих узлов, при котором каждый последующий узел будет отличаться от предыдущих по крайней мере одной новой ветвью. Для этого, приняв один из узлов за исходный, к нему следует добавлять один за другим соседние узлы с наименьшим числом новых ветвей, как это указано, например, на топологической схеме, изображенной на рис. 3-27. При этом последний q -й узел новых ветвей содержать не может. Суммируя уравнения для первых $(q - 1)$ узлов, мы увидим, что все токи, кроме токов, сходящихся в последнем q -м узле, сократятся, так как каждый из них войдет в сумму два раза и притом

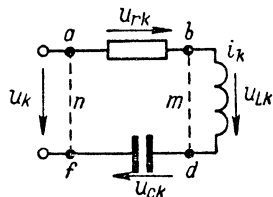


Рис. 3-26.

с различными знаками, а токи, сходящиеся в q -м узле, войдут в эту сумму по одному разу, и в результате получится уравнение, гласящее, что сумма токов, сходящихся в q -м узле, равна нулю, т. е. уравнение для последнего q -го узла. В связи с этим мы будем

говорить, что цепь с q узлами имеет лишь $(q - 1)$ независимых узлов.

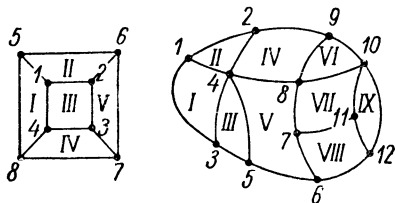


Рис. 3-27.

Применяя второй закон Кирхгофа, можно составить столько уравнений, сколько имеется замкнутых контуров в цепи. Однако при этом одни уравнения могут оказаться следствиями других. Независимость уравнений, или, как говорят, независимость контуров, будет обеспечена, если эти контуры выбирать так, чтобы каждый последующий отличался от предыдущих по крайней мере одной новой ветвью. Число n независимых контуров должно быть равно $(p - q + 1)$. Справедливость равенства $n = (p - q + 1)$ очевидна для цепи, состоящей из трех ветвей и имеющей два узла (рис. 3-28).

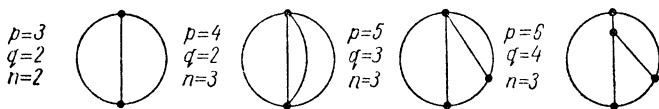


Рис. 3-28.

Присоединяя к этой цепи новую ветвь между двумя узлами или между узлом и произвольной точкой цепи или, наконец, между произвольными точками цепи, мы увеличиваем число независимых контуров на единицу, причем $(p - q + 1)$ увеличивается также на единицу. Таким образом, во всех этих случаях соотношение $n = p - q + 1$ сохраняет свою силу, откуда и вытекает справедливость его для любой сложной цепи.

Из изложенного следует, что законы Кирхгофа позволяют получить систему из $(q - 1) + (p - q + 1) = p$ независимых уравнений, решив которую можно определить токи во всех p ветвях цепи, если известны ее параметры и э. д. с., действующие в этой цепи.

Приведенную выше рекомендацию выбора независимых контуров лучше всего осуществлять следующим образом. Изобразим любое из возможных дерево цепи, например, одно из приведенных на рис. 3-21, б, в или, соответственно, одно из приведенных на рис. 3-22, б, в для цепей, показанных на рис. 3-21, а и 3-22, а. Будем теперь выбирать независимые контуры так, чтобы в первый

вошла только одна дополнительная ветвь (хорда), а во все последующие в каждый входила бы еще только одна новая дополнительная ветвь (хорда). Число дополнительных ветвей равно $p - q + 1$, т. е. равно числу независимых контуров.

В виде примера составим уравнения для цепи, изображенной на рис. 3-21, *a*, выбрав положительные направления токов, как показано на рисунке стрелками. На рис. 3-21, *a* указаны также положительные направления э. д. с. Для этой цепи $p = 6$, $q - 1 = 3$, $p - q + 1 = 3$.

Имеем:

по первому закону Кирхгофа:

для узла *a*

$$-i_1 + i_4 + i_3 = 0;$$

для узла *b*

$$-i_4 - i_5 + i_6 = 0;$$

для узла *c*

$$-i_2 - i_3 + i_5 = 0;$$

по второму закону Кирхгофа:

для контура *abda*

$$r_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + u_{1C}(0) + r_4 i_4 + L_4 \frac{di_4}{dt} + \\ + \frac{1}{C_6} \int_0^t i_6 dt + u_{6C}(0) = e_4;$$

для контура *cbcd*.

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + r_5 i_5 + L_5 \frac{di_5}{dt} + \frac{1}{C_6} \int_0^t i_6 dt + u_{6C}(0) = e_2;$$

для контура *acba*

$$(r'_3 + r''_3) i_3 + (L'_3 + L''_3) \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt + u_{3C}(0) + r_5 i_5 + L_5 \frac{di_5}{dt} - \\ - r_4 i_4 - L_4 \frac{di_4}{dt} = e_3 - e_4.$$

Если задано напряжение *u* на входных зажимах цепи, а не э. д. с., то уравнение по второму закону Кирхгофа в правой части будет содержать это напряжение. Например, для простой неразветвленной цепи, приведенной на рис. 3-26, обходя по контуру *abmdfna*, получаем:

$$r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{q_k}{C_k} - u_k = 0,$$

откуда

$$r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{q_k}{C_k} = u_k.$$

Иногда токи в ветвях, напряжения и э. д. с. в них снабжают двумя индексами, обозначающими узлы, между которыми включена данная ветвь. При этом положительное направление тока, напряжения и э. д. с. принимаются от узла, соответствующего первому индексу, к узлу, соответствующему второму индексу. Очевидно, получим соотношения:

$$i_{ab} = -i_{ba}; \quad u_{ab} = -u_{ba}; \quad e_{ab} = -e_{ba}.$$

Сопротивления и проводимости ветвей являются их параметрами, не имеющими направления. Поэтому для них порядок индексов безразличен, т. е.

$$r_{ab} = r_{ba}; \quad g_{ab} = g_{ba}.$$

3-11. Законы и параметры магнитных цепей

В случае электрических цепей нам удастся создавать весьма протяженные направленные пути для электрического тока, что является результатом весьма большого различия удельной проводимости $\gamma_{\text{пр}}$ проводников и удельной проводимости $\gamma_{\text{из}}$ окружающей их изолирующей среды. Так, для меди $\gamma_{\text{пр}} = 5,8 \cdot 10^7$ 1/ом·м, а для пропитанной кабельной бумаги $\gamma_{\text{из}} = 10^{-13}$ 1/ом·м, т. е. при этом $\frac{\gamma_{\text{пр}}}{\gamma_{\text{из}}} = 5,8 \cdot 10^{20}$. В случае магнитных цепей мы не имеем столь большого различия между абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_{\text{фер}}$ ферромагнитных материалов участков магнитной цепи, которые должны образовывать путь для магнитных линий, и абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_{\text{в}} = \mu_0$ окружающей среды, обычно воздуха. Их отношение имеет обычно порядок $\frac{\mu_{\text{фер}}}{\mu_0} \approx 10^3 \div 10^4$, а при насыщении ферромагнитных материалов становится еще меньше. Поэтому значительная часть потока ответвляется от основной магнитной цепи и проходит через воздух в виде так называемого потока рассеяния. Следовательно, даже при коротких магнитных цепях мы имеем *магнитные цепи с распределенными параметрами*. Кроме того, вдоль основной магнитной цепи часто располагают воздушные промежутки. Таковым, например,

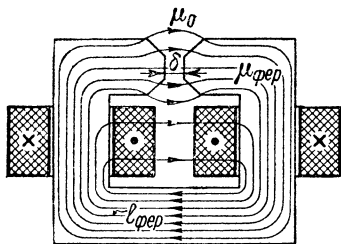


Рис. 3-29.

ной магнитной проницаемостью $\mu_{\text{в}} = \mu_0$ окружающей среды, обычно воздуха. Их отношение имеет обычно порядок $\frac{\mu_{\text{фер}}}{\mu_0} \approx 10^3 \div 10^4$, а при насыщении ферромагнитных материалов становится еще меньше. Поэтому значительная часть потока ответвляется от основной магнитной цепи и проходит через воздух в виде так называемого потока рассеяния. Следовательно, даже при коротких магнитных цепях мы имеем *магнитные цепи с распределенными параметрами*. Кроме того, вдоль основной магнитной цепи часто располагают воздушные промежутки. Таковым, например,

является воздушный промежуток между полюсами электромагнита (рис. 3-29). Магнитная проницаемость этих промежутков равна таковой окружающей магнитную цепь среды, вследствие чего здесь трудно говорить об определенном пути для магнитных линий.

Зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля нелинейна и вследствие явления гистерезиса неоднозначна. Поэтому *магнитные цепи*, как правило, *являются нелинейными*.

Все сказанное весьма усложняет расчеты магнитных цепей даже при постоянном магнитном потоке, т. е. при постоянном токе в намагничивающих катушках. Строгий расчет здесь может быть выполнен только с привлечением методов теории электромагнитного поля. Однако приближенное решение можно и здесь получить, вводя понятие о магнитной цепи и, соответственно, используя теорию, основанную на этом понятии, т. е. теорию магнитных цепей.

Пренебрегая потоками рассеяния, мы получаем магнитную цепь с сосредоточенными параметрами. Если магнитная цепь не имеет разветвлений (рис. 3-29), то магнитный поток Φ при таком допущении оказывается одинаковым во всех сечениях цепи.

Отношение магнитодвижущей силы (м. д. с.) вдоль всей цепи, равной интегралу напряженности* магнитного поля вдоль всей цепи $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i\omega$, к магнитному потоку Φ , называют *магнитным сопротивлением* такой цепи:

$$R_m = \frac{i\omega}{\Phi}.$$

Величина, обратная магнитному сопротивлению, называется *магнитной проводимостью* магнитной цепи:

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{\Phi}{i\omega}.$$

Величины R_m и Λ являются основными параметрами магнитной цепи.

Соотношение

$$\Phi = \frac{i\omega}{R_m}$$

называют *законом магнитной цепи*. Оно по форме аналогично закону Ома для замкнутой электрической цепи при постоянном токе:

$$i = \frac{e}{r},$$

где e — э. д. с., действующая в электрической цепи, i — ток в ней и r — ее электрическое сопротивление.

Всю м. д. с. вдоль замкнутой магнитной цепи можно представить в виде суммы м. д. с. на отдельных разнородных участках

магнитной цепи, так как интеграл $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l}$ вдоль замкнутого пути может быть представлен в виде суммы интегралов вдоль отдельных участков этого пути. Для электромагнита (рис. 3-29) такими участками являются ферромагнитный сердечник со средней длиной $l_{\text{фер}}$ и воздушный промежуток с длиной δ . Имеем

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_{l_{\text{фер}}} \mathbf{H}d\mathbf{l} + \int_{\delta} \mathbf{H}d\mathbf{l} = F_1 + F_2.$$

Соответственно получаем:

$$R_m = \frac{\oint \mathbf{H}d\mathbf{l}}{\Phi} = \frac{F_1}{\Phi} + \frac{F_2}{\Phi} = R_{m1} + R_{m2},$$

где R_{m1} — магнитное сопротивление сердечника, R_{m2} — магнитное сопротивление воздушного промежутка. Если сечение s какого-либо участка постоянно и напряженность магнитного поля, магнитную индукцию и, соответственно, магнитную проницаемость μ в разных точках сечений участка можно приближенно считать одинаковыми, то имеют место приближенные выражения:

$$\Phi = \int_s \mathbf{B}ds \approx Bs = \mu Hs \quad \text{и} \quad \int_l \mathbf{H}d\mathbf{l} \approx H_{\text{ср}}l_{\text{ср}},$$

где $l_{\text{ср}}$ — средняя длина вдоль участка.

Например, принимая такие допущения для сердечника электромагнита (рис. 3-29), получим:

$$R_{m1} \approx \frac{Hl_{\text{фер}}}{\mu Hs} = \frac{l_{\text{фер}}}{\mu s}.$$

Вычисление по аналогичной формуле магнитного сопротивления R_{m2} воздушного зазора между полюсами электромагнита было бы слишком грубым. Здесь для вычисления R_{m2} надо рассчитать картину поля.

Итак, для замкнутого контура магнитной цепи имеем:

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i\omega = F_1 + F_2 = R_{m1}\Phi + R_{m2}\Phi = \sum_{k=1}^{k=2} R_{mk}\Phi.$$

В рассмотренном примере одноконтурной магнитной цепи поток Φ во всех участках цепи один и тот же.

В случае разветвленной (многоконтурной) магнитной цепи магнитный поток разветвляется в узлах магнитной цепи. Например, магнитная цепь на рис. 3-30 имеет два узла и три ветви.

Для каждого узла на основании принципа непрерывности магнитного потока (§ 1-9) можно написать:

$$\oint_s \mathbf{B} ds = \sum_{k=1}^n \Phi_k = 0, \tag{*}$$

т. е. сумма магнитных потоков, отходящих по всем ветвям магнитной цепи от узла цепи, равна нулю. Это соотношение аналогично уравнению для узла электрической цепи, написанному согласно первому закону Кирхгофа:

$$\sum i_k = 0.$$

Для любого контура разветвленной магнитной цепи в соответствии со сказанным выше можем написать уравнение:

$$\sum_{k=1}^n i_k \omega_k = \sum_{k=1}^n R_{mk} \Phi_k, \tag{**}$$

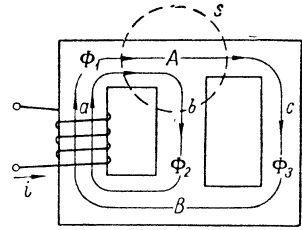


Рис. 3-30.

т. е. м. д. с. вдоль замкнутого контура магнитной цепи равна сумме произведений магнитного сопротивления на магнитный поток во всех участках (ветвях) цепи, входящих в этот контур. Это уравнение аналогично уравнению для контура электрической цепи:

$$\sum e_k = \sum r_k i_k,$$

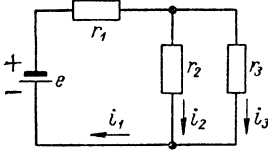


Рис. 3-31.

составленному на основании второго закона Кирхгофа при постоянном токе.

Уравнений типа (*) должно быть $q - 1$, если q — число узлов магнитной цепи.

Уравнений типа (**) должно быть $n = p - q + 1$, где p — число ветвей магнитной цепи.

Таким образом, расчет магнитных цепей, если можно пренебречь потоками рассеяния, аналогичен расчету нелинейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, причем м. д. с. $i\omega$ соответствует э. д. с. e , потоку Φ соответствует ток i и магнитному сопротивлению R_m соответствует электрическое сопротивление r . На рис. 3-31 приведена схема электрической цепи, аналогичной магнитной цепи, приведенной на рис. 3-30.

Однако такой приближенный расчет возможен только для сравнительно простых магнитных цепей, так как в случае сложных магнитных цепей уже нельзя пренебрегать потоками рассеяния. Наличие потоков рассеяния в сложных магнитных цепях чрезвычайно усложняет расчеты. Такие расчеты можно проводить

методом последовательного приближения. Сначала находим распределение м. д. с. по участкам, пренебрегая потоками рассеяния. Затем на основе этого распределения, пользуясь методами расчета поля, находим потоки рассеяния и уточняем потоки в участках магнитной цепи. Это дает возможность уточнить распределение м. д. с. и, соответственно, величины потоков рассеяния и т. д.

Приведенная аналогия магнитных и электрических цепей формальна. По своему физическому содержанию закон магнитной цепи и закон Ома для электрической цепи существенно различаются между собой. Существование постоянной э. д. с. возможно без того, чтобы в электрической цепи под действием ее возникла электрический ток, если цепь из проводников разомкнута и сопротивление всей цепи бесконечно велико. Напротив, существование магнитодвижущей силы всегда связано с одновременным существованием магнитного потока. Последнее положение является лишь иной формулировкой ранее высказанного в § 1-13 принципиального положения, согласно которому электрический ток и окружающее его магнитное поле должны рассматриваться как различные характеристики единого электромагнитного процесса.

3-12. Анализ и синтез — две основные задачи теории электрических цепей

Задачи теории электрических цепей могут быть разделены на две противоположные по исходным данным и по конечной цели группы — *задачи анализа* и *задачи синтеза* электрических цепей.

Целью анализа является расчет электрических процессов в заданных электрических цепях, т. е. в цепях с заданной структурой и с заданными характеристиками всех элементов цепи, например, расчет изменений во времени токов в заданной цепи при известном законе изменения во времени э. д. с., действующих в этой цепи.

Целью синтеза является обратная задача — отыскание структуры электрической цепи и характеристик ее элементов, при которых электрический процесс в цепи будет подчиняться заданным закономерностям. Например, требуется построить электрическую цепь, имеющую два входных и два выходных зажима, удовлетворяющую условию, чтобы при заданном изменении во времени напряжения на входных зажимах получалось вполне определенное, также наперед заданное изменение во времени напряжения на выходных зажимах. Иными словами, требуется построить цепь, которая обладает способностью изменять закон изменения напряжения в желательном для нас направлении. Такие задачи имеют важное значение, например, для создания электрических цепей, формирующих на своем выходе импульсы определенной формы, что важно в радио-

технике и в автоматике, или выполняющих определенные арифметические или логические операции, что важно при построении вычислительных и управляющих электронных машин и т. п.

Решение задачи синтеза может быть выполнено различными способами. Эта задача может быть решена путем анализа ряда цепей с последующим выбором наиболее подходящего, оптимального варианта цепи. Уже в такой постановке задачи синтеза возникает вопрос о разработке требований, которым должна удовлетворять оптимальная цепь. Поскольку задача синтеза чаще всего возникает при проектировании различных устройств, постольку требования оптимальности должны быть заданы или разработаны заранее. Эти требования могут иметь как экономический, так и технологический характер, т. е. они могут регламентировать вес, габариты, стоимость устройства, характер элементов, из которых должна быть осуществлена искомая цепь. Кроме того, при разработке технических требований должны быть заданы качественные и количественные требования относительно допустимых отклонений характеристик синтезируемой цепи от наперед заданных характеристик. Только при удовлетворении всех этих требований можно найти оптимальный вариант осуществления на практике искомой цепи.


Такая постановка задачи синтеза предопределяет неоднозначность ее решения. Например, наперед заданные характеристики можно получить, осуществив цепь, в которой используются все элементы электрических цепей, а именно: индуктивные катушки, связанные, в общем случае, и электрически и при помощи общего магнитного поля, конденсаторы и активные сопротивления. Однако в пределах допустимых отклонений от наперед заданных свойств проектируемого устройства возможно конструирование цепи, содержащей только конденсаторы и активные сопротивления, или цепи, обладающие также индуктивностью, но в которых отсутствует взаимная индукция. В пятнадцатой главе будет показана множественность решения задачи синтеза даже в том случае, когда совершенно различные по конфигурации цепи имеют в точности одинаковые свойства.

Как указывалось, синтез электрических цепей основывается на общих свойствах электрических цепей, которые могут быть исследованы путем анализа цепей. Поэтому синтезу должен предшествовать анализ. Это относится в равной мере к линейным и нелинейным электрическим цепям. Естественно, наибольшей теоретической разработке поддаются задачи анализа и синтеза линейных электрических цепей, содержащих элементы, параметры которых не зависят от тока в них и от напряжения на их зажимах. Следующая вторая часть целиком посвящается этим вопросам. Возможности синтеза цепей существенно возрастают при использовании нелинейных элементов

цепи с теми или иными характеристиками. Анализ нелинейных электрических цепей посвящается третья часть, в которой будут изучены свойства таких цепей и некоторые методы их расчета. На основе результатов, полученных при анализе различных нелинейных цепей, можно будет косвенно судить и о возможности использования тех или иных нелинейных элементов для синтеза электрических цепей.

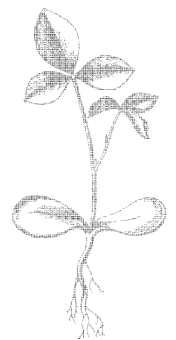
Выше было сказано, что путем подбора и анализа этих подобранных цепей можно решить задачу синтеза. Однако такой способ решения задачи синтеза нецелесообразен. Анализ свойств сложных цепей, каковыми в общем случае оказываются подлежащие синтезу цепи, при условии исследования значительного количества вариантов является весьма трудоемким процессом. Использование методов синтеза дает возможность, исходя из общих свойств цепей, получить рекомендации, позволяющие аналитически рассчитывать как структуру, так и параметры цепи, обладающей наперед заданными характеристиками.

В результате аналитического решения могут быть получены цепи, которые не будут удовлетворять тем или иным экономическим или технологическим требованиям. Поэтому при синтезе возникает проблема эквивалентных преобразований полученных цепей, в результате которых характеристики цепи не изменяются, но меняются структура цепи и состав ее элементов. В некоторых случаях этим требованиям можно удовлетворить при условии отклонения от желаемой характеристики в допустимых пределах в самом начале использования методов синтеза. Это достигается соответствующим выбором функции, описывающей свойства искомой цепи. Подобранные соответствующим образом функции дают возможность синтезировать цепь, содержащую только те или иные комбинации элементов. В этом смысле синтез включает в себя также и проблему выбора наиболее подходящего математического описания наперед заданных свойств цепи.



ЧАСТЬ ВТОРАЯ

**ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ**



Scan AAW



ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКАХ

4-1. Синусоидальные э. д. с., напряжения и токи. Источники синусоидальных э. д. с. и токов

В линейной электрической цепи при действии периодических э. д. с. с одинаковым периодом T , спустя достаточно большой промежуток времени от начала действия этих э. д. с., *устанавливаются* во всех участках цепи периодические токи и напряжения с тем же периодом T . Величина $f = \frac{1}{T}$ является частотой э. д. с. напряжения или тока. Частота численно равна числу периодов в единицу времени и измеряется в *герцах* (1 *Гц*).

Наибольший интерес представляют периодические э. д. с., напряжения и токи, являющиеся синусоидальными функциями времени:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Величины e , u , i называют *мгновенными значениями* э. д. с., напряжения и тока. Их наибольшие значения E_m , U_m и I_m называют *амплитудами*. Величину $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ называют *угловой частотой*. Аргумент синуса, отсчитываемый от ближайшей предыдущей точки перехода синусоидальной величины через нуль от отрицательных к положительным ее значениям, называют *фазой*, величины ψ_e , ψ_u и ψ_i — *начальной фазой*, соответственно, э. д. с., напряжения и тока.

На рис. 4-1 изображены синусоидальное напряжение и ток с одним и тем же периодом. Обратим внимание на то, что положительные фазы $\psi_u > 0$ и $\psi_i > 0$ должны откладываться от начала

координат влево. По оси абсцисс можно откладывать или время t , или пропорциональную ему угловую величину ωt . Соответственно, периодом будет являться или T , или 2π .

Разность фаз напряжения и тока $\varphi = \psi_u - \psi_i$ называют также углом сдвига тока по отношению и напряжению. При $\varphi = 0$ ток и напряжение совпадают по фазе, при $\varphi = \pm \pi$ они противоположны по фазе, при $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ они находятся в квадратуре.

В большинстве случаев мы стремимся к тому, чтобы в электрических цепях токи и напряжения изменялись по синусоидальному закону, так как отклонение от этого закона ведет к нежелательным явлениям — появляются дополнительные потери в элементах цепи, возрастает влияние мощных линий передач на соседние линии связи и т. д. Мы начнем рассмотрение с синусоидальных функций еще и

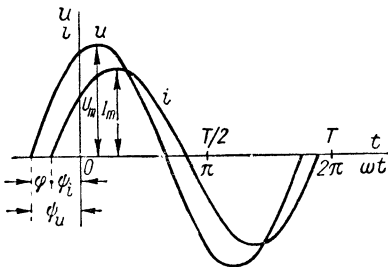


Рис. 4-1.

потому, что любую периодическую функцию можно разложить в ряд синусоидальных функций различных частот (ряд Фурье) и, следовательно, рассмотрение синусоидальных токов позволит в дальнейшем перейти к изучению более сложных периодических э. д. с., токов и напряжений.

В современной технике используют переменные токи исключительно широкого диапазона частот от долей герца до миллиардов герц. В СССР и в европейских странах в энергетических системах используется частота 50 гц. Наиболее высокие частоты вплоть до частот светового диапазона находят применение в радиотехнике.

В зависимости от частоты источниками синусоидальной э. д. с. являются генераторы того или иного типа. При промышленных частотах на электрических станциях в настоящее время в качестве генераторов применяют вращающиеся электрические машины. Для промышленных и повышенных частот генерирование переменной э. д. с. осуществляют также с помощью ионных и полупроводниковых преобразователей постоянного тока в переменный, именуемых инверторами. При повышенных и высоких частотах используют преобразователи с электронными приборами, например ламповые генераторы. Наконец для генерирования колебаний с частотами, приближающимися к частотам оптического диапазона, а также лежащими в оптическом диапазоне, используются квантовые генераторы, именуемые мазерами и лазерами.

О принципе действия инвертора и лампового генератора будет сказано в следующей части, посвященной нелинейным электри-

ческим цепям. Рассмотрим здесь в общих чертах вопрос о генерировании синусоидальных э. д. с. с помощью вращающихся электрических машин.

На рис. 4-2 схематически представлен синхронный гидрогенератор с явно выраженными полюсами, имеющий три пары полюсов ($p = 3$). На вращающейся части машины — роторе наложена обмотка возбуждения, питаемая постоянным током. Обмотка, в которой генерируется переменная э. д. с., расположена в пазах неподвижной части машины — статоре. Магнитная цепь машины изготавливается из электротехнической стали; статор и полюсные наконечники ротора — из листовой стали, остальная часть ротора — из сплошного стального массива. Частоту генерируемой э. д. с. определяют обычно по формуле $f = \frac{pn}{60}$, где n — число оборотов

в минуту. Например, скорость вращения генераторов на Днепровской гидроэлектростанции $n = 83\frac{1}{3}$ об/мин. Следовательно, для получения частоты $f = 50$ гц эти генераторы имеют $p = 36$ пар полюсов.

В генераторах с явно выраженными полюсами для получения синусоидальной э. д. с. в обмотке якоря достаточно соответствующим образом подобрать форму полюсных наконечников, чтобы магнитная индукция B вдоль окружности машины в воздушном зазоре изменялась по синусоидальному закону. Это следует из выражения для э. д. с., индуктируемой в стержнях обмотки статора: $|e| = Blv$, где l — активная длина стержней и v — линейная скорость.

Свободные на рис. 4-2 пазы статора заполняют проводниками еще двух других обмоток. Совместно эти три обмотки статора образуют так называемую трехфазную систему, о которой будет речь в специальной главе. На схематическом рис. 4-2 для каждой обмотки под каждым полюсом имеется только по одному пазу в статоре. Обычно их бывает несколько, причем катушки, лежащие в соседних пазах и принадлежащие одной и той же обмотке, соединяют последовательно.

Генераторы, связываемые с паровыми турбинами, так называемые турбогенераторы, имеют большую скорость вращения, так как коэффициент полезного действия паровых турбин получается высоким только при высоких скоростях вращения. Поэтому турбогенераторы имеют малое число пар полюсов, обычно $p = 1$ или $p = 2$. Соответственно при $f = 50$ гц скорость вращения получается:

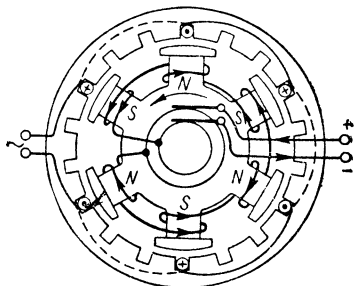


Рис. 4-2.

$n = 3000$ об/мин или $n = 1500$ об/мин. Во избежание больших потерь на трение о воздух роторы таких генераторов выполняют гладкими. Их называют роторами с неявно выраженными полюсами (рис. 4-3). Обмотку ротора укладывают в имеющиеся в роторе пазы.

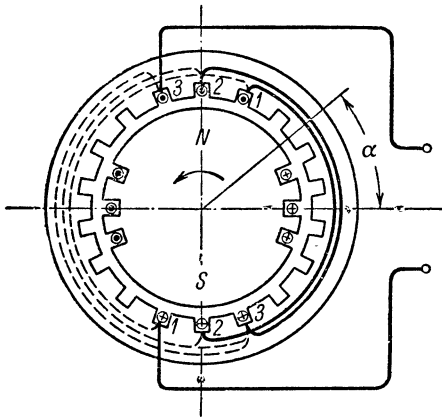


Рис. 4-3.

Для получения синусоидальной э. д. с. в таких гене-

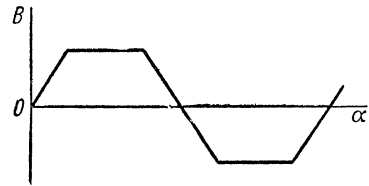


Рис. 4-4.

раторах нет возможности видоизменить форму полюсных наконечников. Магнитная индукция B в воздушном зазоре изменяется

в зависимости от угла α приблизительно по трапецеидальному закону (рис. 4-4). Соответственно и э. д. с. в катушках на статоре изменяется во времени по трапецеидальному закону. Если заложить в соседние пазы одинаковые катушки (на рис. 4-3 помечены цифрами 1, 2, 3), то кривые э. д. с. e_1 , e_2 , e_3 в этих катушках будут одинаковы по форме, но сдвинуты друг относительно друга по оси времени (рис. 4-5). Соединив эти катушки последовательно, можно получить, как видно из рисунка, суммарную э. д. с. $e =$

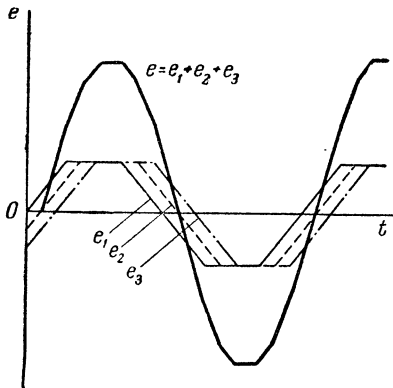


Рис. 4-5.

$= e_1 + e_2 + e_3$, во всей обмотке весьма близкую к синусоидальной.

Свободные на рис. 4-3 пазы статора заполняют еще двумя обмотками для образования трехфазной системы.

4.2. Действующие и средние значения периодических э. д. с., напряжений и токов

О величине периодических э. д. с., напряжений и токов обычно судят по их средним квадратичным значениям за период, обозначаемым, соответственно, через E , U , I :

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Эти величины называют действующими значениями периодических э. д. с., напряжений и токов. Такой выбор определяется нижеследующими соображениями.

Среднее за период значение мощности, характеризующее выделение тепла в цепи с сопротивлением r , имеет выражение:

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 r dt = r \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = r I^2.$$

Следовательно, вводя понятие о действующем значении периодического тока как среднего квадратичного значения его за полный период, мы получаем выражение через него средней мощности такое же по виду, как и при постоянном токе.

Мгновенное значение электромагнитной силы F взаимодействия двух катушек или вообще двух любых контуров, по которым последовательно протекает один и тот же ток i , выражается в виде

$$F = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g} = i^2 \frac{\partial M}{\partial g},$$

где $\partial M / \partial g$ — производная от взаимной индуктивности M контуров по той координате g , которую стремится изменить сила F . При периодическом изменении тока i среднее значение $F_{\text{ср}}$ силы за период имеет выражение:

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T F dt = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \frac{\partial M}{\partial g} dt.$$

Если катушки обладают достаточно большой инерцией или вообще они закреплены и, следовательно, не меняют своего положения в течение периода изменения тока в них, то величина $\frac{\partial M}{\partial g}$ остается постоянной и может быть вынесена за знак интеграла. Получаем:

$$F_{\text{ср}} = \frac{\partial M}{\partial g} \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = I^2 \frac{\partial M}{\partial g},$$

т. е. выражение для $F_{\text{ср}}$ через действующее значение периодического тока получается таким же, как и при постоянном токе.

Мгновенное значение силы F притяжения пластин конденсатора выражается в виде

$$F = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial C}{\partial g},$$

где u — мгновенное значение напряжения между пластинами, C — емкость между пластинами, g — координата, характеризующая взаимное расположение пластин, которую стремится изменить сила F . Среднее за период значение силы $F_{\text{ср}}$ при условии, что инерция пластин столь велика, что положение их не изменяется в течение периода напряжения u , приобретает вид

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T F dt = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial g} \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial g}.$$

Таким образом, выражение для $F_{\text{ср}}$ через действующее значение U оказывается совпадающим с выражением при постоянном напряжении.

Определим связь действующего значения E синусоидальной э. д. с. $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ с ее амплитудой E_m . Имеем:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_e) dt} = \\ &= E_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\psi_e)}{2} dt} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^T \cos(2\omega t + 2\psi_e) dt = 0.$$

Аналогично для синусоидальных напряжения и тока получим:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Большая часть приборов, используемых для измерения периодических напряжений и токов, показывает действующее значение этих величин.

Среднее арифметическое значение синусоидальных э. д. с., напряжений и токов за весь период равно нулю. Поэтому вводят

понятие об их среднем значении за положительный период:

$$E_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_m \sin \omega t \, dt = \frac{2E_m}{\omega T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{4E_m}{\omega T} = \frac{2}{\pi} E_m$$

и, соответственно,

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} U_m \quad \text{и} \quad I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} I_m.$$

Такое определение средних значений используют и для периодических несинусоидальных э. д. с., напряжений и токов, когда положительные и отрицательные их полуволны одинаковы.

Особенно просто вычисляется среднее значение э. д. с., индуктируемой периодически изменяющимся магнитным потоком Ψ , через его максимальное $\Psi_{\text{макс}}$ и минимальное $\Psi_{\text{мин}}$ значения. Действительно:

$$E_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{d\Psi}{dt} \right) dt = -\frac{2}{T} \int_{\Psi_{\text{макс}}}^{\Psi_{\text{мин}}} d\Psi = 2f(\Psi_{\text{макс}} - \Psi_{\text{мин}}),$$

так как э. д. с. проходит через нуль при $\Psi = \Psi_{\text{макс}}$ и $\Psi = \Psi_{\text{мин}}$, и $e > 0$ в интервале, когда поток изменяется от $\Psi_{\text{макс}}$ до $\Psi_{\text{мин}}$. В тех случаях, когда $\Psi_{\text{макс}} = -\Psi_{\text{мин}} = \Psi_m$, получим $E_{\text{ср}} = 4f\Psi_m$. Эта простая формула не зависит от закона изменения потока от $\Psi_{\text{макс}}$ до $\Psi_{\text{мин}}$. Если же мы желаем определить действующее значение э. д. с., то величину $E_{\text{ср}}$ необходимо умножить на так называемый коэффициент формы $k_\phi = E/E_{\text{ср}}$ кривой э. д. с.:

$$E = k_\phi E_{\text{ср}} = 4k_\phi f\Psi_m.$$

В частном случае, при синусоидальном потоке $\Psi = \Psi_m \sin(\omega t + \psi)$ э. д. с. имеет выражение

$$e = -\omega \Psi_m \cos(\omega t + \psi) = \omega \Psi_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Индуктируемая э. д. с. отстает от потока Ψ на угол $\pi/2$ (рис. 4-6). При синусоидальной э. д. с. коэффициент формы

$$k_\phi = \frac{E}{E_{\text{ср}}} = \frac{E_m}{\frac{2E_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$$

и, соответственно, $E = 4,44 f\Psi_m$.

Вводя в рассмотрение также коэффициент амплитуды $k_a = E_m/E$. В частности, для синусоиды $k_a = \sqrt{2}$.

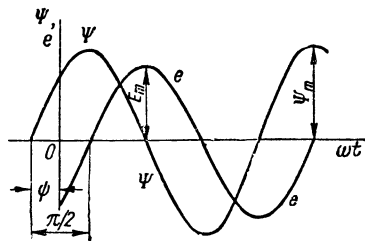


Рис. 4-6.

4-3. Изображение синусоидальных э. д. с., напряжений и токов с помощью вращающихся векторов. Векторные диаграммы

Синусоидальные э. д. с., напряжения и токи, имеющие угловую частоту ω , можно изображать векторами, вращающимися с угловой скоростью, равной ω , причем длина вектора определяется в соответствующем масштабе амплитудой э. д. с., напряжения или тока.

На рис. 4-7 изображена с помощью вращающегося вектора синусоидальная э. д. с. $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Если угол $(\omega t + \psi)$ отсчитывается от горизонтальной оси, то проекция вращающегося вектора на вертикальную ось равна в избранном масштабе мгновенному значению э. д. с.

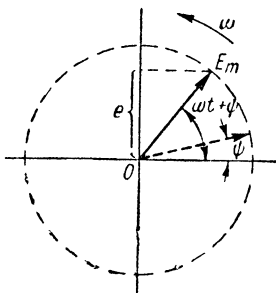


Рис. 4-7.

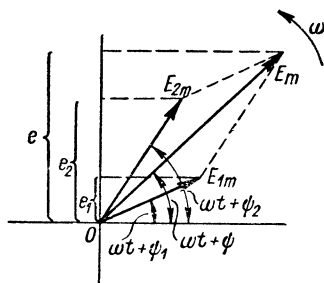


Рис. 4-8.

Пусть мы имеем э. д. с. e , равную сумме э. д. с. e_1 и e_2 одной и той же частоты:

$$e = e_1 + e_2 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

Изобразим э. д. с. e_1 и e_2 вращающимися векторами (рис. 4-8). Так как проекция на любую ось геометрической суммы двух векторов равна алгебраической сумме проекций на эту ось этих векторов, то э. д. с. e изображается вращающимся вектором, который равен геометрической сумме векторов, изображающих э. д. с. e_1 и e_2 .

При рассмотрении установившихся синусоидальных процессов начальную фазу одной из величин можно выбрать произвольно, например, начальную фазу э. д. с. или приложенного напряжения. Соответственно произвольно может быть расположен в начальный момент времени вектор, изображающий эту величину. Векторы всех остальных величин при этом будут повернуты по отношению к нему на углы, равные сдвигам фаз.

Совокупность векторов, характеризующих процессы, происходящие в той или иной цепи переменного тока, и построенных с соб-

людением правильной ориентации их друг относительно друга, называют векторной диаграммой.

Так как обычно мы интересуемся действующими значениями синусоидальных функций, которые в $\sqrt{2}$ меньше их амплитуд, то целесообразно на векторной диаграмме длину векторов выбирать равной, в избранном масштабе, действующим значениям э. д. с., токов и напряжений. Например, на рис. 4-9 изображена векторная диаграмма напряжения u и тока i , причем ток сдвинут по отношению к напряжению на угол φ .

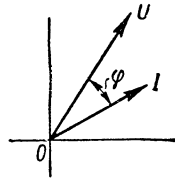


Рис. 4-9.

В дальнейшем векторы, изображающие синусоидальные функции времени, мы будем обозначать теми же буквами, что и действующие или максимальные значения этих функций, но с чертой над буквой в отличие от обозначения полужирным шрифтом векторов, изображающих характеристики физических полей.

4-4. Установившийся синусоидальный ток в цепи с последовательным соединением участков r , L и C

Дифференциальное уравнение для цепи с последовательно соединенными участками r , L и C (рис. 4-10), как было получено в § 3-10 первой части, имеет вид

$$u = u_r + u_L + u_C = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0).$$

Общее решение $i(t)$ этого уравнения, как всякого линейного дифференциального уравнения, складывается из частного решения $i'(t)$, определяемого видом функции $u(t)$, и полного интеграла $i''(t)$ однородного дифференциального уравнения, получаемого, если положить $u(t) = 0$. Как будет показано в девятой главе, после включения цепи под действие напряжения $u(t)$ составляющая тока $i''(t)$ быстро затухает, уменьшаясь до нуля практически за доли секунды или за несколько секунд. Действительно, при $u = 0$ и $r \neq 0$ процесс в цепи может существовать только за счет запасов энергии в полях цепи и будет затухать вследствие рассеяния энергии в сопротивлении r .

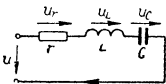


Рис. 4-10.

Таким образом, спустя небольшой промежуток времени после включения, в цепи устанавливается ток $i(t)$, определяемый частным решением $i'(t)$ уравнения цепи. Величина $i'(t)$ является током

установившегося режима в цепи. Первые пять глав настоящей части посвящены исследованию установившихся режимов.

Пусть приложенное к цепи напряжение изменяется по синусоидальному закону $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. При этом ток установившегося режима также будет синусоидальным с той же частотой ω и, следовательно, может быть выражен в виде $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$. Задача заключается в отыскании величин I_m и φ при заданных величинах U_m , ω и ψ_u .

Как было сказано раньше, при исследовании установившегося синусоидального процесса начальная фаза ψ_u приложенного напряжения может быть выбрана произвольно. Так как в данном случае общим для всех участков является ток, то целесообразно выбрать $\psi_u = \varphi$, чтобы начальная фаза тока была равна нулю, т. е. $\psi_i = 0$. Тогда имеем:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{и} \quad i = I_m \sin \omega t.$$

Подставляя эти значения i и u в уравнение

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + u_C(0) = u,$$

найдем:

$$rI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t + \frac{1}{\omega C} I_m + u_C(0) = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Так как все члены, кроме двух последних в левой части уравнения, не содержат постоянных составляющих, то $\frac{1}{\omega C} I_m + u_C(0) = 0$.

Это уравнение должно быть справедливо для любого момента времени t . Полагая, в частности, $\omega t = \pi/2$ и $\omega t = 0$, получаем:

$$rI_m = U_m \cos \varphi; \quad \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m = U_m \sin \varphi.$$

Возведя первое и второе равенства в квадрат и сложив, получим:

$$\left[r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] I_m^2 = U_m^2,$$

откуда находим связь между амплитудами тока и напряжения:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Поделив обе части этого выражения на $\sqrt{2}$, получим аналогичную связь между действующими значениями тока и напряжения:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Корень следует брать всегда со знаком «плюс», так как амплитуды и действующие значения напряжения и тока мы считаем положительными величинами.

Поделив второе равенство на первое, находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

В выражениях, связывающих амплитуды U_m и I_m , или действующие значения U и I напряжения и тока, в знаменателе стоит величина, имеющая размерность электрического сопротивления. Ее обозначают через z и называют п о л н ы м с о п р о т и в л е н и е м цепи. Для рассмотренной цепи имеем:

$$z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

В общем случае в цепи переменного тока полное сопротивление z больше сопротивления r и может быть ему равно только в частном случае. Причина этого лежит в том, что в рассматриваемой цепи приложенное напряжение имеет не только составляющую ir , но также составляющую $L \frac{di}{dt}$, преодолевающую э. д. с. самоиндукции, и составляющую q/C , равную напряжению на конденсаторе.

Сопротивление r называют а к т и в н ы м с о п р о т и в л е н и е м цепи, так как только им определяются необратимые активные процессы в цепи, в данном случае преобразование электромагнитной энергии в тепло. Величину $\omega L - \frac{1}{\omega C}$, учитывающую реакцию самоиндукции и емкости и имеющую размерность сопротивления, называют р е а к т и в н ы м с о п р о т и в л е н и е м цепи и обозначают x . При этом член ωL , учитывающий реакцию самоиндукции, называют и н д у к т и в н ы м с о п р о т и в л е н и е м цепи и обозначают x_L , а член $\frac{1}{\omega C}$, учитывающий реакцию емкости, называют е м к о с т н ы м с о п р о т и в л е н и е м цепи и обозначают x_C .

Итак имеем:

$$x_L = \omega L; \quad x_C = \frac{1}{\omega C}; \quad x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = x_L - x_C;$$

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Заметим, что возрастание x_L при увеличении частоты объясняется тем, что э. д. с. самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока и, следовательно, ее амплитуда растет с увеличением частоты при неизменной амплитуде тока. Убывание величины x_C при увеличении частоты является результатом того, что ток смещения в конденсаторе пропорционален скорости изменения напряжения на зажимах конденсатора и, следовательно, его амплитуда растет с увеличением частоты при неизменной амплитуде напряжения.

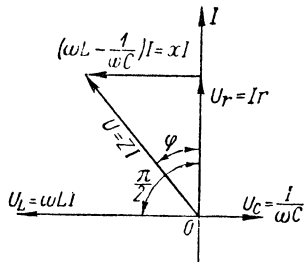


Рис. 4-11.

Структура выражения для z может быть уяснена, если рассмотреть сдвиги фаз напряжений на отдельных участках цепи по отношению к току. С целью наглядности построим векторную диаграмму для рассматриваемой цепи.

Здесь и в последующем диаграмму будем строить для действующих значений. Для краткости векторы, изображающие ток, или напряжение, или э. д. с., будем называть просто вектором тока, вектором напряжения и вектором э. д. с.

Направим вектор тока \bar{I} по вертикальной оси (рис. 4-11).

Напряжение на участке с сопротивлением r

$$u_r = ri = rI_m \sin \omega t$$

совпадает по фазе с током, и поэтому вектор этого напряжения \bar{U}_r направлен вдоль вектора тока.

Напряжение на участке с индуктивностью L

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \cos \omega t = \omega LI_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

упреждает ток на угол $\pi/2$, и вектор этого напряжения \bar{U}_L должен быть повернут относительно вектора тока на угол $\pi/2$ в положительном направлении.

Напряжение на участке с емкостью C

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

отстает от тока на угол $\pi/2$, и вектор этого напряжения \bar{U}_C должен быть повернут относительно вектора тока на угол $\pi/2$ в отрицательном направлении.

Складывая геометрически векторы напряжений на участках цепи \bar{U}_r , \bar{U}_L и \bar{U}_C , получаем вектор напряжения \bar{U} на зажимах всей цепи, который сдвинут по отношению к вектору тока \bar{I} на угол

φ . То обстоятельство, что величины $x_L = \omega L$ и $x_C = \frac{1}{\omega C}$ входят в выражение для реактивного сопротивления с разными знаками, объясняется тем, что напряжения u_L и u_C сдвинуты друг относительно друга на угол π и, следовательно, в любой момент времени

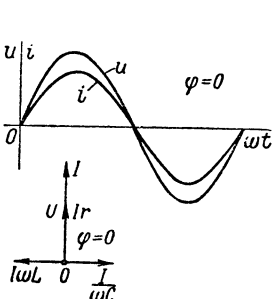


Рис. 4-12.

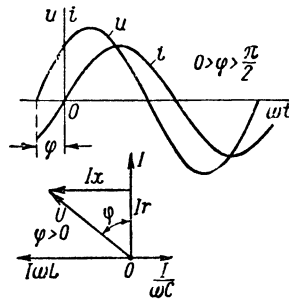


Рис. 4-13.

противоположны друг другу, что, в частности, видно из векторной диаграммы.

Напряжения u_r и $(u_L + u_C)$ сдвинуты друг относительно друга на угол $\pi/2$. Поэтому полное сопротивление цепи z нельзя определять путем арифметического сложения r и x , а следует вычислять по формуле: $z = \sqrt{r^2 + x^2}$.

Зафиксируем особо внимание на следующих весьма важных результатах:

на участке с активным сопротивлением ток совпадает по фазе с напряжением на этом участке;

в индуктивной катушке ток отстает по фазе на угол $\pi/2$ от напряжения на катушке;

в конденсаторе ток опережает по фазе на угол $\pi/2$ напряжение на зажимах конденсатора.

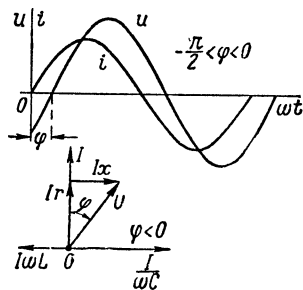


Рис. 4-14.

Рассмотрим теперь сдвиг фаз φ между током и напряжением на зажимах всей цепи. Ток совпадает по фазе с приложенным напряжением только при $x = 0$, т. е. или при отсутствии в цепи реактивных сопротивлений, или при их взаимной компенсации. Последнее имеет место при резонансе, явление которого будет рассмотрено в шестой главе. Действительно, из векторной диаграммы рис. 4-12 видно, что при $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ сумма векторов \bar{U}_L

и \bar{U}_C будет равна нулю, и вектор \bar{U} приложенного напряжения совпадет по направлению с вектором \bar{I} тока, т. е. угол φ будет равен нулю. Кривые тока и напряжения для этого случая изображены также на рис. 4-12. Если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то $x > 0$, $\frac{\pi}{2} \geq \varphi > 0$ и ток отстает по фазе от напряжения на зажимах цепи. Этот случай изображен на рис. 4-13. Если же $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, то $x < 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$ и ток опережает по фазе напряжение на зажимах цепи. Этот случай изображен на рис. 4-14. Таким образом, пределами, между которыми лежит φ , являются $+\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$.

4-5. Установившийся синусоидальный ток в цепи с параллельным соединением участков g , L и C

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 4-15, состоящую из трех параллельно соединенных участков, причем предположим, что первый участок обладает только проводимостью g , второй — только емкостью C и третий — только индуктивностью L .

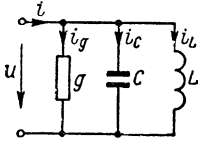


Рис. 4-15.

Применяя первый закон Кирхгофа, имеем:

$$i_g + i_c + i_L = i.$$

Токи в ветвях можно выразить через приложенное напряжение. Ток в первой ветви:

$$i_g = gu, \text{ где } g \text{ — проводимость первого участка.}$$

Ток во второй ветви: $i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{dCu}{dt} = C \frac{du}{dt}$. Ток в третьей ветви:

$$i_L = \frac{\Psi_L}{L}. \text{ Но так как } u = \frac{d\Psi_L}{dt}, \text{ то } \Psi_L = \int_0^t u dt + \Psi_L(0) \text{ и, следо-}$$

вательно, $i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0)$, где $i_L(0) = \frac{1}{L} \Psi_L(0)$.

Таким образом, дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи имеет вид

$$gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0) = i.$$

Пусть к цепи приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$. При этом ток i также будет синусоидальным и может быть представлен в виде $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$. В данном случае целесообразно положить начальную фазу приложенного напряже-

ния равной нулю ($\psi_u = 0$), так как напряжение является общим для всех ветвей.

Подставив эти выражения в уравнение цепи, получим:

$$gU_m \sin \omega t + \omega C U_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \frac{1}{\omega L} U_m + i_L(0) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Так как все члены, кроме двух последних в левой части уравнения, не содержат постоянных составляющих, то $\frac{1}{\omega L} U_m + i_L(0) = 0$.

Уравнение цепи справедливо для любого момента времени t . Полагая $\omega t = \frac{\pi}{2}$ и $\omega t = 0$, находим:

$$gU_m = I_m \cos \varphi; \quad \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) U_m = I_m \sin \varphi.$$

Возведя первое и второе равенства в квадрат и сложив, получим:

$$I_m = U_m \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

Поделив обе части этого выражения на $\sqrt{2}$, получим связь между действующими значениями тока и напряжения:

$$I = U \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} = Uy.$$

Поделив второе равенство на первое, найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}.$$

Величину

$$y = \frac{I}{U} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

называют *полной проводимостью* цепи. Проводимость g называют *активной проводимостью*. Величину $\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$, имеющую также размерность проводимости, называют *реактивной проводимостью* цепи и обозначают b . При этом член $\frac{1}{\omega L}$ называют *индуктивной проводимостью* и обозначают b_L , а член ωC называют *емкостной проводимостью* и обозначают b_C . Имеем:

$$b = \frac{1}{\omega L} - \omega C = b_L - b_C; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

На рис. 4-16 изображена векторная диаграмма для этой цепи для случая $\frac{1}{\omega L} > \omega C$. Ток в первом участке совпадает по фазе с напряжением, ток в конденсаторе опережает по фазе на угол $\pi/2$ напряжение, а ток в катушке отстает по фазе на угол $\pi/2$ от напряжения. То обстоятельство, что b образуется как разность b_L и b_C , объясняется тем, что токи в конденсаторе и в катушке сдвинуты друг

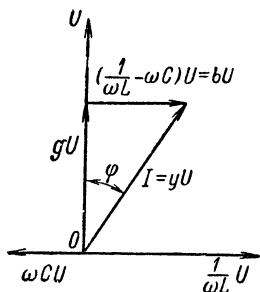


Рис. 4-16.

относительно друга на угол π , т. е. в любой момент времени направлены по отношению к общим зажимам второй и третьей ветвей в противоположные стороны. Эти токи сдвинуты относительно тока в первой ветви на угол $\pi/2$, вследствие чего полная проводимость определяется не арифметическим сложением g и b , а формулой

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

При $b_L = b_C$ имеет место *резонанс* в цепи и ток i равен току i_g в первой ветви. При $\frac{1}{\omega L} > \omega C$ ток через катушку больше тока через конденсатор (рис. 4-16), и общий ток i отстает по фазе на угол φ от напряжения, причем $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. При $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ ток через конденсатор больше тока через катушку и общий ток i опережает по фазе напряжение, причем $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$.

4-6. Активная, реактивная и полная мощности

Активной мощностью P в электрической цепи при периодических процессах называют среднее значение мощности за полный период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt,$$

где $p = ui$ есть мгновенное значение мощности.

Если напряжение u на зажимах цепи и ток i в цепи являются синусоидальными функциями времени:

$$u = U_m \sin \omega t, \quad i = I_m \sin (\omega t - \varphi),$$

то имеем:

$$P = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T 2 \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) dt = \frac{UI}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] dt.$$

Учитывая, что $\int_0^T \cos (2\omega t - \varphi) dt = 0$, получаем выражение для активной мощности при синусоидальном процессе:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Множитель $\cos \varphi$ называют коэффициентом мощности. Так как $\cos \varphi \leq 1$, то $P \leq UI$. Только в предельном случае, когда $\varphi = 0$ и $\cos \varphi = 1$, мы имеем $P = UI$. В другом предельном случае, когда $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ и $\cos \varphi = 0$, имеем $P = 0$.

Электрические машины, трансформаторы и другие электротехнические устройства рассчитывают на определенное номинальное напряжение U , обусловленное изоляцией этих устройств, и на определенный номинальный ток I , обусловленный нагревом проводников этих устройств. Соответственно, наивысшее использование генерирующих и преобразующих электромагнитную энергию устройств будет в случае, когда коэффициент мощности приемников, на которые они работают, равен единице.

Максимальное приближение к единице коэффициента мощности предприятий, являющихся приемниками энергии, может быть осуществлено путем рационального конструирования оборудования этих предприятий, а также путем рациональной организации их работы, например, путем максимальной загрузки двигателей, так как при холостом ходе $\cos \varphi$ двигателей обычно низок.

Так как обычно для предприятий $\varphi > 0$ и, следовательно, ток имеет индуктивный характер, то радикальной мерой повышения $\cos \varphi$ может быть установка на этих предприятиях конденсаторов, включаемых параллельно другим устройствам.

Из диаграммы на рис. 4-11 имеем $U \cos \varphi = U_r = Ir$ и из диаграммы на рис. 4-16 получаем $I \cos \varphi = Ug$. Следовательно, для активной мощности можем написать следующие выражения:

$$P = UI \cos \varphi = I^2 r = U^2 g.$$

Величину $S = UI$ называют полной мощностью. Смысл введения понятия полной мощности ясен из сказанного выше. Если под U и I понимать номинальные значения, т. е. допускаемые при номинальном режиме действующие значения напряжения и тока электрической машины, трансформатора или других преобразователей энергии, то произведение $S = UI$ дает наибольшую

возможную активную их мощность при наиболее благоприятных условиях, т. е. при $\cos \varphi = 1$.

Имеем следующие выражения для полной мощности:

$$S = UI = I^2z = U^2y.$$

Вводят в рассмотрение еще так называемую реактивную мощность $Q = UI \sin \varphi$.

Практическое значение введения понятия реактивной мощности вытекает, например, из следующего. Обычный счетчик энергии дает величину энергии, отданной приемнику за некоторый промежуток времени τ . Эту энергию можно записать в форме

$$\int_0^{\tau} P dt = \int_0^{\tau} UI \cos \varphi dt,$$

если заметное изменение P происходит только за большое количество периодов T тока и если, соответственно, τ во много раз превосходит T . Однако показания такого счетчика не дают возможности судить о том, при каком коэффициенте мощности $\cos \varphi$ работает потребитель энергии. Такая оценка возможна, если наряду с обычным счетчиком, показывающим действительную энергию, передаваемую приемнику, включить на зажимы приемника еще счетчик, показывающий величину интеграла реактивной мощности Q за тот же промежуток времени τ :

$$\int_0^{\tau} Q dt = \int_0^{\tau} UI \sin \varphi dt.$$

Очевидно, чем больше показание этого счетчика по сравнению с показанием обычного счетчика, тем ниже среднее значение $\cos \varphi$ приемника за рассматриваемый промежуток времени.

Величину P можно измерить с помощью обычного ваттметра, а величину Q — с помощью специально предназначенного для этой цели электроизмерительного прибора. Зная P и Q , можно определить $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ потребителя энергии в момент измерения. Однако представляет интерес именно знать характер работы потребителя за длительный промежуток времени. С этой целью и используются счетчики, дающие вышеуказанные интегральные величины.

Понятием реактивной мощности Q широко пользуются также при расчете электрических сетей переменного тока.

Из диаграммы на рис. 4-11 имеем $U \sin \varphi = Ix$ и из диаграммы рис. 4-16 получаем $I \sin \varphi = Ub$. Следовательно, для реактивной мощности имеют место выражения:

$$Q = UI \sin \varphi = I^2x = U^2b.$$

Для приемников энергии P и S всегда положительны, но реактивная мощность Q положительна лишь при $\varphi > 0$, т. е. для индуктивных цепей, а при $\varphi < 0$, т. е. для емкостных цепей, она отрицательна.

Заметим, что при $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, например в случае конденсаторов или катушек без потерь, абсолютное значение реактивной мощности совпадает с полной мощностью.

Обратим внимание, что понятие активной мощности как средней за период T мощности справедливо для любых периодических напряжений и токов определенной частоты $f = \frac{1}{T}$ и необязательно синусоидальных. Понятие же реактивной мощности Q в виде $Q = UI \sin \varphi$, так же как и выражение активной мощности в форме $P = UI \cos \varphi$, справедливо лишь при синусоидальном процессе.

При выводе всех вышеприведенных соотношений предполагалось, что на зажимах цепи действует напряжение U . Если предположить, что к зажимам цепи приключен идеальный источник синусоидальной э. д. с., имеющей действующее значение E , то все соотношения останутся в силе с заменой U на E ; например:

$$I = \frac{E}{z} \approx Ey; \quad S = EI = I^2 z = E^2 y;$$

$$P = EI \cos \varphi = I^2 r = E^2 g; \quad Q = EI \sin \varphi = I^2 x = E^2 b.$$

4-7. Мгновенная мощность и колебания энергии в цепи синусоидального тока

Мгновенная мощность $p = ui$ цепи переменного тока является функцией времени.

Рассмотрим энергетические процессы в цепи из последовательно соединенных участков r , L и C (рис. 4-17). Уравнение для напряжений в этой цепи имеет вид

$$u = u_r + u_L + u_C = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}.$$

Соответственно, для мгновенных мощностей на зажимах цепи и на отдельных участках цепи получим уравнение:

$$p = ui = p_r + p_L + p_C = u_r i + u_L i + u_C i = i^2 r + Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} =$$

$$= i^2 r + \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = i^2 r + \frac{d}{dt} (W_m) + \frac{d}{dt} (W_s).$$

Из последнего выражения мы видим, что мощность $p_r = i^2 r$ на участке с сопротивлением r является величиной всегда

положительной и характеризует необратимый процесс поглощения энергии. Мощность $p_L = \frac{d}{dt}(W_m)$ определяет при $p_L > 0$ скорость поступления энергии в магнитное поле катушки и при $p_L < 0$ — скорость возвращения энергии из этого поля. Мощность $p_C = \frac{d}{dt}(W_e)$ определяет при $p_C > 0$ скорость поступления энергии в электрическое поле конденсатора, а при $p_C < 0$ — скорость возвращения энергии из этого поля.

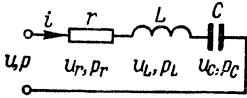


Рис. 4-17.

Пусть напряжение u и ток i являются синусоидальными функциями времени:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi); \quad i = I_m \sin \omega t.$$

Здесь, так же как и в § 4-4, начальная фаза тока принята равной нулю ($\psi_i = 0$), что удобно, так как ток является общим для всех участков цепи. При этом начальная фаза напряжения u оказывается равной φ ($\psi_u = \varphi$). Мгновенные значения напряжений на отдельных участках при этом равны (§ 4-4):

$$u_r = ri = rI_m \sin \omega t; \quad u_L = \omega LI_m \cos \omega t; \quad u_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t.$$

Соответственно, для мгновенных мощностей на отдельных участках цепи получаем выражения:

$$p_r = u_r i = rI_m^2 \sin^2 \omega t = r(\sqrt{2}I)^2 \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t);$$

$$p_L = u_L i = \omega LI_m^2 \cos \omega t \sin \omega t = \omega L(\sqrt{2}I)^2 \frac{1}{2} \sin 2\omega t = U_L I \sin 2\omega t;$$

$$p_C = u_C i = -\frac{I_m^2}{\omega C} \cos \omega t \sin \omega t = -\frac{(\sqrt{2}I)^2}{\omega C} \frac{1}{2} \sin 2\omega t = -U_C I \sin 2\omega t.$$

Суммарная мощность на конденсаторе и катушке равна:

$$p_x = p_L + p_C = (U_L - U_C) I \sin 2\omega t = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I^2 \sin 2\omega t = xI^2 \sin 2\omega t = UI \sin \varphi \sin 2\omega t.$$

Мощность на зажимах всей цепи выражается в виде

$$p = p_r + p_L + p_C = p_r + p_x = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi).$$

Из полученных выражений видно, что средняя за период мощность на катушке и конденсаторе равна нулю. Средняя за период мощность, т. е. активная мощность, на зажимах всей цепи равна средней за период мощности на участке с сопротивлением r :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_r dt = UI \cos \varphi.$$

Амплитуда колебания мощности p_x равна абсолютному значению реактивной мощности $Q = UI \sin \varphi$.

Весьма важно заметить, что все мгновенные мощности изменяются с частотой 2ω , в два раза превышающей частоту ω тока и напряжения.

На рис. 4-18 одна под другой даны диаграммы тока i , напряжений $u_r, u_L, u_C, u_x = u_L - u_C$, u и мощностей p_r, p_L, p_C, p_x и p .

На диаграмме рис. 4-18, а изображены величины на участке r . Мы видим, что в любой момент времени $p_r > 0$ и среднее значение величины p_r равно $P = UI \cos \varphi$.

На диаграмме рис. 4-18, б изображены величины, относящиеся к катушке. Здесь среднее значение величины p_L равно нулю. Энергия запасается в магнитном поле катушки, когда ток по абсолютной своей величине возрастает. При этом $p_L > 0$. Энергия возвращается из магнитного поля катушки, когда ток по абсолютному своему значению убывает. При этом $p_L < 0$.

На рис. 4-18, в даны величины, относящиеся к конденсатору. Здесь так же, как и на катушке, среднее значение мощности равно нулю. Энергия запасается в электрическом поле конденсатора, когда напряжение на конденсаторе по своей абсолютной величине возрастает. При этом $p_C > 0$. Энергия возвращается из электрического поля конденсатора, когда напряжение на конденсаторе по своему абсолютному значению убывает. При этом $p_C < 0$.

Из сопоставления диаграмм рис. 4-18, б и в мы видим, что в частном случае, для которого построены эти диаграммы, амплитуда напряжения на катушке больше амплитуды напряжения на конденсаторе, т. е. $U_L > U_C$. Это соответствует соотношению $\omega L > \frac{1}{\omega C}$.

На рис. 4-18, г для этого даны кривые тока, напряжения и мощности p_x на участке цепи, состоящем из катушки и конденсатора. Характер кривых здесь такой же, как и на зажимах катушки, так

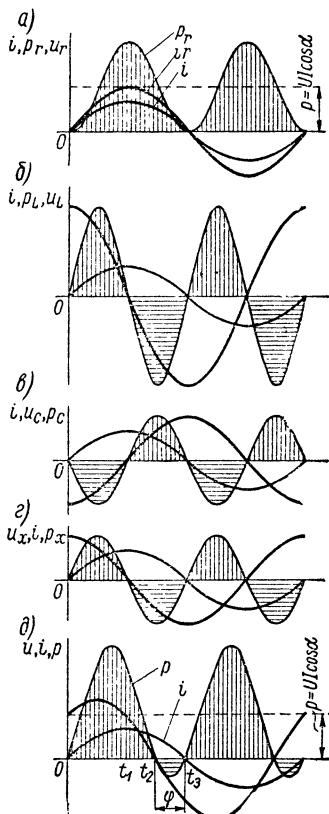


Рис. 4-18.

как в данном случае $\omega L > \frac{1}{\omega C}$. Однако амплитуды напряжения u_x и мгновенной мощности p_x меньше амплитуд величин u_L и p_L . Это последнее является результатом того, что напряжения u_L и u_C противоположны по фазе.

На диаграмме рис. 4-18, *д* приведены величины на зажимах всей цепи, которые получаются суммированием величин на диаграммах рис. 4-18, *а*, *б* и *в* или *а* и *г*. Среднее значение мощности p равно $P = UI \cos \varphi$. Колебания около этого среднего значения происходят с амплитудой UI , что видно из аналитического выражения для p . Ток i отстает от напряжения u на угол φ . В интервале времени от 0 до t_2 мгновенная мощность на зажимах цепи положительна ($p > 0$) и энергия поступает от источника в цепь. В интервале времени от t_2 до t_3 мгновенная мощность на зажимах цепи отрицательна ($p < 0$) и энергия возвращается источнику.

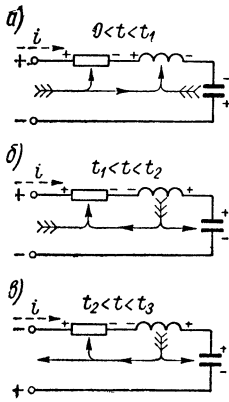


Рис. 4-19.

Так как $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos \varphi > 0$, то поступающая в цепь энергия, определяемая положительной площадью кривой $p(t)$, больше возвращаемой источнику энергии, определяемой отрицательной площадью кривой $p(t)$.

На рис. 4-19 показаны для различных интервалов времени пунктирной стрелкой действительное направление тока и знаками «плюс» (+) и «минус» (—) действительные направления напряжений на зажимах цепи и на всех участках. Стрелками с хвостовым оперением указаны направления потоков энергии в соответствующие интервалы времени.

Схема на рис. 4-19, *а* соответствует интервалу времени от 0 до t_1 , в течение которого ток возрастает от нуля до своего максимального значения. В это время энергия запасается в катушке. Так как напряжение на конденсаторе по своему абсолютному значению падает, то энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе, возвращается и переходит в энергию магнитного поля катушки. В данном случае $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ и $p_L > p_C$, поэтому в катушку поступает дополнительная энергия из источника, питающего цепь. Питающий цепь источник покрывает также энергию, поглощаемую сопротивлением r .

Схема на рис. 4-19, *б* соответствует интервалу времени от t_1 до t_2 . Ток i в этом интервале времени убывает, и энергия возвращается из магнитного поля катушки, частично поступая в конден-

сатор, который при этом заряжается, и частично превращаясь в тепло в сопротивлении r . В этом интервале времени ток имеет еще достаточно большую величину и, соответственно, значительная мощность i^2r . Поэтому источник так же, как и в предыдущем интервале времени, посылает энергию в цепь, частично компенсирующую потери в участке с сопротивлением r . Момент t_2 характерен тем, что величина i^2r уменьшилась настолько, что скорость уменьшения энергии в катушке обеспечивает скорость поступления энергии в конденсатор и в сопротивление r . В этот момент мощность на зажимах всей цепи равна нулю ($p = 0$).

Схема на рис. 4-19, в соответствует следующему интервалу времени от t_2 до t_3 , в течение которого ток уменьшается от значения при $t = t_2$ до нуля. В этот промежуток времени энергия продолжает возвращаться из катушки, поступая в конденсатор, в сопротивление и в источник, приключенный к зажимам цепи. В этот интервал времени $p < 0$.

Весь рассмотренный интервал $0 \leq t \leq t_3$ соответствует половине периода тока ($\frac{T}{2}$). В нем полностью завершается один цикл колебания энергии, так как период мгновенной мощности в два раза меньше периода тока. В следующую половину периода изменения тока энергетический процесс повторяется и только действительные направления тока и всех напряжений меняются на противоположные.

4-8. Эквивалентные параметры сложной цепи переменного тока, рассматриваемой в целом как двухполюсник

В § 4-4 и 4-5 рассмотрены простейшие цепи переменного тока. Для любой сложной цепи с постоянными параметрами при синусоидальном напряжении на ее входных зажимах общий входной ток цепи будет также синусоидальным и, в общем случае, сдвинут по отношению к напряжению на угол φ .

Рассматривая всю цепь в целом как двухполюсник и не интересуясь ее внутренним строением, можно характеризовать ее некоторыми эквивалентными параметрами. На рис. 4-20 эта двухполюсная цепь изображена в виде прямоуголь-

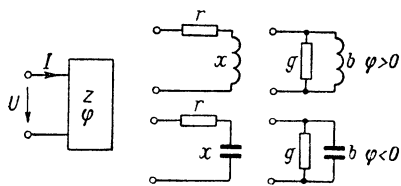


Рис. 4-20.

Назовем эквивалентным полным сопротивлением всей цепи отношение действующих значений напряжения и тока на входе цепи:

$$z_3 = \frac{U}{I}.$$

Оно может быть измерено с помощью вольтметра и амперметра.

Эквивалентное активное сопротивление всей цепи определим как отношение активной мощности на зажимах цепи к квадрату действующего значения тока:

$$r_3 = \frac{P}{I^2}.$$

Эквивалентное реактивное сопротивление всей цепи определим так, чтобы сохранилась связь $z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_3^2}$, которая имела место для рассмотренных выше простейших цепей, т. е.

$$x_3 = \pm \sqrt{z_3^2 - r_3^2},$$

причем знак плюс ставим, если $\varphi > 0$, и знак минус, если $\varphi < 0$. Для определения знака угла φ нужно располагать фазометром или можно, например, поступить следующим образом: включив последовательно с цепью катушку, имеющую индуктивное сопротивление, меньшее чем абсолютное значение $|x_3|$ рассматриваемой цепи, повторно произвести измерение величин z'_3 , r'_3 и вычислить x'_3 . Если при этом реактивное сопротивление увеличится, т. е. $|x'_3| > |x_3|$, то это значит, что $\varphi > 0$. В противном случае $\varphi < 0$.

Аналогично определим эквивалентные проводимости из соотношений:

$$y_3 = \frac{I}{U}, \quad g_3 = \frac{P}{U^2}, \quad b_3 = \pm \sqrt{y_3^2 - g_3^2},$$

причем, так же как и для x_3 , будем считать $b_3 > 0$ при $\varphi > 0$ и $b_3 < 0$ при $\varphi < 0$.

В дальнейшем условимся опускать индекс «э».

Установим связь между эквивалентными сопротивлениями и проводимостями и углом φ . Для активного сопротивления имеем:

$$r = \frac{P}{I^2} = \frac{UI \cos \varphi}{I^2} = z \cos \varphi$$

и из соотношения $x^2 = z^2 - r^2 = z^2 (1 - \cos^2 \varphi) = z^2 \sin^2 \varphi$ получаем для реактивного сопротивления:

$$x = z \sin \varphi.$$

В последнем выражении при извлечении квадратного корня из $z^2 \sin^2 \varphi$ взят знак плюс, так как мы условились считать $x > 0$ при $\varphi > 0$.

Соответственно, для активной проводимости получим выражение:

$$g = \frac{P}{U^2} = \frac{UI \cos \varphi}{U^2} = y \cos \varphi$$

и из соотношения $b^2 = y^2 - g^2 = y^2 (1 - \cos^2 \varphi) = y^2 \sin^2 \varphi$ для реактивной проводимости найдем:

$$b = y \sin \varphi.$$

Из полученных выражений имеем:

$$\cos \varphi = \frac{r}{z} = \frac{g}{y}; \quad \sin \varphi = \frac{x}{z} = \frac{b}{y}.$$

Учитывая эти соотношения, получаем связь между эквивалентными сопротивлениями и проводимостями:

$$y = \frac{1}{z}, \quad g = \frac{r}{z^2} = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad b = \frac{x}{z^2} = \frac{x}{r^2 + x^2};$$

$$z = \frac{1}{y}, \quad r = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad x = \frac{b}{y^2} = \frac{b}{g^2 + b^2}.$$

Сказанное выше проиллюстрируем векторными диаграммами. На рис. 4-21 изображены векторы тока и напряжения для двух случаев $\varphi > 0$ и $\varphi < 0$. Формально всегда можно разложить вектор напряжения на две составляющие — вдоль вектора тока и ему перпендикулярно. Эти составляющие соответственно будут равны $U \cos \varphi = U \frac{r}{z} = Ir$ и $U \sin \varphi = U \frac{x}{z} = Ix$. Эти составляющие иногда называют *активной и реактивной составляющими приложенного напряжения*, а образуемые ими и вектором U прямоугольные треугольники — *треугольниками напряжений*. Разделив все стороны этих треугольников на I , получим *треугольники сопротивлений*, катетами которых являются эквивалентные активные и реактивные сопротивления, а гипотенузой — эквивалентное полное сопротивление.

Аналогично можно разложить вектор тока на составляющие вдоль вектора напряжения и ему перпендикулярно. Эти составляющие (рис. 4-22) равны $I \cos \varphi = I \frac{g}{y} = Ug$ и $I \sin \varphi = I \frac{b}{y} = Ub$. Их иногда называют *активной и реактивной составляющими тока*, а образуемые ими и вектором I прямоугольные треугольники — *треугольниками тока*. Разделив все стороны этих треугольников на U , получим *треугольники проводимостей*,

катетами которых являются эквивалентные активные и реактивные проводимости, а гипотенузой — эквивалентная полная проводимость.

Отметим, что как составляющие треугольников сопротивлений, так и составляющие треугольников проводимостей не являются вращающимися векторами, так как r , x , z , g , b и y не изображают функций времени, как это имеет место для векторов \bar{U} и \bar{I} .

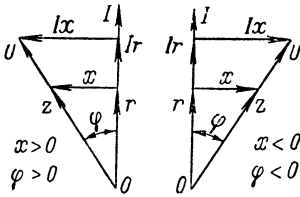


Рис. 4-21.

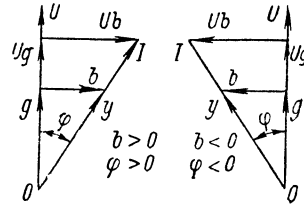


Рис. 4-22.

Обратим еще внимание, что разложение напряжения на активную и реактивную составляющие (рис. 4-21) имеет физический смысл только для простой последовательной цепи, рассмотренной в § 4-4, так как при этом активная составляющая равна падению напряжения на участке с сопротивлением r и реактивная составляющая равна падению напряжения на участке, включающем конденсатор и катушку. Для параллельной цепи (§ 4-5), а также для сложной цепи такое разложение является чисто формальным. Соответственно разложение тока на активную и реактивную составляющие имеет физический смысл только для простой параллельной цепи, рассмотренной в § 4-5, а в общем случае является формальным.

4-9. Схемы замещения двухполюсника при заданной частоте

Введенные выше эквивалентные параметры двухполюсника сложным образом зависят от структуры цепи двухполюсника и конкретных параметров ветвей этой цепи. Эти эквивалентные параметры в общем случае сложным образом зависят от частоты приложенного напряжения. Для заданной частоты и конкретной цепи они являются вполне определенными, что дает возможность заменить двухполюсник для этой частоты эквивалентными схемами замещения, изображенными на рис. 4-20.

Заметим, что индуктивности (или соответственно емкости), а также и сопротивления в последовательных и параллельных схемах замещения различны, в чем легко убедиться из полученных в предыдущем параграфе связей между r , x , g и b .

Например, конденсатор с потерями в диэлектрике может быть заменен эквивалентными схемами замещения, показанными на рис. 4-23, 4-24, соответствующими схемам на рис. 4-20 при $\varphi < 0$. Процессы в таком конденсаторе принято характеризовать так называемым углом потерь, дополняющим абсолютное значение угла

§

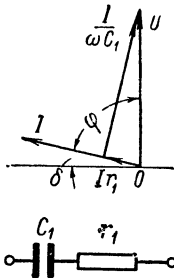


Рис. 4-23.

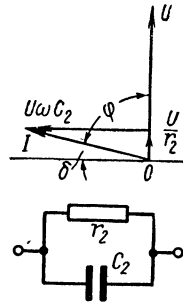


Рис. 4-24.

φ до $\pi/2$. Получим связь между параметрами параллельной и последовательной схем замещения. Имеем:

$$\frac{1}{r_2} = g_2 = \frac{r_1}{r_1^2 + 1/\omega^2 C_1^2} \quad \text{и} \quad b_2 = -\omega C_2 = \frac{-1/\omega C_1}{r_1^2 + 1/\omega^2 C_1^2},$$

откуда

$$r_2 = r_1 \left(1 + \frac{1}{r_1^2 \omega^2 C_1^2} \right) = r_1 \left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \delta} \right)$$

и

$$C_2 = \frac{C_1}{1 + r_1^2 \omega^2 C_1^2} = C_1 \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \delta},$$

так как

$$\text{tg}^2 \delta = \frac{1}{\text{tg}^2 \varphi} = \frac{r_1^2}{1/\omega^2 C_1^2} = r_1^2 \omega^2 C_1^2.$$

Таким образом, $r_2 > r_1$ и $C_2 < C_1$. Так как обычно $\text{tg} \delta \ll 1$, то $r_2 \gg r_1$, а $C_1 \approx C_2$.

При значительном изменении частоты от нее зависят все параметры, r_1 , C_1 , g_2 и C_2 обеих схем замещения. Это следует из того, что потери в конденсаторе при переменном напряжении приблизительно пропорциональны квадрату напряжения и первой степени частоты, и поэтому g_2 изменяется приблизительно пропорционально частоте. Соответственно r_1 является функцией частоты. Следует учесть, что и $\text{tg} \delta$, вообще говоря, изменяется с изменением частоты. При очень высоких частотах приходится считаться с

индуктивностью, которой обладает конденсатор. Все это приводит к тому, что эквивалентные сопротивления и проводимости конденсатора, получаемые указанным в предыдущем параграфе путем, сложным образом зависят от частоты.

Аналогичную картину мы имеем и в другом простом случае одной реальной индуктивной катушки. При низких частотах катушка представляет индуктивное сопротивление, но при высоких частотах наличие емкости между витками катушки может повести к тому, что ее эквивалентное сопротивление приобретает емкостный характер. Активное сопротивление катушки также зависит от частоты вследствие влияния поверхностного эффекта и вихревых токов, что будет пояснено в следующем параграфе.

Из сказанного вытекает, что, определив теоретически или экспериментально параметры цепи или отдельных ее элементов при одной частоте, в частности при постоянном токе, нельзя пользоваться этими параметрами при другой частоте, не убедившись предварительно в допустимости этого.

В дальнейшем мы всегда будем вводить в рассмотрение эквивалентные параметры цепей, определенные так, как указано выше. Все сказанное об эквивалентных параметрах относится только к таким цепям, параметры которых при данной частоте неизменны.

4-10. Влияние различных факторов на эквивалентные параметры цепи

В предыдущем параграфе было сказано, что любую сложную цепь или устройство, содержащие два входных зажима, можно представить в виде двухполюсника и охарактеризовать их эквивалентными параметрами r , x , z , g , b и y . Было отмечено, что эти параметры сложным образом зависят от конкретной структуры цепи и от входящих в нее элементов. Вместе с тем эти параметры могут зависеть от целого ряда факторов. Так, например, если в состав двухполюсника входят асинхронные двигатели, то их параметры, а соответственно и эквивалентные параметры двухполюсника, будут зависеть от нагрузки на валу двигателей. Если в состав двухполюсника входит связанный с антенной колебательный контур радиостанции, то на эквивалентные параметры влияет также и излучение энергии.

В виде примера сложной зависимости эквивалентных параметров от различных факторов укажем случай синхронного двигателя, эквивалентное реактивное сопротивление которого может быть отрицательным, хотя в цепи и не содержатся конденсаторы. Такой емкостный режим синхронного двигателя имеет место при достаточно большом токе в обмотке возбуждения, превышающем номинальный ток возбуждения. Пояснить это можно следующим образом. Уста-

новим ток возбуждения в роторе таким, чтобы э. д. с., индуцируемая в обмотке статора потоком вращающегося ротора, точно уравновешивала приложенное к обмотке статора от сети напряжение. Естественно, при этом ротор должен вращаться с помощью постороннего двигателя на его валу, так как ток в обмотке статора будет равен нулю и энергия из сети не поступает. При отсутствии такого постороннего двигателя от сети будет поступать незначительный активный ток, обеспечивающий мощность, необходимую для покрытия потерь холостого хода в синхронном двигателе. Назовем ток возбуждения в обмотке ротора при таком режиме номинальным. Если уменьшить ток возбуждения ниже номинального, то э. д. с., индуцируемая в обмотке статора уменьшенным потоком ротора, также уменьшится и из сети пойдет намагничивающий ток, увеличивающий результирующий поток. Такой ток будет носить индуктивный характер.

Если увеличить ток возбуждения выше номинального, то э. д. с., индуцируемая в обмотке статора увеличившимся потоком ротора, может превысить приложенное напряжение и из сети пойдет размагничивающий ток, который будет носить емкостный характер.

На эквивалентные параметры влияет также частота. Такое влияние имеет место, как мы видели, даже в случае самых простых элементов цепи, таких, как реостат, индуктивная катушка и конденсатор. Это связано, в частности, с явлением *поверхностного эффекта*, заключающегося в том, что переменный ток распределяется неравномерно по сечению провода — плотность тока у поверхности провода больше, чем во внутренних элементах сечения провода. Неравномерность распределения тока по сечению проводов приводит к увеличению активного сопротивления и уменьшению индуктивности цепи, причем эти обстоятельства проявляются все более сильно с увеличением частоты. Анализ явления поверхностного эффекта будет произведен в последней части курса.

На эквивалентных параметрах цепи сказывается также влияние *вихревых токов*, называемых также токами Фуко, возникающих в проводящих телах, расположенных в переменном магнитном поле электрической цепи. Потери на вихревые токи приводят к увеличению эквивалентного активного сопротивления цепи. Вопросу о расчете потерь на вихревые токи будет уделено внимание в § 3-5 третьей части и в § 12-4 четвертой части.

Все сказанное свидетельствует о сложной зависимости эквивалентных параметров цепи от различных физических величин, в том числе от частоты. Исследуя процессы в цепи при неизменной частоте, мы будем считать параметры ее участков вполне определенными. Но и изучая зависимость эквивалентных параметров от

частоты, при изменении последней в некоторых ограниченных пределах, мы будем полагать сопротивление r реостатов, индуктивности L катушек и емкости C конденсаторов постоянными. Во всех последующих главах этой части мы будем предполагать, что r , L и C постоянны, за исключением восьмой главы, где зависимость параметров от частоты будет рассмотрена в весьма общей форме с учетом возможной зависимости от частоты и величин r , L и C .





МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ УСТАНОВИВШИХСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ И ПОСТОЯННОМ ТОКАХ

5-1. Комплексный метод

В настоящей главе мы рассмотрим методы расчета установившихся режимов в линейной электрической цепи, когда э. д. с., токи и напряжения являются синусоидальными функциями времени. Как было отмечено выше, определение токов и напряжений в таких цепях связано с нахождением частных решений неоднородных дифференциальных уравнений, записанных на основе законов Кирхгофа. Нахождение частного решения, когда токи и напряжения являются синусоидальными функциями времени, в общем случае сводится к суммированию синусоидальных напряжений или токов с неизвестными амплитудами и начальными фазами, а также их производных, входящих в уравнения. Разложив эти синусоидальные функции на синусные и косинусные составляющие с одинаковыми переменными аргументами, можно привести задачу к виду, удобному для решения. Однако эта операция требует громоздких и трудоемких вычислений. В некоторых случаях расчет существенно упрощается заменой алгебраических действий над синусоидальными функциями геометрическими операциями над изображающими их векторами, однако при этом уменьшается точность решения.

Вычисление непосредственно по первому закону Кирхгофа некоторого тока по другим уже найденным токам, сходящимся к данному узлу цепи, или вычисление по второму закону Кирхгофа падения напряжения на некотором участке контура цепи по уже найденным падениям напряжения на других участках контура и э. д. с., входящих в данный контур цепи, также требуют суммирования синусоидальных токов или напряжений и э. д. с.

Громоздкость подобных вычислений является следствием того, что синусоидальная величина — ток, напряжение, э. д. с. — при

заданной частоте ω определяется двумя величинами — амплитудой и начальной фазой.

Существенное упрощение достигается изображением синусоидальных функций времени комплексными числами \dot{A} , так как каждое комплексное число содержит в себе две величины: модуль A и аргумент ψ_A при показательной форме записи

$$\dot{A} = A e^{j\psi_A}$$

или вещественную $a_1 = A \cos \psi_A$ и мнимую $ja_2 = jA \sin \psi_A$, составляющие при алгебраической и тригонометрической формах записи

$$\dot{A} = a_1 + ja_2 = A \cos \psi_A + j A \sin \psi_A,$$

где $j = \sqrt{-1}$ и e — основание натуральных логарифмов.

Метод, основанный на символическом изображении действительных синусоидальных функций времени комплексными числами, введенный в теорию переменных токов Штейнмецом, а затем в широком употреблении в России академиком В. Ф. Миткевичем, мы будем называть комплексным методом. Его называют также символическим методом, так как он основан на символическом изображении действительных синусоидальных функций времени комплексными числами.

Для вещественной и мнимой частей комплексного числа употребляют также обозначения: $a_1 = \operatorname{Re}(\dot{A})$, $a_2 = \operatorname{Im}(\dot{A})$.

Существуют следующие очевидные связи:

$$a_1 = \operatorname{Re}(\dot{A}) = A \cos \psi_A; \quad a_2 = \operatorname{Im}(\dot{A}) = A \sin \psi_A;$$

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \psi_A = \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1}.$$

Заметим также, что

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}; \quad j^2 = -1.$$

Две комплексные величины, имеющие равные модули и равные, но противоположные по знаку аргументы, называют сопряженными.

Если имеем комплексное число $\dot{A} = A e^{j\psi_A} = a_1 + ja_2$, то сопряженное ему комплексное число запишется в форме $\dot{A}^* = A e^{-j\psi_A} = a_1 - ja_2$. Важно отметить следующие свойства сопряженных комплексных чисел:

$$\dot{A}\dot{A}^* = A e^{j\psi_A} A e^{-j\psi_A} = A^2;$$

$$\operatorname{Re}(\dot{A}) = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{A}^*); \quad \operatorname{Im}(\dot{A}) = \frac{1}{2j}(\dot{A} - \dot{A}^*).$$

Пусть имеется синусоидально изменяющийся ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Его можно представить в форме:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{1}{2j} [I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} - I_m e^{-j(\omega t + \psi_i)}] = \\ = \operatorname{Im} \{ I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \},$$

что видно также из соотношения:

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Комплексное число

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} = I_m e^{j\omega t}$$

мы и будем рассматривать как символическое изображение действительного синусоидального тока $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$; оно так же, как и величина i , определяется при заданной частоте ω двумя величинами — амплитудой I_m и начальной фазой ψ_i . Комплексное число $I_m e^{j\psi_i}$ называют комплексной амплитудой тока. Вводя знак изображения \doteq , будем писать:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \doteq I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом, для перехода от действительной синусоидальной функции, назовем ее оригиналом, к ее изображающей комплексной величине необходимо модуль последней взять равным амплитуде синусоидальной функции и аргумент взять равным аргументу синусоидальной функции.

Для обратного перехода от комплексного числа, изображающего действительную функцию, к самой действительной функции, т. е. к оригиналу, необходимо взять коэффициент при j мнимой части комплексного числа.

Рассмотрим теперь выражение для производной по времени от синусоидального тока:

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

Из только что сказанного вытекает, что ее изображение будет иметь вид

$$\omega I_m e^{j\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega I_m e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega t + \psi_i)} = j \omega I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = j \omega I_m e^{j\omega t}.$$

Таким образом,

$$\frac{di}{dt} \doteq j \omega I_m e^{j\omega t},$$

т. е. операция взятия производной от действительной функции заменяется умножением на $j\omega$ ее комплексного изображения.

Соответственно для производной n -го порядка имеем:

$$\frac{d^n i}{dt^n} \doteq (j\omega)^n I_m e^{j\omega t}.$$

Рассмотрим выражение для заряда, равного интегралу от синусоидального тока:

$$q(t) = \int_0^t i dt + q(0) = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi_i) + \left\{ \frac{I_m}{\omega} \cos \psi_i + q(0) \right\}.$$

Так как мы рассматриваем только случаи, когда приложенное к зажимам цепи напряжение и э. д. с., действующие в цепи, синусоидальны и не содержат постоянных составляющих, то, как уже было получено в § 4-4, напряжения на конденсаторах, а следовательно, и заряды на конденсаторах также не содержат постоянных составляющих и, соответственно,

$$\left\{ \frac{I_m}{\omega} \cos \psi_i + q(0) \right\} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^t i dt + q(0) = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi_i) = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right).$$

Искомое изображение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \int_0^t i dt + q(0) &\doteq \frac{I_m}{\omega} e^{j\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{I_m}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega t + \psi_i)} = \\ &= \frac{I_m}{j\omega} e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \frac{I_m}{j\omega} e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

т. е. операция интегрирования действительной функции заменяется делением на $j\omega$ ее комплексного изображения.

Таким образом, комплексный метод является *методом алгебраизации* дифференциальных уравнений. Сущность его заключается в том, что сначала все заданные функции времени мы заменяем их комплексными изображениями и все дифференциальные и алгебраические уравнения, составленные по законам Кирхгофа, заменяем алгебраическими уравнениями в комплексной форме, содержащими комплексы заданных и искомых функций и их производных и интегралов. Решая эти алгебраические уравнения, находим комплексные выражения искомых функций и от них переходим к оригиналам этих функций.

Обоснованием того, что дифференциальные уравнения для действительных функций могут быть записаны в алгебраической форме

для введенных описанным выше способом их изображений, является следующее соображение.

Все действительные функции, умноженные на j , будут мнимыми частями их комплексных изображений. Но вещественные части этих изображений отличаются от коэффициентов при мнимой части заменой синуса на косинус переменного угла. Например, для комплекса тока имеем:

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Если $I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ есть значение тока в момент t , то

$$I_m \cos(\omega t + \psi_i) = I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

есть значение того же тока в момент

$$t + \frac{\pi}{2\omega} = t + \frac{T}{4}.$$

Уравнения Кирхгофа справедливы для любого момента времени. Поэтому если они справедливы для мнимых составляющих комплексов всех токов, напряжений и э. д. с., то они справедливы и для вещественных составляющих этих комплексов. Суммируя же уравнения для мнимых и вещественных составляющих, получаем, что эти уравнения справедливы и для самих комплексных выражений токов, напряжений и э. д. с.

В виде примера рассмотрим уравнение Кирхгофа для цепи с последовательно соединенными участками r , L и C , к зажимам которой приложено напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Оно имеет вид

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \left[\int_0^t i dt + q(0) \right] = u.$$

Изобразив напряжение u , ток i , его производную di/dt и интеграл $\int_0^t i dt + q(0)$ их комплексными выражениями:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t}, \quad I_m e^{j\omega t}, \quad j\omega I_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad \frac{I_m}{j\omega} e^{j\omega t},$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ и $I_m = I_m e^{j\psi_i}$, получим алгебраическое уравнение в комплексной форме:

$$r I_m e^{j\omega t} + j\omega L I_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Сократив его на $e^{j\omega t}$, найдем

$$I_m \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{U}_m.$$

Из последнего уравнения легко определяется комплексная амплитуда тока $I_m = I_m e^{j\psi_i}$, найдя которую сразу можно написать разыскиваемое частное решение, т. е. выражение для мгновенного значения тока установившегося режима, а именно:

$$i = \text{Im}(I_m e^{j\omega t}) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Нас обычно интересуют действующие значения токов и напряжений. Так как действующие значения синусоидальных токов и напряжений меньше их амплитуд в $\sqrt{2}$, то обычно вместо комплексных амплитуд рассматривают комплексные действующие значения:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\psi_i}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U e^{j\psi_u}.$$

В дальнейшем комплексные действующие значения тока, напряжения или э. д. с. будем для краткости именовать комплексными током, напряжением или э. д. с.

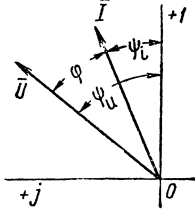


Рис. 5-1.

Интересуясь только действующими значениями токов и напряжений и их начальными фазами, а соответственно, и сдвигами фаз, мы будем опускать множитель $e^{j\omega t}$.

Установим соответствие изображения синусоидальных токов, напряжений и э. д. с. комплексными действующими значениями с их изображениями с помощью векторов.

Будем откладывать векторы в комплексной плоскости. По вертикальной оси, называемой осью вещественных, откладываем вещественные числа. По горизонтальной оси, называемой осью мнимых, откладываем мнимые числа. Положительные направления осей будем отмечать знаками «+1» и «+j» (рис. 5-1). Показанная на рис. 5-1 ориентация осей обычно принимается при построении векторных диаграмм.

Условимся начала векторов совмещать с началом координат, длины векторов в соответствующем масштабе брать равными действующим значениям тока, напряжения или э. д. с. и углы между осью вещественных и векторами принимать равными начальным фазам соответствующих величин. При этих условиях каждой комплексной величине соответствует определенный вектор. Спряженным комплексным числам соответствуют векторы, являющиеся зеркальными изображениями друг друга относительно оси вещественных.

На рис. 5-1 изображены на комплексной плоскости векторы напряжения и тока, комплексные выражения которых имеют вид

$$U = U e^{j\psi_u}; \quad I = I e^{j\psi_i}.$$

Если u — напряжение на зажимах цепи, а i — ток в этой цепи, то между их действующими значениями имеет место связь $U = Iz$ и они сдвинуты по фазе на угол $\varphi = \psi_u - \psi_i$. При этом для перехода от вектора тока к вектору напряжения надо первый повернуть на угол φ и изменить длину вектора в $\frac{a}{v}z$ раз, где a — масштаб для вектора тока и v — масштаб для вектора напряжения.

Соответственно, для перехода от комплексного тока к комплексному напряжению необходимо аргумент первого увеличить на φ , так как $\psi_u = \psi_i + \varphi$, и умножить его модуль на z , так как $U = Iz$, т. е. необходимо умножить комплексный ток на комплексное число $ze^{j\varphi}$.

Таким образом, умножение комплекса на $e^{j\varphi}$ соответствует повороту вектора на угол φ . Умножение комплекса на $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ соответствует повороту вектора на угол $\frac{\pi}{2}$.

Геометрическое суммирование векторов, изображающих напряжения или токи, соответствует алгебраическому суммированию соответствующих им комплексов. Действительно, при геометрическом сложении векторов складываются алгебраически их проекции отдельно по одной и отдельно по другой взаимно перпендикулярным осям, а при алгебраическом сложении комплексных чисел складываются алгебраически отдельно их вещественные и отдельно их мнимые составляющие.

5-2. Комплексные сопротивление и проводимость

Отношение комплексного напряжения \dot{U} к комплексному току \dot{I} называют комплексным сопротивлением цепи и обозначают Z . В соответствии с изложенным в предыдущем параграфе имеем:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = ze^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = r + jx,$$

где r , x и z — активное, реактивное и полное сопротивления цепи.

Отношение комплексного тока \dot{I} к комплексному напряжению \dot{U} называют комплексной проводимостью цепи и обозначают Y . Имеем:

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb,$$

где g , b и y — активная, реактивная и полная проводимости цепи.

Очевидно, имеет место связь

$$ZY = 1 \quad \text{или} \quad (r + jx)(g - jb) = 1.$$

Направления векторов, соответствующих комплексам Z и Y , являются зеркальным изображением друг относительно друга в оси вещественных, так как аргументы комплексов Z и Y равны и противоположны по знаку.

5-3. Выражения законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Выражения закона Ома в комплексной форме имеют вид

$$i = \frac{\dot{U}}{Z}; \quad \dot{U} = iZ; \quad \dot{U} = \frac{i}{Y}; \quad I = \dot{U}Y.$$

Достоинство этих выражений заключается в том, что в них учитывается как связь между действующими значениями I и U тока и напряжения, так и сдвиг фаз φ между ними.

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи, для мгновенных значений токов имеющий вид $\sum_{k=1}^n i_k = 0$, в комплексной форме записывается в виде

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи, для мгновенных значений э. д. с. и падений напряжений имеющий вид

$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n u_k$, в комплексной форме записывается в виде

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n i_k Z_k,$$

где \dot{E}_k , \dot{U}_k , i_k и Z_k — комплексные э. д. с., падение напряжения, ток и сопротивление в k -й ветви, входящей в контур.

Если в ветвь входят последовательно соединенные участок с сопротивлением r_k , катушка с индуктивностью L_k и конденсатор с емкостью C_k , то согласно полученной в § 5-1 связи

$$i_m \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{U}_m \quad \text{или} \quad i \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{U}$$

получаем для этой ветви:

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} = r_k + j \left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) = r_k + jx_k.$$

Как было указано выше, необходимо перед составлением уравнений по законам Кирхгофа задать положительные направления

э. д. с., токов и напряжений во всех ветвях цепи, обозначив эти направления на схеме стрелками. В этом отношении, как было в общем виде сказано в § 3-7 первой части, весьма полезным может оказаться снабжение буквенных обозначений э. д. с., токов и напряжений двойными индексами, соответствующими обозначению узлов, между которыми находится данная ветвь цепи. Достаточно условиться, что положительное направление принимается от узла, соответствующего первому индексу, к узлу, соответствующему второму индексу, и тогда уже нет необходимости ставить стрелки на схеме, а сама аналитическая запись величин указывает принятое их положительное направление. При изменении порядка расположения индексов при этом меняется знак э. д. с., тока или напряжения. Так как сопротивления ветвей цепи и проводимости являются параметрами, не имеющими направления, то порядок индексов у них безразличен.

Очевидно, все эти правила остаются и при использовании комплексного метода, т. е. имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ab} &= -\dot{E}_{ba}; & \dot{I}_{ab} &= -\dot{I}_{ba}; & \dot{U}_{ab} &= -\dot{U}_{ba}; \\ Z_{ab} &= Z_{ba}; & Y_{ab} &= Y_{ba}. \end{aligned}$$

В дальнейшем всегда при снабжении указанных величин двойными индексами мы будем придерживаться этих правил.

5-4. Расчет мощности по комплексным напряжениям и току

Для вычислений активной и реактивной мощностей необходимо знать действующие значения напряжения U и тока I и разность фаз φ между ними.

Величина φ равна разности начальных фаз напряжения и тока ($\varphi = \psi_u - \psi_i$). Поэтому необходимо перемножить не комплексы \dot{U} и \dot{I} , так как при этом аргумент произведения $\dot{U}\dot{I}$ будет равен сумме $\psi_u + \psi_i$, а взять произведение комплекса \dot{U} или \dot{I} одной из этих величин на сопряженный комплекс другой величины. Получаем в результате такого перемножения к о м п л е к с н у ю м о щ н о с т ь:

$$\dot{P} = \dot{I}\dot{U}^* = Ie^{j\psi_i} Ue^{-j\psi_u} = UIe^{-j\varphi} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ$$

или, соответственно:

$$\dot{P}^* = \dot{U}\dot{I}^* = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Вещественная часть в обоих случаях равна активной мощности P . Реактивная мощность Q равна коэффициенту в первом случае при $(-j)$, а во втором случае при $(+j)$ в мнимой части комплексной мощности. Модуль комплексной мощности равен полной мощности $S = UI$.

5-5. Расчет при последовательном соединении участков цепи

При последовательном соединении участков цепи (рис. 5-2) напряжение на зажимах всей цепи равняется сумме падений напряжений на отдельных участках $u = \sum_{k=1}^n u_k$. При синусоидальном процессе, пользуясь комплексным методом и учитывая, что ток является одним и тем же во всех участках, можем написать:

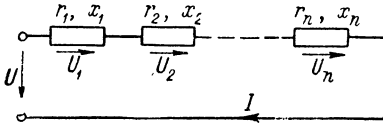


Рис. 5-2.

$$\dot{U} = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n I Z_k = I \sum_{k=1}^n Z_k = I Z,$$

где $Z_k = r_k + jx_k$ — комплексное сопротивление k -го участка.

Таким образом, при последовательном соединении комплексное сопротивление всей цепи равно алгебраической сумме комплексных сопротивлений отдельных участков цепи:

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{k=1}^n r_k + j \sum_{k=1}^n x_k = r + jx.$$

Вычислив комплексное сопротивление Z всей цепи, легко рассчитать комплексный ток I при заданном напряжении U .

Из равенств

$$r = \sum_{k=1}^n r_k \quad \text{и} \quad x = \sum_{k=1}^n x_k$$

следует, что необходимо алгебраически складывать *отдельно активные и отдельно реактивные сопротивления* последовательно соединенных участков.

Пользуясь этим результатом, получаем:

$$I^2 r = I^2 \sum_{k=1}^n r_k = \sum_{k=1}^n I^2 r_k \quad \text{или} \quad P = \sum_{k=1}^n P_k,$$

$$I^2 x = I^2 \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n I^2 x_k \quad \text{или} \quad Q = \sum_{k=1}^n Q_k,$$

т. е. активная мощность P и реактивная мощность Q всей цепи равны алгебраическим суммам активных мощностей и, соответственно, реактивных мощностей всех последовательно соединенных участков.

5-6. Расчет при параллельном соединении участков цепи

При параллельном соединении участков цепи (рис. 5-3) общий ток на входе цепи равен сумме токов в отдельных участках $i = \sum_{k=1}^n i_k$.

Пользуясь при синусоидальном процессе комплексным методом и учитывая, что напряжение на всех участках одно и то же, можем написать:

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \dot{U} Y_k = \dot{U} \sum_{k=1}^n Y_k = \dot{U} Y,$$

где $Y_k = g_k - jb_k$ — комплексная проводимость k -го участка.

Таким образом, при параллельном соединении комплексная проводимость всей цепи равна алгебраической сумме комплексных проводимостей отдельных участков цепи:

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k = \sum_{k=1}^n g_k - j \sum_{k=1}^n b_k = g - jb.$$

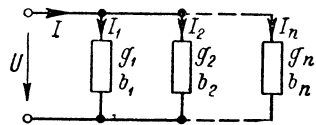


Рис. 5-3.

Вычислив комплексную проводимость всей цепи, легко рассчитать комплексный ток i при заданном напряжении \dot{U} . Из равенств

$$g = \sum_{k=1}^n g_k \quad \text{и} \quad b = \sum_{k=1}^n b_k$$

следует, что необходимо алгебраически складывать *отдельно активные* и *отдельно реактивные проводимости* параллельно соединенных участков.

Пользуясь этим результатом, получаем:

$$U^2 g = U^2 \sum_{k=1}^n g_k = \sum_{k=1}^n U^2 g_k \quad \text{или} \quad P = \sum_{k=1}^n P_k;$$

и

$$U^2 b = U^2 \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n U^2 b_k \quad \text{или} \quad Q = \sum_{k=1}^n Q_k,$$

т. е. активная мощность P и реактивная мощность Q всей цепи равны алгебраическим суммам активных мощностей и, соответственно, реактивных мощностей всех параллельно соединенных участков.

5-7. Расчет при смешанном соединении участков цепи

Под смешанным соединением будем понимать соединение, представляющее собой сочетание последовательных и параллельных соединений участков цепи. Соответственно, для расчета таких цепей можно использовать методы, изложенные в предыдущих двух параграфах.

Продемонстрируем это на примере цепи, изображенной на рис. 5-4. Предположим, что задано напряжение U на зажимах цепи и требуется отыскать все токи. Воспользуемся комплексным методом. Второй и третий участки соединены параллельно, и, следовательно, необходимо сложить их комплексные проводимости Y_2

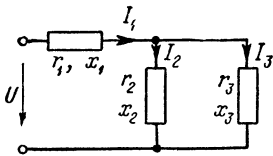


Рис. 5-4.

и Y_3 для получения комплексной проводимости Y_{23} обоих параллельно соединенных участков. Имеем:

$$Y_{23} = Y_2 + Y_3 = (g_2 + g_3) - j(b_2 + b_3).$$

Здесь

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r_2 + jx_2}; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{r_3 + jx_3}.$$

Чтобы избавиться от мнимости в знаменателе, необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю комплекс. Например:

$$Y_2 = \frac{r_2 - jx_2}{(r_2 + jx_2)(r_2 - jx_2)} = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} = g_2 - jb_2.$$

Интересно здесь отметить, что, пользуясь комплексным методом, мы автоматически получаем соотношения между эквивалентными проводимостями g и b и сопротивлениями r и x цепи или ее участка, выведенные в § 4-8.

Первый участок соединен последовательно со взятыми вместе вторым и третьим участками. Следовательно, комплексное сопротивление Z всей цепи равно:

$$Z = Z_1 + Z_{23},$$

где

$$Z_1 = r_1 + jx_1; \quad Z_{23} = \frac{1}{Y_{23}} = \frac{1}{g_{23} - jb_{23}} = \frac{g_{23}}{g_{23}^2 + b_{23}^2} + j \frac{b_{23}}{g_{23}^2 + b_{23}^2}.$$

Комплексный ток в неразветвленной части цепи:

$$I_1 = \frac{U}{Z},$$

причем \dot{U} можно принять вещественным, т. е. положить $\dot{U} = U$. Это значит, что вектор приложенного напряжения \bar{U} мы направляем по оси вещественных. Комплексное напряжение на втором и третьем участках находим из равенств:

$$\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{I}_1 Z_1 \quad \text{или} \quad \dot{U}_{23} = \dot{I}_1 Z_{23},$$

после чего легко определяются комплексные токи в этих участках:

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{23} Y_2; \quad \dot{I}_3 = \dot{U}_{23} Y_3.$$

Имея комплексное сопротивление $Z = r + jx$ всей цепи, определяем угол сдвига φ между напряжением U и током I из соотношения:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}.$$

Пользуясь выражениями для активной и реактивной мощностей при последовательном и параллельном соединениях, нетрудно усмотреть, что и в случае смешанного соединения активная мощность всей цепи равна сумме активных мощностей, расходуемых в отдельных ее участках, а реактивная мощность всей цепи равна алгебраической сумме соответствующих реактивных мощностей.

5-8. О расчете сложных электрических цепей

Электрические цепи, схема которых не является простым сочетанием последовательного и параллельного соединений участков цепи, мы будем называть сложными. Как было уже указано, можно произвести расчет любой сложной цепи, составив на основе законов Кирхгофа систему уравнений и решив ее. В общем случае применение законов Кирхгофа в сочетании с заданными зависимостями между напряжениями на отдельных элементах и токами в них приводит к системе дифференциальных уравнений. Применение комплексного метода позволяет найти частное решение системы дифференциальных уравнений в установленном режиме при протекании синусоидальных токов в линейной электрической цепи. При этом дифференциальные уравнения для мгновенных значений искомых токов заменяются алгебраическими уравнениями для комплексных токов, напряжений и э. д. с.

Количество независимых уравнений должно быть равно числу неизвестных. Если ищутся токи во всех ветвях, то количество уравнений должно быть равно числу ветвей в цепи. Такое равенство имеет место в цепи, в которой отсутствуют идеальные источники тока. В случае наличия идеальных источников тока в s ветвях, количество уравнений будет меньше общего числа ветвей на эту

величину s , так как в таких ветвях токи заданы независимо от режима в остальной цепи.

Таким образом, в самом общем случае максимальное количество уравнений определяется количеством ветвей p , не содержащих идеальные источники тока.

Задача определения необходимого общего количества уравнений, а также определения количества уравнений, которые можно составить отдельно по первому и отдельно по второму законам Кирхгофа, относительно просто решается, как это было указано в § 3-10 первой части, введением топологических понятий: дерево цепи, главная ветвь и дополнительная ветвь цепи. Количество главных ветвей в дереве цепи равно числу q узлов без единицы ($q - 1$), т. е. количеству независимых уравнений по первому закону Кирхгофа.

Число дополнительных ветвей $n = p - q + 1$ равно числу независимых уравнений по второму закону Кирхгофа. Рекомендуемый порядок выбора независимых контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа был указан в § 3-10 первой части.

Применение комплексного метода к расчету сложных цепей требует записи в комплексной форме всех заданных э. д. с., а также

сопротивлений и проводимостей ветвей цепи. Если, например, для цепи (рис. 5-5), дифференциальные уравнения которой приведены в § 3-10 первой части, заданы э. д. с.:

$$e_4 = E_{4m} \sin(\omega t + \psi_4), \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2), \\ e_3 = E_{3m} \sin(\omega t + \psi_3)$$

и параметры r , L , C в ветвях цепи, то для расчета с помощью комплексного метода мы должны записать эти исходные данные в виде

$$E_4 = \frac{E_{4m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_4} = E_4 e^{j\psi_4}; \quad E_2 = \frac{E_{2m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_2} = E_2 e^{j\psi_2};$$

$$E_3 = \frac{E_{3m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_3} = E_3 e^{j\psi_3};$$

$$Z_1 = r_1 + \frac{1}{j\omega C_1}; \quad Z_2 = j\omega L_2;$$

$$Z_3 = (r'_3 + r''_3) + j\omega(L'_3 + L''_3) + \frac{1}{j\omega C_3};$$

$$Z_4 = r_4 + j\omega L_4; \quad Z_5 = r_5 + j\omega L_5; \quad Z_6 = \frac{1}{j\omega C_6}.$$

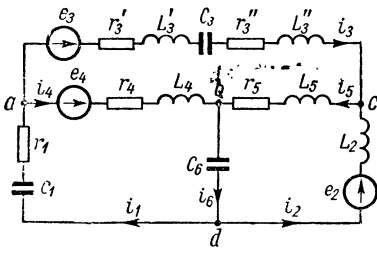


Рис. 5-5.

Для записи уравнений по законам Кирхгофа в комплексной форме, как и при составлении этих уравнений для мгновенных значений, необходимо предварительно задаться условными положительными направлениями токов во всех ветвях (§ 3-10 первой части).

Система уравнений, приведенная в § 3-10 первой части для рассматриваемой цепи (рис. 5-5), в комплексной форме запишется в следующем виде:

по первому закону Кирхгофа
 для узла *a*
$$-i_1 + i_4 + i_3 = 0,$$

 для узла *b*
$$-i_4 - i_5 + i_6 = 0,$$

 для узла *c*
$$-i_2 - i_3 + i_5 = 0;$$

по второму закону Кирхгофа
 для контура *abda*
$$\dot{E}_4 = Z_1 i_1 + Z_4 i_4 + Z_6 i_6,$$

 для контура *dcbd*
$$\dot{E}_2 = Z_2 i_2 + Z_5 i_5 + Z_6 i_6,$$

 для контура *acba*
$$\dot{E}_3 - \dot{E}_4 = Z_3 i_3 + Z_5 i_5 - Z_4 i_4.$$

Для решения данной задачи, следовательно, необходимо решить систему из шести уравнений.

Трудность расчета сложных линейных цепей заключается в необходимости решать совместно *p* линейных алгебраических уравнений. В связи с этим представляют ценность методы, позволяющие тем или иным путем упростить задачу. Эти методы дают возможность или преобразовать цепь так, что расчет упрощается, или уменьшить число уравнений, или, наконец, расчленив сложную задачу на ряд более простых. В следующих параграфах будет рассмотрен ряд основных таких методов.

5-9. Расчет цепи, основанный на преобразовании соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой

С целью упрощения расчета сложной цепи в ряде случаев оказывается целесообразным осуществить преобразование некоторой части цепи. Эта часть цепи до ее преобразования эквивалентна этой же части цепи после ее преобразования при условии, что режим в остальной непреобразованной части остается неизменным.

К числу таких преобразований относится, например, преобразование соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой, которое мы рассмотрим в настоящем параграфе, а также преобразование нескольких параллельно соединенных ветвей с источниками э. д. с. в одну эквивалентную им ветвь с одним источником э. д. с., что будет рассмотрено в следующем параграфе.

На рис. 5-6, а между точками 1, 2 и 3 некоторой сложной цепи включены три участка с сопротивлениями Z_1 , Z_2 и Z_3 , соединенные звездой. На рис. 5-6, б между этими же точками включены три

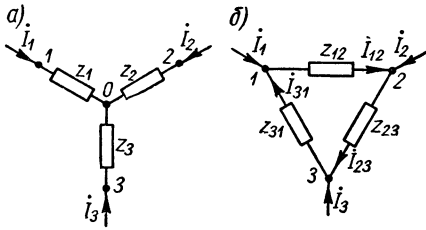


Рис. 5-6.

участка Z_{12} , Z_{23} и Z_{31} , соединенные треугольником. Остальная, не подвергающаяся преобразованию часть сложной цепи на рисунке не показана.

Соединения звездой и треугольником эквивалентны друг другу при условии, что при одинаковых в обоих случаях напряжениях \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} и \dot{U}_{31} между точками 1, 2 и 3 и токи i_1 , i_2 и i_3 , подходящие к этим точкам от остальной части цепи, одинаковы в обоих случаях.

Составим уравнения для соединения звездой:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0;$$

$$\dot{U}_{12} = i_1 Z_1 - i_2 Z_2 = i_1 Z_1 + (i_1 + i_3) Z_2 = i_1 (Z_1 + Z_2) + i_3 Z_2;$$

$$\dot{U}_{23} = i_2 Z_2 - i_3 Z_3 = -(i_1 + i_3) Z_2 - i_3 Z_3 = -i_1 Z_2 - i_3 (Z_2 + Z_3).$$

Решая эти уравнения относительно токов i_1 и i_3 , получим:

$$i_1 = \dot{U}_{12} \frac{Z_2 + Z_3}{D} + \dot{U}_{23} \frac{Z_2}{D}, \quad i_3 = -\dot{U}_{12} \frac{Z_2}{D} - \dot{U}_{23} \frac{Z_1 + Z_3}{D},$$

где

$$D = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1.$$

Для соединения треугольником имеем уравнения:

$$\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = 0;$$

$$i_1 = i_{12} - i_{31} = \dot{U}_{12} \frac{1}{Z_{12}} - \dot{U}_{31} \frac{1}{Z_{31}} = \dot{U}_{12} \left(\frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{31}} \right) + \dot{U}_{23} \frac{1}{Z_{31}};$$

$$i_3 = i_{31} - i_{23} = \dot{U}_{31} \frac{1}{Z_{31}} - \dot{U}_{23} \frac{1}{Z_{23}} = -\dot{U}_{12} \frac{1}{Z_{31}} - \dot{U}_{23} \left(\frac{1}{Z_{31}} + \frac{1}{Z_{23}} \right).$$

Токи i_1 и i_3 , а следовательно, и ток $i_2 = -i_1 - i_3$, должны быть одинаковыми в обеих схемах, при одинаковых в обоих случаях напряжениях \dot{U}_{12} и \dot{U}_{23} , причем это должно быть справедливо при

любых соотношениях между \dot{U}_{12} и \dot{U}_{23} . Следовательно, коэффициенты в выражениях для токов \dot{I}_1 и \dot{I}_3 должны быть одинаковыми в случаях соединения звездой и треугольником. Получаем:

$$\frac{Z_2 + Z_3}{D} = \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{31}}; \quad \frac{Z_2}{D} = \frac{1}{Z_{31}}; \quad \frac{Z_1 + Z_2}{D} = \frac{1}{Z_{31}} + \frac{1}{Z_{23}}.$$

Из этих уравнений определяются сопротивления искомого эквивалентного треугольника через заданные сопротивления звезды:

$$Z_{12} = \frac{D}{Z_3}, \quad Z_{23} = \frac{D}{Z_1}, \\ Z_{31} = \frac{D}{Z_2},$$

где

$$D = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1.$$

Если заданы сопротивления треугольника и ищутся сопротивления эквивалентной ему звезды, то следует пользоваться формулами:

$$Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad Z_2 = \frac{Z_{23} Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \quad Z_3 = \frac{Z_{31} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}.$$

Например, формула для Z_1 легко получается, если заметить, что

$$Z_{12} Z_{31} = \frac{D^2}{Z_2 Z_3} \quad \text{и} \quad Z_{12} + Z_{23} + Z_{31} = \frac{D^2}{Z_1 Z_2 Z_3}.$$

При эквивалентном преобразовании треугольника в звезду и наоборот возможны случаи, когда это преобразование теряет смысл, что имеет место при равенстве нулю сумм сопротивлений или проводимостей. Возможны и случаи, когда эквивалентное преобразование приводит к появлению отрицательных активных сопротивлений в отдельных лучах звезды или сторон треугольника, означающее невозможность реализации таких схем, при помощи одних r , L , C элементов. На ход расчета последнее обстоятельство не влияет. В окончательном выражении комплексное сопротивление всей пассивной цепи содержит положительную вещественную часть.

Упрощение расчета сложной цепи при помощи эквивалентного преобразования конфигурации цепи можно проследить на примере расчета цепи рис. 5-7, а. В этой цепи упрощение достигается преобразованием треугольника Z_{12} , Z_{23} , Z_{31} (рис. 5-7, а) в эквивалентную звезду Z_1 , Z_2 , Z_3 (рис. 5-7, б). После такого преобразования мы получаем простую цепь с последовательно-параллельным соединением участков.

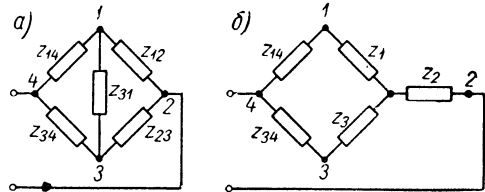


Рис. 5-7.

5-10. Преобразование нескольких параллельно соединенных ветвей с источниками э. д. с. в одну эквивалентную ветвь

Осуществим преобразование двух параллельно соединенных ветвей, содержащих источники э. д. с. \dot{E}_1 и \dot{E}_2 и сопротивления $Z_1 = \frac{1}{Y_1}$ и $Z_2 = \frac{1}{Y_2}$ (рис. 5-8), в одну эквивалентную ветвь.

В § 3-8 сказано, что источник э. д. с. e_r , обладающий конечным внутренним сопротивлением r_r , может быть заменен эквивалентным источником тока $\mathcal{J}_r = \frac{e_r}{r_r}$ с проводимостью $g_r = \frac{1}{r_r}$.

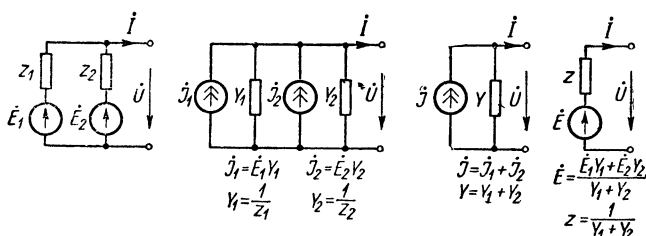


Рис. 5-8.

При синусоидальных э. д. с. и токах мы можем записать эти соотношения в комплексной форме:

$$\dot{\mathcal{J}}_r = \frac{\dot{E}_r}{Z_r}, \quad Y_r = \frac{1}{Z_r},$$

причем Z_r — комплексное сопротивление источника э. д. с. \dot{E}_r и Y_r — комплексная проводимость эквивалентного источника тока $\dot{\mathcal{J}}_r$.

Рассматривая параллельно соединенные на рис. 5-8 ветви как источники э. д. с. \dot{E}_1 и \dot{E}_2 с внутренними сопротивлениями Z_1 и Z_2 , заменим их эквивалентными источниками тока $\dot{\mathcal{J}}_1 = \dot{E}_1 Y_1$ и $\dot{\mathcal{J}}_2 = \dot{E}_2 Y_2$ с внутренними проводимостями $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$ и $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$ (рис. 5-8).

Объединив эти два источника тока в один $\dot{\mathcal{J}} = \dot{\mathcal{J}}_1 + \dot{\mathcal{J}}_2$ с внутренней проводимостью $Y = Y_1 + Y_2$, перейдем от него к источнику э. д. с.

$$\dot{E} = \frac{\dot{\mathcal{J}}}{Y} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

с внутренним сопротивлением $Z = \frac{1}{Y_1 + Y_2}$.

Для соблюдения единообразия в написании уравнений перед всеми членами, содержащими общие сопротивления Z_{km} , ставим знак «плюс». При этом следует считать $Z_{km} = Z_{mk} = r_{km} + jx_{km}$, если условные положительные направления контурных токов в общей ветви контуров k и m совпадают, и считать $Z_{km} = Z_{mk} = = -r_{km} - jx_{km}$, если они противоположны. В этих выражениях r_{km} и x_{km} — алгебраические суммы активных и реактивных сопротивлений в общей ветви.

Упрощение, достигаемое введением понятия контурных токов, не ограничивается уменьшением количества уравнений, оно определяется еще и тем, что достигается некоторый автоматизм в записи системы уравнений. Так, приведенная выше система из n уравнений записана даже без рассмотрения конкретных контуров цепи — выяснено лишь количество независимых контуров. Естественно, для определения величин Z_{kk} , Z_{km} и \dot{E}_{kk} необходимо учесть входящие в контуры конкретные сопротивления и э. д. с., а также выбранные положительные направления токов и э. д. с.

Решая приведенную выше систему уравнений для контурного тока \dot{I}_k в контуре k , найдем:

$$\dot{I}_k = \dot{E}_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + \dot{E}_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + \dot{E}_{mm} \frac{\Delta_{km}}{\Delta} + \dots + \dot{E}_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta},$$

где Δ — главный определитель системы, причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix},$$

а Δ_{k1} , Δ_{k2} , ..., Δ_{km} , ..., Δ_{kn} — алгебраические дополнения, получаемые из Δ путем вычеркивания в последнем k -й строки и m -го столбца и умножения вновь полученного определителя на $(-1)^{k+m}$. Весьма существенно заметить, что для линейных цепей без зависимых источников энергии $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$. Действительно, Δ_{km} получается из Δ путем вычеркивания k -й строки и m -го столбца, а Δ_{mk} — путем вычеркивания m -й строки и k -го столбца. Так как при отсутствии зависимых источников энергии $Z_{mk} = Z_{km}$, то в результате вычеркиваний получаются два определителя, в которых элементы строк одного равны элементам соответствующих столбцов другого, а такие определители, как известно, равны друг другу. При наличии зависимых источников энергии, как будет показано в § 1-11 третьей части, в общем случае $Z_{km} \neq Z_{mk}$.

В качестве примера рассмотрим цепь, изображенную на рис. 5-9. Положительные направления контурных токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 направим так, как указано стрелками на рис. 5-9. Контурные токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 в данном частном случае равны действительным токам в первой и во второй ветвях. Действительный же ток в третьей ветви

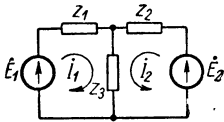


Рис. 5-9.

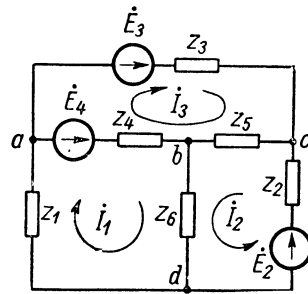


Рис. 5-10.

равен сумме контурных токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 . Пользуясь методом контурных токов, имеем только два уравнения:

$$Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = \dot{E}_{11}, \quad Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = \dot{E}_{22},$$

причем собственные сопротивления контуров равны:

$$Z_{11} = Z_1 + Z_3 \quad \text{и} \quad Z_{22} = Z_2 + Z_3,$$

и общее сопротивление равно:

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_3;$$

кроме того, $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$, $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2$.

Определитель системы:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2 = \\ &= Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1 = D. \end{aligned}$$

Соответственно:

$$\Delta_{11} = Z_{22} = Z_2 + Z_3; \quad \Delta_{22} = Z_{11} = Z_1 + Z_3;$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = -Z_{12} = -Z_3.$$

Получаем:

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 \frac{Z_2 + Z_3}{D} - \dot{E}_2 \frac{Z_3}{D}; \quad \dot{I}_2 = -\dot{E}_1 \frac{Z_3}{D} + \dot{E}_2 \frac{Z_1 + Z_3}{D}.$$

Ток \dot{I}_3 получается алгебраическим суммированием токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{E}_1 \frac{Z_2}{D} + \dot{E}_2 \frac{Z_1}{D}.$$

Составим уравнения по методу контурных токов для цепи, изображенной на рис. 5-10, причем выберем независимые контуры и положительные направления контурных токов в них согласно рис. 5-10. Этих уравнений будет только три и они имеют вид

$$Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 + Z_{13}i_3 = \dot{E}_{11},$$

$$Z_{21}i_1 + Z_{22}i_2 + Z_{23}i_3 = \dot{E}_{22},$$

$$Z_{31}i_1 + Z_{32}i_2 + Z_{33}i_3 = \dot{E}_{33},$$

причем

$$Z_{11} = Z_4 + Z_6 + Z_1; \quad Z_{22} = Z_2 + Z_5 + Z_6; \quad Z_{33} = Z_3 + Z_5 + Z_4;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_6; \quad Z_{23} = Z_{32} = Z_5; \quad Z_{13} = Z_{31} = -Z_4;$$

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_4; \quad \dot{E}_{22} = \dot{E}_2; \quad \dot{E}_{33} = \dot{E}_3 - \dot{E}_4.$$

Здесь получаем определитель третьего порядка, выражение для которого уже достаточно громоздко. С увеличением количества уравнений решение становится все более трудоемким.

Если в цепи действует лишь одна э. д. с. $\dot{E}_{kk} = \dot{E}_k$, то для токов имеем:

$$i_1 = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \dot{E}_k, \quad i_2 = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} \dot{E}_k, \quad \dots, \quad i_k = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta} \dot{E}_k, \quad \dots, \quad i_m = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} \dot{E}_k, \quad \dots$$

$$\dots, \quad i_n = \frac{\Delta_{nk}}{\Delta} \dot{E}_k.$$

Здесь величину Δ/Δ_{kk} , имеющую размерность сопротивления и определяющую ток в k -м контуре от э. д. с., содержащейся в этом же контуре, назовем входным сопротивлением k -го контура.

Величину Δ/Δ_{mk} , определяющую ток в m -ом контуре от э. д. с., действующей в k -ом контуре, назовем взаимным сопротивлением от k -го контура к m -му контуру. Входное и взаимное сопротивления определены здесь для контуров цепи. Однако их всегда можно определять и для ветвей цепи. Это ясно из того, что всегда можно выбрать независимые контуры так, чтобы две ветви, например, ветви ab и cd , вошли каждая только в один контур, скажем ветвь ab в k -й контур, а ветвь cd в m -й контур.

Обратим внимание на то, что взаимное и общее сопротивления величины существенно различные. Общее сопротивление Z_{km} есть сопротивление ветви, входящей как в k -й, так и в m -й контур. Для него, как и для сопротивления любой ветви, имеет место соотношение $Z_{km} = Z_{mk}$. Взаимное же сопротивление может относиться к двум любым контурам цепи, в общем случае и не имеющим общей ветви. Поэтому, если обозначать взаимные сопротивления \dot{E}_k/i_m и \dot{E}_m/i_k также через Z_{km} и Z_{mk} , то для них связь $Z_{km} = Z_{mk}$ будет иметь место только при дополнительном условии, что положительные

направления для э. д. с. \dot{E}_k и тока \dot{I}_k в k -м контуре согласованы между собой так же, как и для э. д. с. \dot{E}_m и тока \dot{I}_m в m -м контуре, т. е. в *обоих* контурах положительные направления э. д. с. и тока приняты в одном направлении или же в обоих контурах положительные направления э. д. с. и тока друг другу противоположны. В противном случае для взаимных сопротивлений будет иметь место связь $Z_{km} = -Z_{mk}$. Это важное обстоятельство более детально будет обосновано в § 5-14 при рассмотрении принципа взаимности.

Существенно различный смысл имеют также входное и собственное сопротивления контура. Собственное сопротивление есть сумма всех сопротивлений, входящих только в данный контур. В х о д н о е же сопротивление есть сопротивление всей цепи, определенное по отношению к источнику э. д. с. в данном контуре, при условии, что э. д. с. всех других источников приняты равными нулю.

Заметим еще, что при определении входного и взаимного сопротивлений можно исходить не из э. д. с. в контуре или в ветви, а из напряжения между двумя точками контура или ветви, например, напряжения на входных или выходных зажимах в какой-нибудь части цепи. При этом, естественно, в собственном сопротивлении этого контура необходимо учесть только сопротивления участков контура между этими зажимами, входящих в рассматриваемую цепь.

5-12. Метод узловых напряжений

При расчете сложных электрических цепей, когда уменьшенное на единицу количество узлов меньше количества независимых контуров, целесообразно воспользоваться методом узловых напряжений. Узловыми напряжениями, которые являются искомыми величинами при этом методе, называют напряжения между каждым из $q - 1$ узлов и одним определенным, но произвольно выбранным опорным узлом, который мы обозначим индексом 0. Узловое напряжение U_{k0} имеет положительное направление от k -го узла ($k = 1, 2, \dots, q - 1$) к опорному узлу. Определив $q - 1$ искомым узловых напряжений, нетрудно найти напряжения между любыми парами узлов и токи в ветвях цепи. Поскольку по первому закону Кирхгофа можно записать $q - 1$ независимых уравнений, то выразим все токи в ветвях через искомые узловые напряжения для получения системы уравнений, записанных относительно $q - 1$ искомым величин.

Прежде чем перейти к изложению самого метода, напомним, что в случае, когда между двумя узлами имеются несколько параллельно соединенных ветвей с источниками э. д. с. или без них, их можно привести к одной эквивалентной ветви с эквивалентным

источником э. д. с. $\dot{E}_{\text{экв}} = \frac{\sum \dot{E}_j Y_j}{\sum Y_j}$ и эквивалентной проводимостью $Y_{\text{экв}} = \sum Y_j$, что было изложено в § 5-10. Это дает нам право без ограничения общности считать, что между любой парой узлов включена только одна ветвь, т. е. вместо схемы, изображенной на рис. 5-11, рассматривать упрощенную схему рис. 5-12.

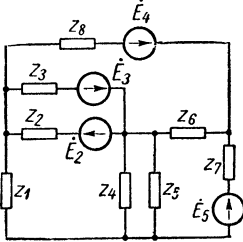
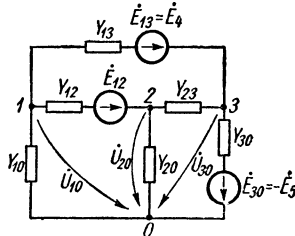


Рис. 5-11.



$$Y_{13} = \frac{1}{Z_8}; Y_{10} = \frac{1}{Z_1}; Y_{20} = \frac{1}{Z_7}$$

$$Y_{20} = Y_4 + Y_5 = \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5}$$

$$Y_{12} = Y_2 + Y_3 = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

$$\dot{E}_{12} = \frac{\dot{E}_3 Y_3 - \dot{E}_2 Y_2}{Y_2 + Y_3}$$

Рис. 5-12.

Если между узлами k и m имеется ветвь с источником э. д. с. \dot{E}_{km} и сопротивлением Z_{km} , то ток i_{km} в этой ветви, направленный согласно порядку индексов от узла k к m , и напряжение $\dot{U}_{km} = -\dot{U}_{mk}$ между этими узлами связано соотношением (рис. 5-13):

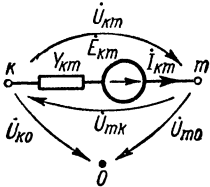


Рис. 5-13.

$$i_{km} Z_{km} + \dot{U}_{mk} = \dot{E}_{km} \text{ или } i_{km} Z_{km} - \dot{U}_{km} = \dot{E}_{km},$$

т. е.

$$i_{km} = \frac{\dot{E}_{km} + \dot{U}_{km}}{Z_{km}} = Y_{km} \dot{E}_{km} + Y_{km} \dot{U}_{km}.$$

Здесь и всюду дальше при наличии двух индексов k и m принимается, что $m \neq k$, так как рассматриваются ветви и напряжения между двумя разными узлами.

Первое уравнение Кирхгофа для некоторого узла k можно записать в виде

$$\sum_{m=0}^{q-1} i_{km} = \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km} \dot{U}_{km} + \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km} \dot{E}_{km} = 0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{q-1} Y_{km} \dot{U}_{km} + \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km} \dot{E}_{km} = 0.$$

Отметим, что при $Z_{km} = 0$ и $\dot{E}_{km} \neq 0$ имеем:

$$Y_{km} = \infty, \quad \dot{U}_{km} = -\dot{E}_{km} \quad \text{и} \quad Y_{km}\dot{U}_{km} + Y_{km}\dot{E}_{km} = \\ = Y_{km}(\dot{U}_{km} + \dot{E}_{km}) = \infty \cdot 0.$$

При этом использование последнего уравнения требует раскрытия неопределенности. Дальше будем предполагать, что $Z_{km} \neq 0$, т. е. между узлами цепи не включены идеальные источники э. д. с.

Для краткости обозначим:

$$- \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km}\dot{E}_{km} = \dot{\mathcal{J}}_k.$$

Так как все величины Y_{km} и \dot{E}_{km} заданы, то и величина $\dot{\mathcal{J}}_k$ также является заданной. Соответственно ее называют иногда *з а д а ю щ и м т о к о м*. Ей можно придать следующий смысл: заменим в каждой ветви источник э. д. с. эквивалентным источником тока $\dot{\mathcal{J}}_{km}$. Согласно сказанному в § 5-10, будем иметь:

$$\dot{\mathcal{J}}_{km} = Y_{km}\dot{E}_{km} = -\dot{\mathcal{J}}_{mk}.$$

Таким образом,

$$\dot{\mathcal{J}}_k = - \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km}\dot{E}_{km} = \sum_{m=0}^{q-1} \dot{\mathcal{J}}_{mk},$$

т. е. величина $\dot{\mathcal{J}}_k$ равна сумме токов присоединенных к k -му узлу источников тока. При этом положительные направления токов $\dot{\mathcal{J}}_{mk}$ принимаются в соответствии с порядком индексов от m -го узла к k -му узлу.

При таком обозначении имеем:

$$\sum_{m=0}^{q-1} Y_{km}\dot{U}_{km} - \dot{\mathcal{J}}_k = 0$$

или

$$\sum_{m=0}^{q-1} Y_{km}\dot{U}_{km} = \dot{\mathcal{J}}_k.$$

Напряжение \dot{U}_{km} можно выразить через узловые напряжения \dot{U}_{k0} и \dot{U}_{m0} (рис. 5-13) в виде

$$\dot{U}_{km} = \dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}.$$

Получаем:

$$\sum_{m=0}^{q-1} Y_{km}(\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}) = \dot{\mathcal{J}}_k,$$

или

$$\sum_{m=0}^{q-1} Y_{km}\dot{U}_{k0} - \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km}\dot{U}_{m0} = \dot{U}_{k0} \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km} - \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km}\dot{U}_{m0} = \dot{\mathcal{J}}_k.$$

Обозначив $\sum_{m=0}^{q-1} Y_{km} = Y_{kk}$, где Y_{kk} есть сумма проводимостей всех ветвей, присоединенных к k -му узлу, имеем:

$$Y_{kk} \dot{U}_{k0} - \sum_{m=0}^{q-1} Y_{km} \dot{U}_{m0} = \dot{\mathcal{J}}_k,$$

что и является основным уравнением для k -го узла по методу узловых напряжений.

В развернутой форме совокупность уравнений по методу узловых напряжений имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_{11} \dot{U}_{10} - Y_{12} \dot{U}_{20} - \dots - Y_{1, q-1} \dot{U}_{q-1, 0} &= \dot{\mathcal{J}}_1, \\ -Y_{21} \dot{U}_{10} + Y_{22} \dot{U}_{20} - \dots - Y_{2, q-1} \dot{U}_{q-1, 0} &= \dot{\mathcal{J}}_2, \\ \dots &\dots \\ -Y_{q-1, 1} \dot{U}_{10} - Y_{q-1, 2} \dot{U}_{20} - \dots + Y_{q-1, q-1} \dot{U}_{q-1, 0} &= \dot{\mathcal{J}}_{q-1}. \end{aligned}$$

Решая эту систему, найдем узловые напряжения, причем для k -го узла величина \dot{U}_{k0} будет:

$$\dot{U}_{k0} = \dot{\mathcal{J}}_1 \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + \dot{\mathcal{J}}_2 \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} + \dots + \dot{\mathcal{J}}_m \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} + \dots + \dot{\mathcal{J}}_{q-1} \frac{\Delta_{q-1, k}}{\Delta},$$

где Δ — главный определитель системы и Δ_{mk} — его алгебраическое дополнение. После того как узловые напряжения найдены,

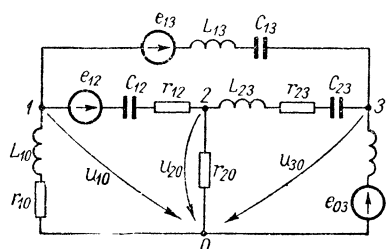


Рис. 5-14.

определение токов в ветвях цепи не представляет, как указано выше, каких-либо затруднений. Например, ток в ветви без э. д. с. равен

$$i_{km} = \dot{U}_{km} Y_{km} = (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}) Y_{km}.$$

Если в ветви содержится э. д. с., то ток равен

$$i_{km} = Y_{km} \dot{E}_{km} + (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}) Y_{km}.$$

В качестве примера составим уравнения по методу узловых напряжений для цепи, изображенной на рис. 5-10. Так как уравнения составляются теперь для узлов, то удобнее пронумеровать не ветви, как это сделано на рис. 5-10 при решении задачи методом контурных токов, а узлы (рис. 5-14). Сопротивления и проводимости ветвей, а также токи в ветвях снабжаем двумя индексами, соответствующими номерам узлов, между которыми расположена данная ветвь. Выбрав узел d на рис. 5-10 за опорный, припишем ему индекс 0 (рис. 5-14).

Заданы э. д. с.

$$e_{13} = E_{m13} \sin(\omega t + \psi_{13}), \quad e_{12} = E_{m12} \sin(\omega t + \psi_{12}), \\ e_{03} = E_{m03} \sin(\omega t + \psi_{03})$$

и параметры всех элементов. Расчет цепи производим при помощи комплексного метода. Поэтому запишем в комплексной форме исходные данные:

$$\dot{E}_{13} = E_{13} e^{j\psi_{13}}, \quad \dot{E}_{12} = E_{12} e^{j\psi_{12}}, \quad \dot{E}_{03} = E_{03} e^{j\psi_{03}}; \\ Y_{12} = \frac{1}{r_{12} + \frac{1}{j\omega C_{12}}}, \quad Y_{23} = \frac{1}{r_{23} + j\omega L_{23} + \frac{1}{j\omega C_{23}}}, \\ Y_{13} = \frac{1}{j\omega L_{13} + \frac{1}{j\omega C_{13}}}, \quad Y_{10} = \frac{1}{r_{10} + j\omega L_{10}}, \quad Y_{20} = \frac{1}{r_{20}}, \quad Y_{30} = \frac{1}{j\omega L_{30}}.$$

Для узлов 1, 2 и 3 имеем уравнения:

$$Y_{11}\dot{U}_{10} - Y_{12}\dot{U}_{20} - Y_{13}\dot{U}_{30} = \mathcal{J}_1; \\ -Y_{21}\dot{U}_{10} + Y_{22}\dot{U}_{20} - Y_{23}\dot{U}_{30} = \mathcal{J}_2; \\ -Y_{31}\dot{U}_{10} - Y_{32}\dot{U}_{20} + Y_{33}\dot{U}_{30} = \mathcal{J}_3.$$

Эту систему уравнений можно записать непосредственно, после того как перенумерованы узлы. Входящие в эти уравнения проводимости и токи в данном случае равны:

$$Y_{11} = Y_{12} + Y_{10} + Y_{13}, \quad Y_{22} = Y_{20} + Y_{12} + Y_{23}, \\ Y_{33} = Y_{30} + Y_{13} + Y_{23}; \\ \mathcal{J}_1 = -\dot{E}_{12}Y_{12} - \dot{E}_{13}Y_{13}, \quad \mathcal{J}_2 = -\dot{E}_{21}Y_{12} = \dot{E}_{12}Y_{12}, \\ \mathcal{J}_3 = -\dot{E}_{30}Y_{30} - \dot{E}_{31}Y_{13} = \dot{E}_{03}Y_{30} + \dot{E}_{13}Y_{13}.$$

Решив систему из трех уравнений относительно узловых напряжений \dot{U}_{10} , \dot{U}_{20} и \dot{U}_{30} , легко находим напряжения на ветвях и токи в них.

Интересно отметить, что метод контурных токов и метод узловых напряжений как бы дополняют друг друга. Если первый применяется к независимым контурам цепи, то второй — к независимым узлам цепи. Вопрос о том, каким методом целесообразнее воспользоваться, зависит от конфигурации цепи, а именно от того, что является меньшим, число независимых контуров ($p - q + 1$) или число независимых узлов ($q - 1$). В первом случае лучше воспользоваться методом контурных токов, во втором — методом узловых напряжений. В этом отношении для цепи, изображенной на рис. 5-14, ни один из методов не имеет преимуществ перед другим. Однако

для цепей, изображенных на рис. 5-15 и 5-16, мы имеем иное положение. Для первой цепи (рис. 5-15) $p = 13$, $q = 6$ и, следовательно, $q - 1 = 5$, а $p - q + 1 = 8$, а для второй цепи (рис. 5-16) $p = 20$, $q = 12$ и, следовательно, $q - 1 = 11$, а $p - q + 1 = 9$. Поэтому для первой цепи (рис. 5-15) выгоднее воспользоваться методом узловых напряжений, а для второй методом контурных токов.

При наличии в цепи единственного источника тока \mathcal{I}_{0k} , подключенного между опорным и k -м узлом, получаем:

$$\dot{U}_{10} = \mathcal{I}_{0k} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta}, \quad \dot{U}_{k0} = \mathcal{I}_{0k} \frac{\Delta_{kk}}{\Delta}, \quad \dots, \quad \dot{U}_{m0} = \mathcal{I}_{0k} \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}.$$

Величину Δ/Δ_{kk} , имеющую размерность проводимости, назовем входной проводимостью между опорным и k -м узлами, а величину Δ/Δ_{mk} — взаимной проводимостью между m -м и k -м узлами.

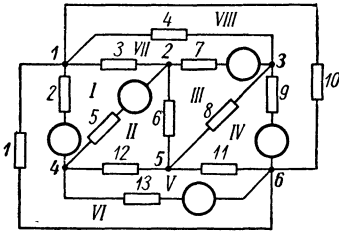


Рис. 5-15.

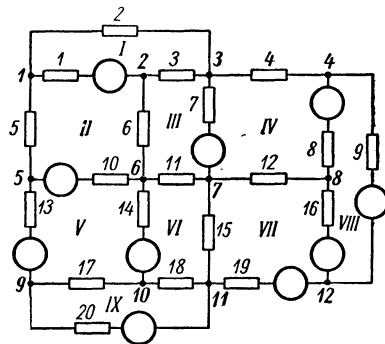


Рис. 5-16.

Обратим внимание на то, что если для того, чтобы *взаимное сопротивление* между двумя контурами не меняло знака при перестановке индексов, требовалось согласовывать одинаково положительные направления э. д. с. и тока в k -м и в m -м контурах, то для взаимных проводимостей знак не меняется при перестановке индексов, так как соответствующее требование согласованности положительных направлений задающих токов и узловых напряжений уже выполнено. Положительное направление всех узловых напряжений принято считать к опорному узлу (\dot{U}_{k0} , \dot{U}_{m0}), а положительное направление всех задающих токов от опорного узла (\mathcal{I}_{0k} , \mathcal{I}_{0m}).

5-13. Принцип наложения и основанный на нем метод расчета цепи

В выражении для тока I_k , полученном по методу контурных токов, величины \dot{E}_{11} , \dot{E}_{22} , ..., \dot{E}_{nn} представляют каждая сумму э. д. с. всех источников, входящих в соответствующие контуры.

Точно так же в выражении для узлового напряжения \dot{U}_{k0} , полученного по методу узловых напряжений, величины $\dot{\mathcal{I}}_1, \dot{\mathcal{I}}_2, \dots, \dot{\mathcal{I}}_{q-1}$ представляют каждая сумму токов всех источников токов, подключенных к соответствующим узлам. Выписав эти суммы явно и сгруппировав в выражениях для \dot{I}_k и \dot{U}_{k0} члены, содержащие э. д. с. или токи отдельных источников, получим выражения для \dot{I}_k и \dot{U}_{k0} в виде слагаемых, каждое из которых будет иметь множителем э. д. с. или ток того или иного источника. Из этого следует, что контурный ток в любом контуре равен сумме токов, вызываемых в этом контуре каждой из э. д. с. в отдельности, и, соответственно, узловое напряжение между любым узлом и опорным равно сумме узловых напряжений, созданных между этим узлом и опорным каждым в отдельности источником тока (или источником э. д. с. ветви, подключенной к данному узлу). Это весьма важное положение о независимости действия источников э. д. с. или тока, известное под наименованием принципа наложения, вытекает из линейности уравнений, получаемых на основании законов Кирхгофа для линейных цепей, т. е. цепей с параметрами, не зависящими от токов и напряжений.

Принцип наложения справедлив не только для любого контурного тока, но и для тока в любой ветви, так как можно всегда выбрать совокупность контуров так, что интересующая нас ветвь войдет только в один контур. Это непосредственно вытекает также из линейности системы уравнений, записанных в отношении истинных токов в ветвях по законам Кирхгофа.

Следует иметь в виду, что принцип наложения не применим для квадратичных форм, каковыми являются выражения для мощностей.

Принцип наложения позволяет расчленить сложную задачу на ряд более простых, в каждой из которых в рассматриваемой сложной цепи действует только одна э. д. с. или один источник тока, а все остальные источники энергии предполагаются отсутствующими.

При этом все другие источники э. д. с. должны быть замкнуты накоротко с сохранением в ветвях их внутренних сопротивлений, а все другие источники тока должны быть разомкнуты, но должны быть сохранены в соответствующих ветвях их внутренние проводимости.

Применяя, например, принцип наложения для решения задачи расчета цепи, изображенной на рис. 5-9, получаем две

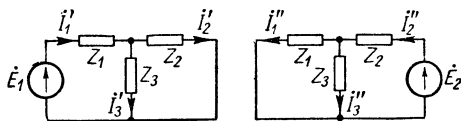


Рис. 5-17.

более простые задачи (рис. 5-17), токи в которых находятся просто:

$$i'_1 = \frac{E_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{E_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3)}{D};$$

$$i'_2 = i'_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{E}_1 Z_3}{D}; \quad i'_3 = i'_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{E}_1 Z_2}{D};$$

$$i''_2 = \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} = \frac{\dot{E}_2 (Z_1 + Z_3)}{D};$$

$$i''_1 = i''_2 \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{\dot{E}_2 Z_3}{D}; \quad i''_3 = i''_2 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_3} = \frac{\dot{E}_2 Z_2}{D}.$$

Следовательно, действительные токи в ветвях при действии обоих источников э. д. с., с учетом направления стрелок на рис. 5-17, равны:

$$i_1 = i'_1 - i''_1 = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{D};$$

$$i_2 = i'_2 - i''_2 = \frac{\dot{E}_2 (Z_1 + Z_3) - \dot{E}_1 Z_3}{D};$$

$$i_3 = i'_3 + i''_3 = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{D}.$$

Задача расчета цепи, изображенной на рис. 5-10, с помощью принципа наложения соответственно может быть расчленена на три более простые задачи расчета той же цепи при действии одной э. д. с. \dot{E}_2 , \dot{E}_3 или \dot{E}_4 .

5-14. Принцип взаимности и основанный на нем метод расчета цепи

Для линейных цепей справедлив важный принцип взаимности, установленный Максвеллом, который гласит:

если э. д. с. $\dot{E}_{ab} = \dot{E}$, действуя в ветви ab сколь угодно сложной цепи, при отсутствии в цепи прочих э. д. с. вызывает в другой ветви cd этой цепи ток $i_{cd} = i$, то такая же э. д. с. $\dot{E}_{cd} = \dot{E}$, действуя в ветви cd , при отсутствии прочих э. д. с. вызовет в ветви ab такой же ток $i_{ab} = i$.

Это положение вытекает из выражения для тока i_k по методу контурных токов. Выберем независимые контуры так, чтобы ветвь ab входила только в контур k , а ветвь cd только в контур m , что по отношению к двум ветвям, как уже отмечалось ранее, всегда можно сделать. Тогда из равенств:

$$i_{ab} = i_k = \dot{E} \frac{\Delta_{km}}{\Delta} \quad \text{и} \quad i_{cd} = i_m = \dot{E} \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}$$

следует, что $\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{cd} = \dot{I}$, так как $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$. При этом отношение $\frac{\dot{E}_{ab}}{\dot{I}_{cd}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}}$ есть взаимное сопротивление Z_{km} от k -го контура к m -му контуру, а отношение $\frac{\dot{E}_{cd}}{\dot{I}_{ab}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}}$ есть взаимное сопротивление Z_{mk} от m -го контура к k -му контуру. Таким образом, сформулированный указанным образом принцип взаимности приводит к равенству этих взаимных сопротивлений: $Z_{km} = Z_{mk}$. Обратим внимание, что здесь, переставляя э. д. с. \dot{E} из одной ветви в другую, мы одинаково согласовывали положительные направления э. д. с. и токов в каждой из этих ветвей. Именно, мы положили: $\dot{E} = \dot{E}_{ab}$ и $\dot{I} = \dot{I}_{ab}$, а также $\dot{E} = \dot{E}_{cd}$ и $\dot{I} = \dot{I}_{cd}$.

Если бы при перестановке э. д. с. \dot{E} из ветви ab в ветвь cd мы изменили ее положительное направление, т. е. приняли $\dot{E} = \dot{E}_{ab}$ и $\dot{E} = \dot{E}_{dc} = -\dot{E}_{cd}$, а положительные направления токов оставили прежними, т. е. приняли по-прежнему $\dot{I} = \dot{I}_{ab}$ и $\dot{I} = \dot{I}_{cd}$, то, очевидно, получили бы

$$Z_{km} = \frac{\dot{E}_{ab}}{\dot{I}_{cd}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} \quad \text{и} \quad Z_{mk} = \frac{\dot{E}_{cd}}{\dot{I}_{ab}} = -\frac{\dot{E}_{dc}}{\dot{I}_{ab}} = -\frac{\dot{E}}{\dot{I}},$$

т. е. получили бы соотношение $Z_{km} = -Z_{mk}$, на что было уже указано в § 5-11.

В дальнейшем, пользуясь принципом взаимности, будем предполагать, что положительные направления э. д. с. и токов во всех ветвях приняты согласованными одинаково, т. е. будем при этом иметь $Z_{km} = Z_{mk}$.

Принцип взаимности в сочетании с принципом наложения дает возможность существенно снизить трудоемкость расчета сложной цепи, в которой действуют одновременно несколько э. д. с., особенно в случае, когда требуется определить ток в одной ветви этой цепи.

Пусть сложная цепь, состоящая из p ветвей, содержит s источников э. д. с. $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_s$ в s первых по порядку номеров ветвях. Предположим, что в цепи действует только одна э. д. с. \dot{E}_k в k -й ветви ($1 \leq k \leq s$), а остальные источники э. д. с. закорочены с сохранением в ветвях их внутренних сопротивлений. Назовем эту соответственно простую задачу основной. Вычислим в этой задаче токи во всех p ветвях: $\dot{I}_1^{(k)}, \dot{I}_2^{(k)}, \dot{I}_3^{(k)}, \dots, \dot{I}_m^{(k)}, \dots, \dot{I}_p^{(k)}$.

Здесь верхний индекс в скобках показывает, под действием какой э. д. с. возникает ток, а нижний — в какой ветви рассматривается ток.

Если единственный источник с э. д. с. \dot{E}_k переставить в m -ю ветвь, то согласно принципу взаимности в k -й ветви пойдет такой же ток, как в основной задаче в m -й ветви, т. е. при этом ток в k -й ветви будет равен току $\dot{I}_m^{(k)}$, вычисленному в основной задаче.

В действительности в m -й ветви действует источник э. д. с. \dot{E}_m . Очевидно, ток в k -й ветви, возникающий под действием единственного источника э. д. с. \dot{E}_m , включенного в m -ю ветвь, равен:

$$I_k^{(m)} = I_m^{(k)} \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_k}.$$

Переставляя последовательно единственный источник с э. д. с. \dot{E}_k во все ветви, в которых в исследуемой реальной цепи действуют источники э. д. с., т. е. изменяя индекс m от единицы до s , включая и значение $m = k$, и осуществляя пропорциональный пересчет значений токов от э. д. с. \dot{E}_k к действительным значениям э. д. с. \dot{E}_m , вычислим таким методом токи в k -й ветви, возникающие в ней при действии всех действительных э. д. с. по одиночке.

Согласно принципу наложения ток I_k в k -й ветви, возникающий при действии всех заданных э. д. с. одновременно, равен:

$$I_k = \sum_{m=1}^s I_k^{(m)} = \sum_{m=1}^s I_m^{(k)} \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_k}.$$

Таким образом, достаточно решить только сравнительно простую основную задачу, т. е. рассчитать токи $I_m^{(k)}$ во всех ветвях, когда действует только одна э. д. с. \dot{E}_k в той ветви (k -й), в которой мы хотим найти ток I_k , после чего искомым ток I_k вычисляется по последней формуле. Эта формула непосредственно пригодна для вычисления тока в ветви, содержащей источник э. д. с. ($1 \leq k \leq s$), т. е. если $\dot{E}_k \neq 0$.

Для вычисления же тока в ветви, в которой нет источника э. д. с. ($s < k \leq p$), можно воспользоваться этой же формулой, если предположить, что в эту ветвь включен фиктивный источник с э. д. с. $\dot{E}_{k \text{ фикт}} \neq 0$; тогда

$$I_k = \sum_{m=1}^s I_m^{(k \text{ фикт})} \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_{k \text{ фикт}}} \quad (k > s).$$

Поскольку суммирование идет только до $m = s$, $k > s$, то ток в k -й ветви от действия фиктивного источника, когда он включен в эту же k -ю ветвь, не учитывается.

5-15. Метод эквивалентного генератора

Задача отыскания тока в одной выделенной ветви, рассмотренная в предыдущем параграфе, может быть решена также с помощью метода эквивалентного генератора или, как иногда говорят, с помощью теоремы об эквивалентном генераторе. Сущность этого метода заключается в том, что

по отношению к выделенной ветви ab с сопротивлением Z_{ab} вся оставшаяся часть сложной цепи, содержащая источники э. д. с., может быть заменена одним эквивалентным генератором с э. д. с. \dot{E}_r и внутренним сопротивлением Z_r .

На рис. 5-18 оставшая часть цепи обведена пунктирной рамкой и обозначена буквой А. Она является активным двухполюсником с зажимами a и b . Величины \dot{E}_r и Z_r определяются через известные э. д. с. и сопротивления действительной сложной цепи внутри активного двухполюсника. Покажем, как найти эти величины.

Введем в ветвь ab дополнительную э. д. с., величину и направление которой подберем так, чтобы ток в ветви ab был равен нулю. Тогда согласно второму закону Кирхгофа для величины этой э. д. с., положительное направление которой указано на рис. 5-19, имеем $\dot{E}_0 = \dot{U}_0$, где \dot{U}_0 — напряжение на зажимах ab при $i_{ab} = 0$. Такое же напряжение \dot{U}_0 возникает на зажимах a и b активного двухполюсника А, если ветвь ab на рис. 5-18 разомкнуть.

Рассмотрим теперь цепь, изображенную на рис. 5-20. Часть этой цепи, обведенная пунктиром и обозначенная буквой П, представляет собой пассивный двухполюсник, который получается из активного двухполюсника А (рис. 5-18), если принять в последнем

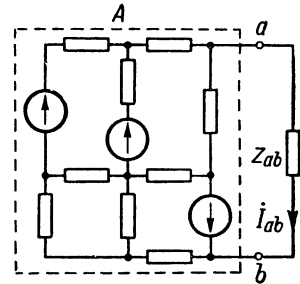


Рис. 5-18.

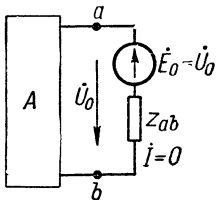


Рис. 5-19.

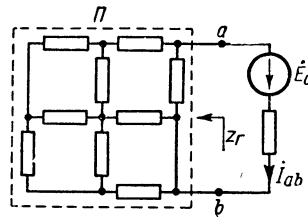


Рис. 5-20.

все э. д. с. равными нулю. Кроме того, в ветвь ab введем источник э. д. с., величина которой также равна $\dot{E}_0 = \dot{U}_0$, но положительное направление которой противоположно положительному направлению э. д. с. \dot{E}_0 на рис. 5-19. Налагая режимы в схемах рис. 5-19 и 5-20 друг на друга, мы получаем систему э. д. с. в исходной цепи (рис. 5-18), и так как в случае рис. 5-19 ток в ветви ab равен нулю, то токи в этой ветви в схемах рис. 5-18 и 5-20 равны другу.

Представив пассивный двухполюсник Π одним участком с сопротивлением Z_r , равным входному сопротивлению двухполюсника Π , приходим к схеме рис. 5-21 и окончательно к схеме рис. 5-22. Последняя схема и свидетельствует о возможности замены активного двухполюсника A (рис. 5-18) эквивалентным генератором с э. д. с. $\dot{E}_r = \dot{E}_0 = \dot{U}_0$ и сопротивлением Z_r . Следовательно, искомый ток в ветви ab равен:

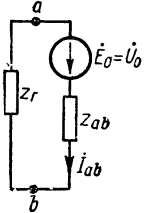


Рис. 5-21.

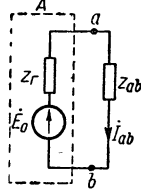


Рис. 5-22.

$$i_{ab} = \frac{\dot{U}_0}{Z_r + Z_{ab}}$$

Таким образом, для определения тока i_{ab} в интересующей нас ветви необходимо экспериментально или расчетным путем найти напряжение \dot{U}_0 , при разрыве ветви ab и сопроти-

вление Z_r всей прочей части цепи при замкнутых накоротко содержащихся в ней источниках э. д. с.

В реальных электрических цепях величина Z_r может быть определена также и экспериментально. Обозначим ток в ветви ab при $Z_{ab} = 0$, т. е. при замыкании этой ветви накоротко, через i_k . Тогда из выражения для i_{ab} получим $Z_r = \dot{U}_0 / i_k$, т. е. Z_r можно определить экспериментально как отношение напряжения \dot{U}_0 на

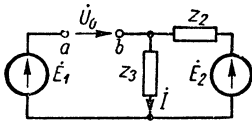


Рис. 5-23.

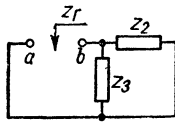


Рис. 5-24.

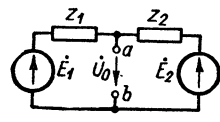


Рис. 5-25.

зажимах ab цепи при холостом ходе к току i_k при ее коротком замыкании.

Применим теорему об эквивалентном генераторе для определения токов в цепи, изображенной на рис. 5-9. Для определения тока i_1 разомкнем первую ветвь и найдем напряжение на ее зажимах (рис. 5-23), причем положительное направление примем совпадающим с принятым на рисунке положительным направлением искомого тока i_1 . Имеем:

$$\dot{U}_0 + iZ_3 = \dot{E}_1;$$

$$\dot{U}_0 = \dot{E}_1 - iZ_3 = \dot{E}_1 - \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + Z_3} Z_3 = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Сопротивление Z_r найдем как сопротивление всей прочей цепи между зажимами ab при замкнутых накоротко источниках э. д. с. (рис. 5-24):

$$Z_r = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Следовательно, искомый ток равен:

$$I_1 = \frac{\dot{U}_0}{Z_r + Z_1} = \frac{\dot{E}_1(Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{D}.$$

Для определения этим методом тока I_3 разомкнем третью ветвь (рис. 5-25). Напряжение на ее зажимах при этом имеет значение:

$$\dot{U}_0 = \dot{E}_1 - I Z_1 = \dot{E}_1 - \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{Z_1 + Z_2} Z_1 = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Величина Z_r в этом случае равна:

$$Z_r = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Следовательно:

$$I_3 = \frac{\dot{U}_0}{Z_r + Z_3} = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{D}.$$

В качестве еще одного примера применения теоремы об эквивалентном генераторе рассмотрим задачу об определении тока I_0

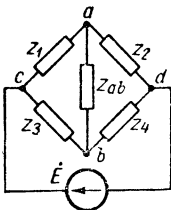


Рис. 5-26.

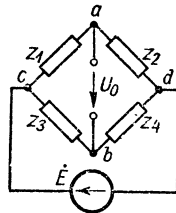


Рис. 5-27.

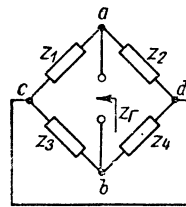


Рис. 5-28.

в ветви ab нулевого прибора неуравновешенной мостовой схемы (рис. 5-26) в случае, когда можно пренебречь внутренним сопротивлением источника э. д. с., питающего мост. Предположив, что ветвь ab разомкнута (рис. 5-27), найдем напряжение \dot{U}_0 на ее зажимах:

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{cb} - \dot{U}_{ca} = \dot{E} \left(\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right).$$

Для сопротивления Z_r цепи между точками ab при разомкнутой ветви нулевого прибора и при замыкании накоротко точек c и d (рис. 5-28) будем иметь:

$$Z_r = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}.$$

Следовательно, искомый ток

$$i_0 = \dot{E} \left(\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) : \left(Z_{ab} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4} \right),$$

где Z_{ab} — сопротивление нулевого прибора.

Теорему об эквивалентном генераторе можно преобразовать, заменив генератор э. д. с. $\dot{E}_r = \dot{U}_0$ с внутренним сопротивлением Z_r генератором тока $\mathcal{I}_r = \frac{\dot{U}_0}{Z_r} = i_k$ с внутренней проводимостью $Y_r = \frac{1}{Z_r}$.

В заключение рассмотрим еще один пример использования теоремы об эквивалентном генераторе, а именно задачу подбора параметров в данной ветви, приключенной к сложной цепи с целью получения максимальной активной мощности. Применяв теорему об эквивалентном генераторе, можно определить ток в приемнике в виде

$$i_{np} = \frac{\dot{U}_0}{Z_r + Z_{np}} = \frac{\dot{U}_0}{(r_r + r_{np}) + j(x_r + x_{np})}.$$

Активная мощность

$$P = I_{np}^2 r_{np} = \frac{U_0^2 r_{np}}{(r_r + r_{np})^2 + (x_r + x_{np})^2}.$$

Из выражения для P при $r_{np} \neq 0$ следует, что максимум мощности можно обеспечить при уменьшении знаменателя, добываясь равенства $x_{np} + x_r = 0$ (x_{np} и x_r могут быть разного характера — индуктивного или емкостного). При этом

$$P = \frac{U_0^2 r_{np}}{(r_r + r_{np})^2}.$$

Учитывая, что r_r — величина заданная, можно найти P_{\max} , изменяя r_{np} . Условием обеспечения абсолютного максимума будет равенство $r_r = r_{np}$. При этом

$$P_{\max} = \frac{U_0^2}{4r_r} \text{ и } \eta = \frac{P_2}{P_0} \cdot 100 = \frac{I_{np}^2 r_{np} \cdot 100}{I_{np}^2 (r_r + r_{np})} = \frac{r_{np} \cdot 100}{r_r + r_{np}} = 50\%,$$

где η — коэффициент полезного действия рассматриваемого устройства. Режим максимальной мощности представляет интерес в маломощных передаточных устройствах, применяемых в электроизмерительной технике, в радиотехнике, радиоэлектронике и автоматике. В этих случаях получение возможно большей мощности нередко является более важным, чем достижение большого значения коэффициента полезного действия.

5-16. Расчет цепей при наличии взаимной индукции

Правило составления дифференциальных уравнений цепи при наличии взаимной индукции, рассмотренное в § 3-7 части первой, положим в основу для расчета цепей с взаимной индукцией при протекании синусоидальных токов. Применив комплексный метод, мы алгебраизируем эти уравнения.

Напомним это правило, определяющее знак э. д. с. взаимной индукции или падения напряжения, компенсирующего эту э. д. с. Звездочки, поставленные на одном из зажимов каждой катушки, означают следующее: если положительное направление тока в первой катушке принято от звездочки, то положительное направление э. д. с. взаимной индукции, возникающей в другой катушке, также должно быть принято от звездочки. Будем считать, что для данной системы звездочек, отмеченных на зажимах всех индуктивно связанных катушек, известны коэффициенты взаимной индукции по величине и знаку.

Для расчета цепей, содержащих индуктивно связанные ветви, непосредственно применимы все изложенные выше методы, за исключением метода узловых напряжений и формул преобразования соединения треугольника в эквивалентное соединение звездой и обратно. Применение этих последних требует введения некоторых дополнительных правил.

Рассчитаем цепь, изображенную на рис. 5-29. Катушки L_1 и L_2 индуктивно связаны, причем для данной системы звездочек задан коэффициент взаимной индукции $M_{12} = M_{21} = M$.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, обход которого производим по часовой стрелке. Пусть положительные направления тока и обхода контура совпадают. В контур входят пять э. д. с.: э. д. с. \dot{E} внешнего источника, э. д. с. самоиндукции $\dot{E}_{1L} = -j\omega L_1 i$ и $\dot{E}_{2L} = -j\omega L_2 i$ и э. д. с. взаимной индукции $\dot{E}_{1M} = -j\omega M i$ и $\dot{E}_{2M} = -j\omega M i$. Положительные направления э. д. с. самоиндукции \dot{E}_{1L} и \dot{E}_{2L} совпадают с положительным направлением тока в цепи.

Так как положительное направление тока в обеих катушках взято от звездочки, то в обеих катушках положительное направление э. д. с. взаимной индукции \dot{E}_{1M} и \dot{E}_{2M} также будет от звездочек. Поэтому все э. д. с. войдут в уравнение с одинаковым положительным знаком:

$$\dot{E} + \dot{E}_{1L} + \dot{E}_{2L} + \dot{E}_{1M} + \dot{E}_{2M} = i(r_1 + r_2).$$

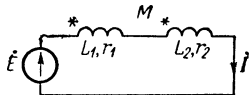


Рис. 5-29.

Вспомним, что все сказанное можно относить к падениям напряжения, для которых имеем: $\dot{U}_L = -\dot{E}_L$ и $\dot{U}_M = -\dot{E}_M$ и, следовательно:

$$\dot{E} = \dot{U}_{1L} + \dot{U}_{1M} + \dot{U}_{2L} + \dot{U}_{2M} + \dot{I}(r_1 + r_2)$$

или

$$\dot{E} = j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + \dot{I}(r_1 + r_2),$$

откуда

$$\dot{E} = \dot{I}(r_1 + r_2) + \dot{I}j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = \dot{I}(r_s + jL_s) = \dot{I}Z_s.$$

Величина $L_s = L_1 + L_2 + 2M$ представляет собой эквивалентную индуктивность всей цепи.

Эквивалентная индуктивность всегда положительна, что вытекает из равенства $W_M = \frac{1}{2} L_s \dot{I}^2 > 0$, так как энергия магнитного

поля всей цепи всегда положительна.

Эквивалентная индуктивность зависит от значения взаимной индуктивности. В зависимости от знака M можно отличить два способа включения катушек: согласное включение, когда $M > 0$ ($M = |M|$), и встречное включение, когда $M < 0$ ($M = -|M|$). При согласном включении магнитные потоки

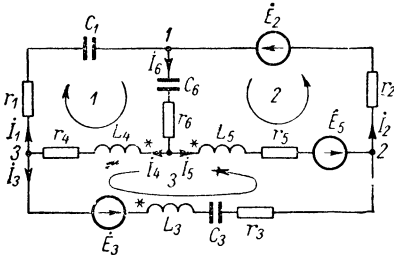


Рис. 5-30.

самоиндукции и взаимной индукции совпадают по направлению, что приводит к увеличению эквивалентной индуктивности всей цепи $L'_s = L_1 + L_2 + 2|M|$. При встречном включении магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены встречно, что приводит к уменьшению эквивалентной индуктивности всей цепи $L''_s = L_1 + L_2 - 2|M|$.

Определив измерением эквивалентные индуктивности L'_s и L''_s при согласном и встречном включениях катушек, можно вычислить абсолютное значение их взаимной индуктивности из соотношения:

$$L'_s - L''_s = 4|M| \text{ или } |M| = \frac{L'_s - L''_s}{4}.$$

Переход от согласного включения к встречному при этом следует выполнить пересоединением концов обмотки одной из катушек, не изменяя взаимного расположения катушек. Знак коэффициента взаимной индукции положителен, когда эквивалентная индуктивность имеет большее значение.

В качестве примера более сложной цепи рассмотрим составление уравнений по законам Кирхгофа и по методу контурных токов для

цепи, изображенной на рис. 5-30 при наличии взаимной индукции между индуктивными катушками L_3 , L_4 и L_5 .

Положительные направления токов в ветвях показаны стрелками. Согласно сказанному в § 3-7 первой части, в индуктивно связанных катушках положительные направления токов принимаются от зажима катушки, обозначенного звездочкой.

По законам Кирхгофа имеем для узлов:

$$i_1 - i_6 + i_2 = 0, \quad -i_2 + i_3 + i_5 = 0, \quad i_4 - i_1 - i_3 = 0;$$

для контуров:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(r_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) i_1 + \left(r_6 + \frac{1}{j\omega C_6}\right) i_6 + (r_4 + j\omega L_4) i_4 + \\ &\quad + j\omega M_{43} i_5 + j\omega M_{43} i_3; \\ \dot{E}_2 + \dot{E}_5 &= r_2 i_2 + \left(r_6 + \frac{1}{j\omega C_6}\right) i_6 + (r_5 + j\omega L_5) i_5 + \\ &\quad + j\omega M_{54} i_4 + j\omega M_{53} i_3; \\ -\dot{E}_5 + \dot{E}_3 &= (r_4 + j\omega L_4) i_4 + j\omega M_{45} i_5 + j\omega M_{43} i_3 + \\ &\quad + \left(r_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right) i_3 + j\omega M_{34} i_4 + j\omega M_{35} i_5 - (r_5 + j\omega L_5) i_5 - \\ &\quad - j\omega M_{54} i_4 - j\omega M_{53} i_3. \end{aligned}$$

Величины $M_{34} = M_{43}$, $M_{53} = M_{35}$ и $M_{45} = M_{54}$ заданы с их знаками для системы звездочек, которые указаны на катушках L_3 , L_4 и L_5 . В индуктивных катушках L_3 , L_4 и L_5 , где имеет место явление взаимной индукции, все токи направлены от звездочек, поэтому направления э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции совпадают, а следовательно, совпадают и направления соответствующих этим э. д. с. падений напряжений. Поэтому знаки в членах $j\omega L_5 i_5$, $j\omega M_{53} i_3$ и $j\omega M_{54} i_4$ в последнем уравнении одинаковы.

По методу контурных токов в общем виде уравнения записываются в обычной форме, как и при отсутствии взаимной индукции:

$$\begin{aligned} Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 + Z_{13} i_3 &= \dot{E}_{11}, \\ Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 + Z_{23} i_3 &= \dot{E}_{22}, \\ Z_{31} i_1 + Z_{32} i_2 + Z_{33} i_3 &= \dot{E}_{33}, \end{aligned}$$

но в выражения для собственных и общих сопротивлений контуров войдут добавочные члены, учитывающие явление взаимной индукции. В данном частном случае контурные токи i_1 , i_2 и i_3 являются и токами в ветвях 1, 2 и 3.

Зададимся положительными направлениями контурных токов i_1 , i_2 и i_3 , как показано на рис. 5-30 стрелками внутри контуров.

Для рассматриваемой цепи имеем выражения собственных сопротивлений контуров:

$$Z_{11} = r_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + r_6 + \frac{1}{j\omega C_6} + r_4 + j\omega L_4;$$

$$Z_{22} = r_2 + r_5 + j\omega L_5 + r_6 + \frac{1}{j\omega C_6};$$

$$Z_{33} = r_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + r_4 + j\omega L_4 + r_5 + j\omega L_5 - 2j\omega M_{45} - \\ - 2j\omega M_{53} + 2j\omega M_{43}.$$

В выражение Z_{33} два раза входит член $-j\omega M_{45}$, так как контурный ток \dot{I}_3 , проходя по катушке L_4 от звездочки, индуцирует э. д. с. взаимной индукции в катушке L_5 , также направленную от звездочки и, следовательно, против направления обхода контура 3. Тот же ток \dot{I}_3 , проходя по катушке L_5 к звездочке, индуцирует э. д. с. взаимной индукции в катушке L_4 , направленную к звездочке катушки L_4 , а следовательно, опять против направления обхода контура. По этой причине напряжения $j\omega L_4 \dot{I}_3$ и $j\omega L_5 \dot{I}_3$, уравнивающие э. д. с. самоиндукции, противоположны по знаку напряжению $-2j\omega M_{45} \dot{I}_3$, уравнивающему э. д. с. взаимной индукции, что учитывается знаками членов $j\omega L_4$, $j\omega L_5$ и $-2j\omega M_{45}$ в выражении для Z_{33} .

Точно так же рассуждая, мы найдем, что э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции от тока \dot{I}_3 в катушках L_5 и L_3 противоположны по направлению, и поэтому член $2j\omega M_{53}$ имеет знак «минус»; э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции от тока \dot{I}_3 в катушках L_3 и L_4 совпадают по направлению, и поэтому член $2j\omega M_{43}$ имеет знак «плюс».

Общие сопротивления контуров выражаются следующим образом:

$$Z_{12} = Z_{21} = r_6 + \frac{1}{j\omega C_6} + j\omega M_{45}; \quad Z_{23} = Z_{32} = -r_5 - j\omega L_5 + \\ + j\omega M_{45} + j\omega M_{35};$$

$$Z_{31} = Z_{13} = r_4 + j\omega L_4 - j\omega M_{45} + j\omega M_{43}.$$

Член $j\omega M_{45}$ входит в выражение Z_{12} со знаком «плюс», так как э. д. с. взаимной индукции в катушке L_4 от тока \dot{I}_2 , направленного от звездочки на катушке L_5 , направлена от звездочки на катушке L_4 , а следовательно, совпадает и с направлением обхода контура 1. По этой же причине ставим знак «плюс» перед членами $j\omega M_{45}$ и $j\omega M_{35}$ в выражении Z_{23} . В выражении Z_{31} член $j\omega M_{43}$ также имеет знак «плюс», но член $j\omega M_{45}$ — знак «минус», так как ток \dot{I}_3 в катушке L_5 направлен к звездочке, а следовательно, к звездочке на катушке

L_4 , т. е. против направления обхода контура I , направлена и э. д. с. взаимной индукции.

Для э. д. с. \dot{E}_{11} , \dot{E}_{22} , \dot{E}_{33} в контурах получаем: $\dot{E}_{11} = 0$, $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2 + \dot{E}_5$, $\dot{E}_{33} = \dot{E}_3 - \dot{E}_5$.

5-17. Трансформаторы с линейными характеристиками. Идеальный трансформатор

Одним из важнейших элементов электрических цепей, в котором специально используются свойства магнитносвязанных контуров, является статическое устройство для преобразования величин тока и напряжения, называемое т р а н с ф о р м а т о р о м. В простейшем случае трансформатор состоит из двух электрически не соединенных и неподвижных друг относительно друга катушек, называемых обмотками трансформатора, связанных между собой путем взаимной индукции. Если обмотки трансформатора намотаны на ферромагнитный сердечник, то свойства такого трансформатора будут нелинейными. Процессы в трансформаторах с ферромагнитными сердечниками будут рассмотрены в третьей части. Здесь будем предполагать, что ферромагнитные сердечники отсутствуют. Условно назовем такой трансформатор линейным, так как процессы в нем описываются линейными уравнениями, т. е. он обладает линейными характеристиками.

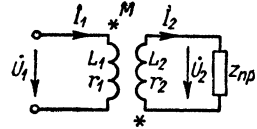


Рис. 5-31.

Пусть к зажимам одной обмотки трансформатора, которую мы назовем первичной, приложена э. д. с. e_1 , а к зажимам другой обмотки — вторичной — присоединен приемник (рис. 5-31). Как и прежде, будем считать, что коэффициент взаимной индукции M задан по величине и знаку для случая приведенной на рис. 5-31 системы звездочек. Обозначим активные сопротивления обмоток r_1 и r_2 , а их индуктивности L_1 и L_2 .

По второму закону Кирхгофа имеем:

$$u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad -M \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2.$$

Если напряжение u_1 синусоидально, то при установившемся режиме синусоидальными функциями времени будут также i_1 , i_2 и u_2 и уравнения трансформатора можно записать в комплексной форме:

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2; \quad -j\omega M \dot{I}_1 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2.$$

Если известны \dot{U}_1 , параметры трансформатора и приемника $Z_{np} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$, то, решая эту систему, можно найти токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и напряжение

\dot{U}_2 . Можно также по заданным значениям \dot{U}_2 и I_2 и параметрам трансформатора найти \dot{U}_1 и I_1 .

При известном $Z_{\text{пр}} = r_{\text{пр}} + jx_{\text{пр}}$ и заданном \dot{U}_1 найдем ток I_1 . Положив

$$\omega L_1 = x_1, \quad r_2 + r_{\text{пр}} = r_{\text{II}}, \quad \omega L_2 + x_{\text{пр}} = x_{\text{II}},$$

имеем:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + jx_1) I_1 + j\omega M I_2, \quad -j\omega M I_1 = (r_{\text{II}} + jx_{\text{II}}) I_2,$$

откуда

$$\dot{U}_1 = (r_1 + jx_1) I_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_{\text{II}} + jx_{\text{II}}} I_1$$

и, следовательно,

$$I_1 = \frac{\dot{U}_1}{\left(r_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_{\text{II}}^2 + x_{\text{II}}^2} r_{\text{II}}\right) + j\left(x_1 - \frac{\omega^2 M^2}{r_{\text{II}}^2 + x_{\text{II}}^2} x_{\text{II}}\right)} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{\text{вх}}}.$$

Величина $Z_{\text{вх}} = r + jx$ представляет собою комплекс входного (эквивалентного) сопротивления всей цепи, состоящей из трансформатора и приемника. Из его выражения следует, что при $Z_{\text{пр}} \neq \infty$ эквивалентное активное сопротивление r больше, чем r_1 . Увеличение эквивалентного активного сопротивления связано с тем обстоятельством, что необратимые преобразования энергии во вторичном контуре происходят за счет энергии, передаваемой от первого контура, где имеется источник энергии, во второй контур, где нет такого источника. Поскольку для заданного значения тока активная мощность, определяющая необратимые преобразования энергии, прямо пропорциональна активному сопротивлению, то поглощение энергии во втором контуре приводит к увеличению эквивалентного активного сопротивления всей цепи.

Эквивалентное реактивное сопротивление x может быть больше x_1 , если $x_{\text{II}} < 0$, и меньше x_1 , если $x_{\text{II}} > 0$. Э. д. с. взаимной индукции во вторичном контуре отстает по фазе от потока взаимной индукции, а следовательно, при $M > 0$ и от тока I_1 на угол $\pi/2$. При индуктивном характере цепи второго контура ($x_{\text{II}} > 0$) ток I_2 в предельном случае будет отставать от этой э. д. с. на угол $\pi/2$ и, следовательно, окажется в противофазе с током I_1 . Это означает, что магнитный поток, обусловленный током I_2 , направлен против магнитного потока, обусловленного током I_1 , что приводит к уменьшению магнитного потока в первом контуре, и это эквивалентно уменьшению реактивного сопротивления первого контура.

Другая картина наблюдается, если $x_{\text{II}} < 0$. При этом ток во вторичной обмотке имеет емкостный характер и в предельном случае может опережать э. д. с. взаимной индукции на угол $\pi/2$, т. е. совпадать по фазе с током I_1 . При этом магнитные потоки самоин-

дукции и взаимной индукции будут также совпадающими, что равносильно увеличению эквивалентного реактивного сопротивления.

Полагая

$$r = r_1 + \Delta r, \quad x = x_1 + \Delta x,$$

имеем:

$$\Delta r = \frac{\omega^2 M^2}{r_{11}^2 + x_{11}^2} r_{11}, \quad \Delta x = - \frac{\omega^2 M^2}{r_{11}^2 + x_{11}^2} x_{11},$$

причем Δr и Δx называют соответственно вносимыми активным и реактивным сопротивлениями.

Представим уравнения трансформатора в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{i}_1 + j\omega(L_1 - M)\dot{i}_1 + j\omega M(\dot{i}_1 + \dot{i}_2); \\ 0 &= r_2 \dot{i}_2 + j\omega(L_2 - M)\dot{i}_2 + j\omega M(\dot{i}_1 + \dot{i}_2) + Z_{\text{нр}} \dot{i}_2. \end{aligned}$$

Схема цепи, для которой данная система уравнений справедлива, имеет вид, показанный на рис. 5-32. Поскольку в этой цепи токи \dot{i}_1 , \dot{i}_2 и напряжения \dot{U}_1 , \dot{U}_2 равны таковым в трансформаторе, постольку эта схема является эквивалентной схемой трансформатора. Если M лежит между L_2 и L_1 , то или $L_1 - M$ или $L_2 - M$ будет отрицательно. Это обстоятельство представляет интерес, так как при некоторых задачах, связанных с синтезом электрических цепей, возникает необходимость реализации отрицательной индуктивности в сочетании с положительными индуктивностями, соединенных, как показано на схеме рис. 5-32.

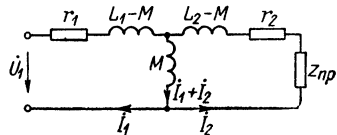


Рис. 5-32.

Метод замены действительной электрической цепи, в которой отдельные контуры связаны друг с другом через взаимную индуктивность, эквивалентной ей электрической цепью, в которой все контуры электрически связаны друг с другом, а взаимная индуктивность между контурами учтена в параметрах отдельных цепей (например, рис. 5-32), находит применение в практике расчета цепей.

Принято характеризовать степень магнитной связи контуров величиной $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$, которая носит название *коэффициента связи*.

Покажем, что во всех реальных случаях k меньше единицы. Пусть активное сопротивление вторичного контура равно нулю и этот контур замкнут накоротко, т. е. $r_2 = 0$ и $Z_{\text{нр}} = 0$. При этом $r_{11} = 0$, $x_{11} = \omega L_2$, $\Delta x = -\omega \frac{M^2}{L_2}$ и $x = \omega L_1 - \omega \frac{M^2}{L_2} = \omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = \omega L_1 (1 - k^2) = \omega L_s$. Величина L_s должна быть положительной, так как энергия магнитного поля $W_m = \frac{1}{2} \dot{i}_1^2 L_s$ положительна. Сле-

довательно, только в предельном случае, когда первичный и вторичный контуры расположены столь близко, что поток взаимной индукции и поток самоиндукции в первичной цепи взаимно компенсируются, величина k приближается к единице.

Рассмотрим некоторые особенные свойства трансформаторов в предельных идеализированных случаях.

Предположим, что

$$r_1 = r_2 = 0 \text{ и } k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1.$$

При этом уравнения трансформатора запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2; \\ -j\omega M \dot{I}_1 &= Z_{\text{пр}} \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 = \dot{U}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Выразим \dot{U}_1 и \dot{I}_1 через \dot{U}_2 и \dot{I}_2 . Получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \left(-\frac{\dot{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \dot{I}_2 \right) + j\omega M \dot{I}_2 = -\frac{L_1}{M} \dot{U}_2 + j\omega \left(M - \frac{L_1 L_2}{M} \right) \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= -\frac{\dot{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Легко заметить, что при $k = 1$ имеем $M - L_1 L_2 / M = 0$ ($M = = L_1 L_2 / M$), и тогда, обозначая $c = L_1 / M$, получим:

$$\dot{U}_1 = -c \dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = -\frac{c \dot{U}_2}{j\omega L_1} - \frac{1}{c} \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{c} \dot{I}_2.$$

Трансформатор, для которого соблюдается условие $U_1 / U_2 = c$ при любой нагрузке, назовем **с о в е р ш е н н ы м т р а н с ф о р м а т о р о м**.

Если, кроме вышеуказанных условий, принять, что $L_1 = \infty$ (практически L_1 должна иметь достаточно большое значение, чтобы можно было пренебречь током $U_1 / \omega L_1$, по сравнению с током $\frac{1}{c} \dot{I}_2$), то между токами и напряжениями имели бы место соотношения:

$$\dot{U}_1 = -c \dot{U}_2 \text{ и } \dot{I}_1 = -\frac{1}{c} \dot{I}_2.$$

Трансформатор, для которого соблюдаются эти условия, назовем **и д е а л ь н ы м т р а н с ф о р м а т о р о м**. Такой трансформатор действительно обладает свойством преобразовывать токи и напряжения независимо от величины сопротивления, включенного во вторичный контур, в определенное число раз. Для идеального трансформатора получим:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{\text{вх}} = \frac{-c \dot{U}_2}{-\frac{1}{c} \dot{I}_2} = c^2 Z_{\text{пр}},$$

откуда видно, что при помощи идеального трансформатора можно произвести также и преобразование сопротивления в определенное число раз, не зависящее от характера этого сопротивления. Это обстоятельство особенно важно для рационального конструирования отдельных элементов электрических цепей, например, для согласования отдельных участков цепей по их сопротивлениям.

Совершенный трансформатор можно представить, присоединив к зажимам идеального трансформатора индуктивности по схемам на рис. 5-33. Реальный трансформатор может быть представлен при помощи идеального трансформатора и дополнительных индуктивностей и активных сопротивлений, учитывающих наличие сопротивлений r_1 и r_2 обмоток, а также учитывая условие $k < 1$ (рис. 5-33).

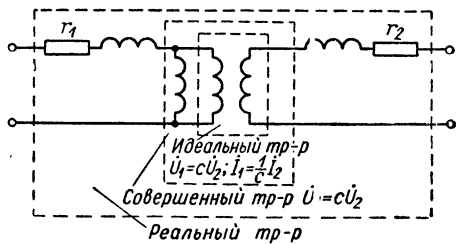


Рис. 5-33.

Свойствами, близкими к свойствам идеального и совершенного трансформаторов, обладают трансформаторы с ферромагнитными сердечниками, с достаточно большим числом витков и с большой магнитной проницаемостью ферромагнитного материала.

5-18. Цепи, связанные через электрическое поле

Отдельные части электрической цепи могут быть связаны также при помощи электрического поля. Такую связь называют емкостной. Аналогично магнитносвязанным цепям, степень емкостной связи можно охарактеризовать коэффициентом связи k_c , определяемым величинами соответствующих емкостных сопротивлений.

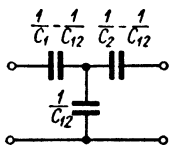


Рис. 5-34.

Для коэффициента связи в индуктивно связанных контурах имеем:

$$k_L = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega |M|}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}},$$

где $L_{12} = |M|$.

Поэтому, определив аналогично и k_c , получим:

$$k_c = \frac{1}{\omega C_{12}} : \sqrt{\frac{1}{\omega C_1} \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_{12}}.$$

Как и для магнитносвязанных контуров, контуры, связанные только при помощи общего электрического поля, можно представить в виде эквивалентной схемы (рис. 5-34), расчет токов в которой можно производить по всем изложенным ранее методам.

5-19. Матричная запись уравнений при расчете электрических цепей

Как при использовании комплексного метода, так и при непосредственном применении дифференциальных уравнений при расчете линейных цепей мы получаем систему линейных уравнений, число которых определяется количеством искомых величин. Эта система линейных уравнений может быть записана в матричной форме, более экономной в отношении занимаемого ею места и действий над нею. Такой вид записи линейных уравнений открывает более широкие возможности для решения этих уравнений при помощи вычислительных машин.

Пользуясь методом контурных токов для цепи с n независимыми контурами, мы получили n уравнений вида:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1k}I_k + \dots + Z_{1n}I_n &= \dot{E}_{11}, \\ \dots & \dots \\ Z_{k1}I_1 + Z_{k2}I_2 + \dots + Z_{kk}I_k + \dots + Z_{kn}I_n &= \dot{E}_{kk}, \\ \dots & \dots \\ Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{nk}I_k + \dots + Z_{nn}I_n &= \dot{E}_{nn} \end{aligned}$$

или более кратко

$$\sum_{i=1}^n Z_{ki}I_i = \dot{E}_{kk} \quad (k = 1 \div n).$$

Для введения матричной записи этой системы уравнений рассмотрим следующую таблицу величин a_{ik} , содержащую m строк и n столбцов:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1k}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2k}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \dots, & a_{kk}, & \dots, & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mk}, & \dots, & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Система величин (действительных чисел, комплексных чисел, операторов, функционалов, любых иных величин), расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов, называется

матрицей типа $m \times n$. Как видно из определения, понятие «матрица» не означает ничего больше, кроме расположения в определенном порядке величин a_{ik} . Величина a_{ik} носит название элемента матрицы. Индексы у элемента матрицы определяют его место в таблице — в матрице: первый индекс определяет номер строки, второй — номер столбца. Матрица, у которой $m = n$, называется квадратной матрицей порядка n . Матрица типа $m \times 1$ называется матрицей-столбцом. Если элементы матрицы-столбца представить как составляющие этой матрицы по m координатам в m -мерном пространстве, то в этом смысле матрицу-столбец можно называть также и вектором-столбцом.

Матрица типа $1 \times n$ называется матрицей-строкой, или вектором-строкой.

Для краткости обозначим матрицы жирными буквами:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Вместо таблицы используют также краткую запись:

$$\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m,n}.$$

Квадратная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11}, 0, \dots, 0, \dots, 0 \\ 0, a_{22}, \dots, 0, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0, 0, \dots, 0, \dots, a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется диагональной.

Если $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, то такая матрица называется единичной и обозначается $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0, 0, 0, \dots, 1 \end{vmatrix}.$$

Введя символ $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$ (называемый также символом Кронекера), имеем:

$$\mathbf{1} = [\delta_{ik}].$$

С каждой квадратной матрицей \mathbf{A} связан определитель, обозначаемый $\det \mathbf{A}$ или $|\mathbf{A}|$:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следует отметить принципиальную разницу между определителем и матрицей. Матрица — это система величин, тогда как определитель — это определенная величина.

Это подчеркивается также их различным обозначением: матрица ограничена двойными вертикальными чертами, определитель — одинарными.

Если в матрице \mathbf{A} типа $m \times n$ поменять местами строки и столбцы, то вновь полученная матрица типа $n \times m$ называется транспонированной и обозначится \mathbf{A}' или \mathbf{A}^T :

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}^T = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Из определения матриц вытекает и порядок действия над ними. Если имеем две матрицы $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m,n}$ и $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{m,n}$ одного и того же типа, то они равны, если равны $a_{ik} = b_{ik}$. Также имеем: $\pm \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}$, если $c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$. Кроме того, $K\mathbf{A} = \mathbf{A}K = [Ka_{ik}]_{m,n}$. Если матрица \mathbf{A} — квадратная порядка n , то $\det K\mathbf{A} = K^n \det \mathbf{A}$.

Произведение двух матриц: одной $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m,n}$ типа $m \times n$ и другой $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{p,q}$ типа $p \times q$ при $n = p$ будет новой матрицей $\mathbf{C} = [c_{ik}]_{m,q}$ типа $m \times q$, элементы которой определяются так: $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$ ($i = 1 \div m, k = 1 \div q$), т. е. для определения элемента новой матрицы, стоящего в i -й строке и k -м столбце, нужно умножить элементы i -й строки первой матрицы на соответствующие элементы k -го столбца второй матрицы и полученные произведения сложить.

Например:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right\|, \quad \mathbf{B} = \left\| \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right\|,$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \left\| \begin{array}{cc} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{array} \right\|.$$

В общем случае

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Поэтому отличают умножение первой матрицы \mathbf{A} на вторую матрицу \mathbf{B} справа \mathbf{AB} и слева \mathbf{BA} .

Нетрудно заметить, что $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$.

Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая, будучи умноженной как справа, так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу. Если данная матрица обозначена \mathbf{A} , то обратная обозначается \mathbf{A}^{-1}

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}.$$

Нахождение обратной матрицы называется обращением данной матрицы. Если имеем матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \frac{\Delta_{21}}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \frac{\Delta_{22}}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_{n2}}{\Delta} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\Delta_{1n}}{\Delta}, \frac{\Delta_{2n}}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_{11}, \Delta_{21}, \dots, \Delta_{n1} \\ \Delta_{12}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{n2} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_{1n}, \Delta_{2n}, \dots, \Delta_{nn} \end{pmatrix},$$

где Δ — определитель, соответствующий матрице \mathbf{A} :

$$\Delta = \det \mathbf{A},$$

а Δ_{ik} — алгебраическое дополнение этого определителя. Заметим, что в обратной матрице \mathbf{A}^{-1} и матрице \mathbf{A} индексы элементов разные.

Из выражения для \mathbf{A} видно, что квадратная матрица имеет обратную матрицу только в том случае, если определитель данной матрицы отличен от нуля. Квадратные матрицы, определитель которых отличен от нуля, называются несобственными. Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется особенной (или сингулярной).

Теперь нетрудно заметить, что уравнения по методу контурных токов можно записать в матричной форме в виде

$$\mathbf{Z}\dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{E}},$$

где

$$\dot{\mathbf{i}} = \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{1n} \\ Z_{21}, Z_{22}, \dots, Z_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ Z_{n1}, Z_{n2}, \dots, Z_{nn} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \vdots \\ E_{nn} \end{Bmatrix},$$

$\dot{\mathbf{i}}$ — матрица-столбец искомых токов, \mathbf{Z} — квадратная матрица порядка n сопротивления цепи, $\dot{\mathbf{E}}$ — матрица-столбец заданных э. д. с.

Точно так же запишется система уравнений по методу узловых напряжений в матричной форме:

$$\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} = \mathcal{J},$$

где

$$\dot{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ \vdots \\ U_{q-1,0} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1, q-1} \\ Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2, q-1} \\ \dots \dots \dots \\ Y_{q-1,1}, Y_{q-1,2}, \dots, Y_{q-1, q-1} \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{Bmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{q-1} \end{Bmatrix}$$

$\dot{\mathbf{U}}$ — матрица-столбец искомых узловых напряжений типа $1 \times (q-1)$, \mathbf{Y} — квадратная матрица проводимостей цепи типа $(q-1) \times (q-1)$, \mathcal{J} — матрица-столбец задающих токов типа $1 \times (q-1)$.

По внешнему виду матричные уравнения как по методу контурных токов, так и по методу узловых напряжений имеют одинаковое строение. В обоих случаях имеется матрица-столбец искомых величин, матрица-столбец заданных величин и квадратная матрица, определяемая параметрами цепи, зависящая от выбранных независимых контуров или выбранных узлов. Для данной выбранной системы контуров и узлов следует определить матрицы \mathcal{J} , $\dot{\mathbf{E}}$, а затем $\dot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{i}}$.

5.20. Решение уравнений цепи, записанных в матричной форме

Решение уравнений вида

$$\mathbf{Z}\dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{E}} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} = \mathcal{J},$$

записанных в матричной форме, в общем виде производится с использованием понятия обратной матрицы. Перемножим уравнения слева соответственно на \mathbf{Z}^{-1} и \mathbf{Y}^{-1} ; тогда

$$\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Z}\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{Z}^{-1}\dot{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Y}^{-1}\mathcal{J}.$$

Но

$$\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{i} = \mathbf{1}\mathbf{i} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{1}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}},$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица.

Окончательно для искомых величин имеем:

$$\mathbf{i} = \mathbf{Z}^{-1}\dot{\mathbf{E}}, \quad \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Y}^{-1}\mathcal{E}.$$

Как и любая квадратная матрица, обратные матрицы сопротивления и проводимости имеют смысл только в том случае, если определители этих матриц не равны нулю. Равенство нулю этих определителей означает, что система уравнений зависима.

Например, для цепи, изображенной на рис. 5-10, имеем:

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{i} = \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix}.$$

Обратную матрицу \mathbf{Z}^{-1} запишем в виде

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{vmatrix}$$

и, умножая \mathbf{Z}^{-1} на $\dot{\mathbf{E}}$ по правилам умножения матриц, получим:

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_{11}\dot{E}_{11} + \Delta_{21}\dot{E}_{22} + \Delta_{31}\dot{E}_{33} \\ \Delta_{12}\dot{E}_{11} + \Delta_{22}\dot{E}_{22} + \Delta_{32}\dot{E}_{33} \\ \Delta_{13}\dot{E}_{11} + \Delta_{23}\dot{E}_{22} + \Delta_{33}\dot{E}_{33} \end{vmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие строки, найдем выражения для контурных токов:

$$i_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{E}_{11} + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{E}_{22} + \frac{\Delta_{31}}{\Delta} \dot{E}_{33} \quad \text{и т. д.}$$

Аналогичным образом решается матричное уравнение, записанное по методу узловых напряжений.

Если система уравнений для той же цепи (рис. 5-10 и 5-5) составлена непосредственно по законам Кирхгофа для всех токов в ветвях и падений напряжений на сопротивлениях этих ветвей, то матричная запись этой системы уравнений будет иметь вид, в котором первые три строки квадратной матрицы, перемноженные на матрицу-столбец токов и приравненные нулю, дают три уравнения по первому закону Кирхгофа. Последние три строки квадратной матрицы, перемноженные на матрицу-столбец токов, определяют

сумму падений напряжений в контурах и приравненные соответствующим э. д. с. из матрицы-столбца э. д. с., дают три уравнения по второму закону Кирхгофа. В этом случае имеем:

$$\begin{pmatrix} -1, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & -1, & 1 \\ 0, & -1, & -1, & 0, & 1, & 0 \\ Z_1, & 0, & 0, & Z_4, & 0, & Z_6 \\ 0, & Z_2, & 0, & 0, & Z_5, & Z_6 \\ 0, & 0, & Z_3, & -Z_4, & Z_5, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{E}_4 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 - \dot{E}_4 \end{pmatrix}.$$

В матричной форме это уравнение можно записать и решить, как и упомянутые выше уравнения, по методу контурных токов. Обозначая квадратную матрицу и обратную ей матрицу соответственно:

$$C = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & -1, & 1 \\ 0, & -1, & -1, & 0, & 1, & 0 \\ Z_1, & 0, & 0, & Z_4, & 0, & Z_6 \\ 0, & Z_2, & 0, & 0, & Z_5, & Z_6 \\ 0, & 0, & Z_3, & -Z_4, & Z_5, & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_{11}, & \Delta_{21}, & \Delta_{31}, & \Delta_{41}, & \Delta_{51}, & \Delta_{61} \\ \Delta_{12}, & \Delta_{22}, & \dots & \dots & \dots & \Delta_{62} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{16}, & \Delta_{26}, & \dots & \dots & \dots & \Delta_{66} \end{pmatrix}.$$

Можем записать

$$C\dot{I} = \dot{E} \quad \text{или} \quad \dot{I} = C^{-1}\dot{E}$$

и соответственно:

$$I_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \dot{E}'_1 + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} \dot{E}'_1 + \dots + \frac{\Delta_{6k}}{\Delta} \dot{E}'_6 \quad (k = 1 \div 6),$$

где

$$\dot{E}'_1 = \dot{E}'_2 = \dot{E}'_3 = 0, \quad \dot{E}'_4 = \dot{E}_4, \quad \dot{E}'_5 = \dot{E}_2, \quad \dot{E}'_6 = \dot{E}_3 - \dot{E}_4.$$

Квадратная матрица определяется выбранной системой узлов и независимых контуров. Изменяя выбор узлов и независимых контуров, можно получить различные матрицы. С другой стороны, имея данную матрицу, можно видоизменить ее, изменяя тем самым систему выбранных узлов и независимых контуров.

В заключение отметим, что преимущество матричной записи и польза матричного метода особенно проявляются, когда цепь сложной конфигурации разбивается на отдельные участки и эти участки рассматриваются как самостоятельные элементы этой сложной цепи. При использовании матричной записи расширяются возможности выполнения преобразований электрических цепей в общем виде. Комплексная запись системы уравнений цепи в матричной форме полезна также в связи с тем, что при использовании вычислительных машин широко разработаны методы программирования и рационального решения системы уравнений в их матричной записи.

5-21. Баланс мощностей в сложной цепи

Баланс реактивных мощностей в электрической цепи доказывается теоремой Ланжевена. Эта теорема решает вопрос о равенстве суммы реактивных мощностей всех источников энергии, имеющих в сколь угодно сложной электрической цепи, сумме реактивных мощностей приемников в этой цепи. Попутно решается и вопрос о равенстве соответствующих активных мощностей, которое, вообще говоря, вытекает непосредственно из закона сохранения энергии.

Для любой цепи при записи уравнений по методу узловых напряжений имеем:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{q-1,1} & Y_{q-1,2} & \dots & Y_{q-1,q-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \vdots \\ \dot{U}_{q-1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} \dot{\mathcal{G}}_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} \dot{\mathcal{G}}_{q-1,j} \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицу проводимости на матрицу-столбец узловых напряжений, получим выражение, в котором каждый элемент матрицы-столбца слева от знака равенства представляет собой сумму токов в ветвях (в приемниках), сходящихся к узлу, номер

которого соответствует первому индексу u тока. Каждый элемент в матрице справа есть сумма соответствующих источников тока.

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} l_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} l_{q-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} \mathcal{J}_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} \mathcal{J}_{q-1,j} \end{pmatrix}.$$

Помножим эти матрицы на транспонированную матрицу сопряженных комплексов узловых напряжений. Имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \dot{U}_{10}^*, \dot{U}_{20}^*, \dots, \dot{U}_{q-1,0}^* \right\| \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} l_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} l_{q-1,j} \end{pmatrix} &= \\ &= \left\| \dot{U}_{10}^*, \dot{U}_{20}^*, \dots, \dot{U}_{q-1,0}^* \right\| \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} \mathcal{J}_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q-1} \mathcal{J}_{q-1,j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

После выполнения операции перемножения мы получим слева и справа члены вида

$$\dot{U}_{i0}^* l_{ij} + \dot{U}_{j0}^* l_{ji} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{i0}^* \mathcal{J}_{ij} + \dot{U}_{j0}^* \mathcal{J}_{ji}.$$

Учитывая, что $l_{ji} = -l_{ij}$ и $\dot{U}_{i0}^* - \dot{U}_{j0}^* = \dot{U}_{ij}^*$, получим

$$\left(\dot{U}_{12}^* l_{12} + \dots + \dot{U}_{q-1,0}^* l_{q-1,0} \right) = \left(\dot{U}_{12}^* \mathcal{J}_{12} + \dots + \dot{U}_{q-1,0}^* \mathcal{J}_{q-1,0} \right).$$

Произведение $\dot{U}_{ij}^* l_{ij} = \dot{P}'_{ij} = \dot{P}'_k$ есть комплексная мощность приемника, подключенного между узлами i и j . Произведение $\dot{U}_{ij}^* \mathcal{J}_{ij} = \dot{P}_{ij} = \dot{P}_k$ есть комплексная мощность источника, также подключенного к узлам i и j .

Таким образом, мы приходим к выводу, что

$$\sum \dot{P}'_k = \sum \dot{P}'_k \text{ или } \sum P'_k = \sum P'_k \text{ и } \sum Q_k = \sum Q'_k,$$

где $\sum P'_k$ и $\sum Q_k$ — сумма активных и сумма реактивных мощностей всех источников энергии, имеющихсся в цепи, а $\sum P'_k$ и $\sum Q'_k$ — сумма активных и сумма реактивных мощностей всех приемников. Последние два равенства и выражают теорему Ланжевена.

Для каждого приемника справедливы соотношения:

$$P'_k = I_k^2 r_k, \text{ а } Q'_k = I_k^2 \omega L_k - \frac{I_k^2}{\omega C_k}.$$

Поэтому для комплексной мощности всей цепи справедливо соотношение:

$$\sum \dot{P}'_k = \sum I_k^2 r_k + j\omega \sum I_k^2 L_k + \frac{1}{j\omega} \sum \frac{I_k^2}{C_k}.$$

5-22. Расчет сложных цепей при постоянном токе

Расчет сложных электрических цепей при воздействии источников с постоянными во времени э. д. с. и токами в установившемся режиме можно производить, используя все изложенные выше методы расчета сложных цепей при синусоидальных э. д. с. и токах. Особенность заключается в том, что в реальных индуктивных катушках учитываются только активные сопротивления их обмоток, а в реальных конденсаторах только их проводимости утечки. Если речь идет о расчете цепи, уже представленной в виде эквивалентной электрической схемы, в которой участки с L и C не обладают потерями, а сопротивления обмоток катушек и проводимости утечки конденсаторов вынесены в отдельные участки, то участки с L следует считать коротко замкнутыми, а участки с C — разомкнутыми. Это вытекает формально из выражений для сопротивлений x_L и x_C при $\omega \rightarrow 0$. Действительно, при $\omega = 0$ имеем $x_L = \omega L = 0$, $x_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$. Физически это связано с тем, что при постоянном токе в катушках не индуцируется э. д. с. самоиндукции и при постоянном напряжении на зажимах идеальных конденсаторов ток через них не проходит.

Аналогично, при расчете цепей с индуктивными связями при постоянном токе отсутствуют э. д. с. взаимной индукции. Это формально учитывается тем, что члены с множителями ωM равны нулю при $\omega = 0$.

Естественно, расчет цепей при постоянном токе является более простым, чем при синусоидальных токах, так как вместо комплексных величин в уравнения будут входить вещественные величины. Очевидно, что при составлении уравнений надо соблюдать все правила знаков.

В особом случае, когда в схеме цепи во всех ветвях включены идеальные конденсаторы, при действии постоянных э. д. с. ток в такой цепи равен нулю, и может стоять вопрос только об отыскании распределения напряжения по конденсаторам цепи. В таком идеализированном случае в предположении, что до начала действия э. д. с. все конденсаторы были разряжены, распределение напряжения под действием постоянных э. д. с. будет таким же, как распределение синусоидального напряжения в аналогичной схеме, но содержащей во всех ветвях только идеальные конденсаторы, если в ней действуют синусоидальные э. д. с., равные по действующему значению заданным постоянным э. д. с., и находящиеся друг с другом в фазе.

В реальных цепях все конденсаторы обладают конечной проводимостью утечки. Поэтому при действии постоянных э. д. с. установившиеся напряжения на конденсаторах будут определяться сопротивлениями их утечек и сопротивлениями остальных участков схемы. Величины емкости конденсаторов при этом на распределение напряжения не оказывают никакого влияния.

Последнее соответствует сделанному выше указанию, что в эквивалентной схеме участки с идеальными конденсаторами при расчете должны быть разомкнуты.



РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

6-1. Понятие о резонансе и о частотных характеристиках в электрических цепях

Реактивные сопротивления и проводимости отдельных участков цепи могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, следовательно, могут взаимно компенсироваться. Поэтому возможны случаи, когда, несмотря на наличие в цепи индуктивных катушек и конденсаторов, входное реактивное сопротивление или входная реактивная проводимость всей цепи оказываются равными нулю. При этом ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе, и эквивалентное сопротивление всей цепи будет активным. Такое явление называют **резонансом**.

Выясним характерные черты этого явления и его связь с так называемыми **частотными характеристиками** на некоторых частных случаях, понимая под частотными характеристиками зависимость от частоты параметров цепи (r, x, z, g, b, y), а также зависимость величин, определяемых параметрами ($\varphi = \arctg \frac{x}{r}$, $\cos \varphi = \frac{r}{z}$ и т. д.).

Зависимости действующих значений токов I в цепи, напряжений U на зажимах цепи и на отдельных участках цепи, а также активной и реактивной мощностей в цепи от частоты при неизменном значении одной из этих величин аналогичны зависимостям от частоты соответствующих параметров цепи или величин, определяемых как функции этих параметров. Поэтому такие зависимости, характеризующие изменение режима в цепи при изменении частоты, точно так же могут рассматриваться как частотные характеристики цепи.

6-2. Резонанс в случае последовательного соединения участков r , L , C

Комплексное сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединенных участков r , L и C (рис. 6-1), имеет вид

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx = ze^{j\varphi},$$

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad z = \sqrt{r^2 + x^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

Резонанс имеет место, если $\varphi = 0$, что равносильно при последовательном соединении условию $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, т. е. $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ или $\omega^2 LC = 1$. Резонанса можно достичь, изменяя или частоту приложенного к цепи напряжения, или индуктивность катушки, или емкость конденсатора. При этом значения угловой частоты, индуктивности и емкости, при которых наступает резонанс, определяются формулами:

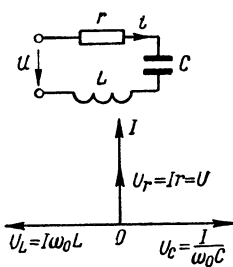


Рис. 6-1.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}, \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Частоту ω_0 называют резонансной частотой. Если напряжение U на зажимах цепи и активное сопротивление r цепи не изменяются, то ток в рассматриваемой цепи при резонансе имеет наибольшее значение, равное U/r , не зависящее от величин реактивных сопротивлений. Векторная диаграмма в случае резонанса приведена на рис. 6-1. Если реактивные сопротивления $x_L = x_C$ при резонансе превосходят по величине активное сопротивление r , то напряжения на зажимах реактивной катушки и конденсатора могут превосходить, и иногда весьма значительно, напряжение на зажимах цепи. Поэтому резонанс при последовательном соединении называют резонансом напряжений. Превышение напряжения на реактивных элементах цепи над напряжением на зажимах цепи имеет место при условии:

$$r < \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho.$$

Величина $\sqrt{L/C}$, имеющая размерность сопротивления и обозначенная нами через ρ , носит название волнового сопротивления контура.

Отношение

$$Q = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 r} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{\rho}{r}$$

определяет кратность превышения напряжения на зажимах индуктивного и емкостного сопротивлений над напряжением на зажимах всей цепи. Величину Q , определяющую резонансные свойства контура, называют добротностью контура. Принято также резонансные свойства характеризовать величиной $d = \frac{1}{Q}$, носящей название затухания контура.

В § 4-7 для рассматриваемой цепи были получены выражения для мгновенной мощности на зажимах катушки и конденсатора: $p_L = U_L I \sin 2\omega t$ и $p_C = -U_C I \sin 2\omega t$. При резонансе, когда $U_L = U_C$, эти мощности в любой момент времени равны и противоположны по знаку. Это значит, что происходит обмен энергией между магнитным полем катушки и электрическим полем конденсатора, причем обмена энергией между полями цепи и источником, питающим цепь, не происходит, так как $p_L + p_C = \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt}$ и $W_m + W_e = \text{const}$, т. е. суммарная энергия полей в цепи остается постоянной. Энергия переходит из конденсатора в катушку в течение четверти периода, когда напряжение на конденсаторе по абсолютному значению убывает, а ток по абсолютному значению возрастает. В течение следующей четверти периода, когда напряжение на конденсаторе по абсолютному значению растет, а ток по абсолютному значению убывает, энергия переходит обратно из катушки в конденсатор. Источник энергии, питающий цепь, только покрывает расход энергии в участке с сопротивлением r .

6-3. Частотные характеристики цепи с последовательным соединением участков r , L , C

Зависимости полного и реактивного сопротивления цепи и угла сдвига φ между током и напряжением от частоты приведены на рис. 6-2. В данной цепи активное сопротивление не зависит от частоты. Реактивное сопротивление (рис. 6-3) $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2)$ при трех характерных значениях частоты принимает предельные значения, равные либо нулю, либо бесконечности.

Аргумент функции, при котором она принимает бесконечное значение, называют полюсом функции, а аргумент, при котором функция принимает нулевое значение, называют нулем этой функции. В данном случае имеем функцию $x(\omega)$ и, следовательно, ее полюсами будут частоты, при которых $x(\omega) = \infty$, т. е. $\omega = 0$ и $\omega = \infty$,

а нулем будет частота, при которой $x(\omega) = 0$, т. е. $\omega = \omega_0$. На рис. 6-3 полюсы обозначены крестиками, а нули кружками. Таких же обозначений будем придерживаться и в дальнейшем. Характерное свойство функции $x(\omega)$ заключается в том, что при всех частотах $\frac{dx}{d\omega} > 0$. Действительно, с увеличением частоты растут оба слагаемых величины $x = \omega L + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)$, т. е. ωL и $\left(-\frac{1}{\omega C}\right)$, так как $\frac{d(\omega L)}{d\omega} = L > 0$ и $\frac{d\left(-\frac{1}{\omega C}\right)}{d\omega} = \frac{1}{\omega^2 C} > 0$.

Таким образом, с увеличением частоты величина x , понимаемая алгебраически, всегда растет. Как увидим дальше, это характерное

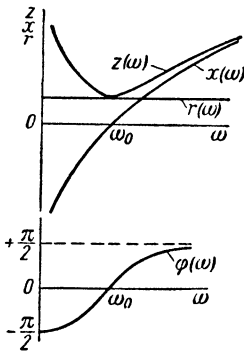


Рис. 6-2.

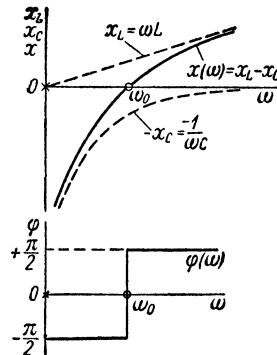


Рис. 6-3.

свойство относится к реактивным сопротивлениям любых сколь угодно сложных цепей без потерь.

Обратим особое внимание на то обстоятельство, что в момент резонанса происходит изменение характера реактивного сопротивления (рис. 6-2 и 6-3). Если при $\omega < \omega_0$ реактивное сопротивление имело емкостный характер ($x < 0$, $\varphi < 0$), то при $\omega > \omega_0$ оно принимает индуктивный характер ($x > 0$, $\varphi > 0$). В частном случае, если $r = 0$, при частоте $\omega = \omega_0$ происходит скачкообразное изменение угла φ от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, т. е. происходит, как иногда говорят, «опрокидывание фазы» (рис. 6-3).

Рассмотрим зависимость от частоты реактивной проводимости той же цепи (рис. 6-1). Как известно,

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r}{z^2} - j \frac{x}{z^2} = g - jb.$$

Для случая, когда $r = 0$, $b = \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega/L}{\omega^2 - \omega_0^2}$.

Реактивная проводимость при отсутствии r в цепи также имеет три характерные частоты — два нуля ($\omega = 0$, $\omega = \infty$), при которых $b = 0$, и один полюс ($\omega = \omega_0$), при котором $b = \infty$. По характеру кривой $b(\omega)$ (рис. 6-4) можно заметить, что с увеличением частоты величина b всегда убывает, т. е. при всех частотах $\frac{db}{d\omega} < 0$. Действительно, при $r = 0$ имеем:

$$\frac{db}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{d\omega} < 0, \text{ ибо } x^2 > 0, \\ \frac{dx}{d\omega} > 0.$$

Как увидим дальше, это свойство относится к реактивным проводимостям любых сколь угодно сложных цепей без потерь.

При $r \neq 0$, в отличие от зависимости $x(\omega)$ для последовательного соединения r , L , C , реактивная проводимость зависит не только от L и C , но и от активного сопротивления r . При наличии активного сопротивления в цепи и при $\omega = \omega_0$ для данной цепи $b = 0$, т. е. резонансная частота является нулем b . Однако влево и вправо от этой частоты реактивная проводимость резко возрастает (пунктирная кривая рис. 6-4). Легко подсчитать, что экстремумы $b(\omega)$ наступают при $\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{d^2}{4} \mp \frac{d}{2}} \right]$ и равны соответственно $-b_1 = b_2 = \frac{1}{2r}$. Заметим, что $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0 d$.

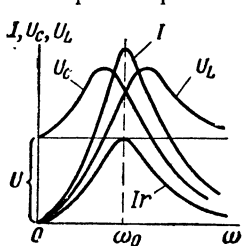


Рис. 6-5.

Частотная характеристика $I(\omega)$ при $U = \text{const}$, $r = \text{const}$, $L = \text{const}$ и $C = \text{const}$ выражается формулой:

$$I(\omega) = U \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

и изображается кривой, представленной на рис. 6-5.

На рисунке также приведены частотные характеристики $U_C(\omega) = I(\omega) \frac{1}{\omega C}$ и $U_L(\omega) = I(\omega) \omega L$. При $\omega = 0$ будет $I = 0$, так как конденсатор не пропускает постоянный ток и, соответственно, все приложенное напряжение приходится на зажимы конденсатора

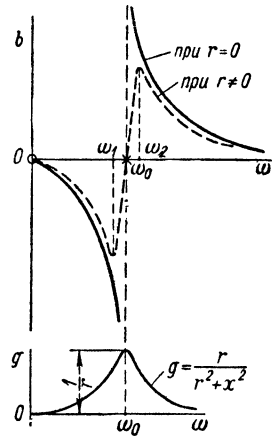


Рис. 6-4.

($U_C = U$). При $\omega = \infty$ имеем $I = 0$, так как сопротивление катушки бесконечно и, соответственно, все напряжение падает на зажимы катушки ($U_L = U$). При частоте резонанса $\omega = \omega_0$ имеем $U_L = U_C$ и, так как напряжения на катушке и на конденсаторе взаимно компенсируются, то все напряжение падает на участок с сопротивлением r ($U_r = I \cdot r = U$). Диаграмма на рисунке приведена для случая $d < 1$, вследствие чего при частоте резонанса $U_C = U_L > U$. Максимум U_C наступает при частоте, меньшей чем ω_0 , т. е. раньше максимума I , так как для получения величины U_C необходимо умножить ток I на убывающую величину $\frac{1}{\omega C}$. Максимум же U_L достигается при частоте, превышающей ω_0 , т. е. позже максимума I , так как для получения величины U_L необходимо умножить ток на возрастающую величину ωL .

Кривые, выражающие зависимость величин I , U_L и U_C от частоты, дающие графическое изображение частотных характеристик цепи, называют также *резонансными кривыми*. Резонансными кривыми называют также зависимости этих величин от изменяющейся индуктивности или от изменяющейся емкости при неизменной частоте.

Рассмотрим зависимость от относительной частоты $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ относительного значения тока I/I_0 , где $I_0 = U/r$ и $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — ток и частота при резонансе. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{U}{z} \cdot \frac{U}{r} = \frac{r}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\omega_0 L}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{d^2} \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, частотная характеристика $\frac{I}{I_0}(\eta)$ зависит только от затухания d . Для определения d положим $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Получаем

$1 + \frac{1}{d^2} \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2 = 2$. Положительные корни уравнения равны

$\eta_{1,2} = \mp \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + 1}$; следовательно, $\eta_2 - \eta_1 = d$. Отсюда и из рис. 6-6 видно что чем больше затухание контура, тем более широкой оказывается резонансная кривая $\frac{I}{I_0}(\eta)$; и, наоборот, эта кривая тем более острая, чем меньше затухание.

Принято условно говорить, что цепь пропускает частоты, при которых $I > \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$, т. е. когда мощность $I^2 r$, поглощаемая цепью,

больше половины максимальной мощности $I_0^2 r$ при резонансе. Соответственно будем говорить, что цепь не пропускает частот, для которых $I < \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$, т. е. $I^2 r < \frac{1}{2} I_0^2 r$. В этом смысле можно ввести понятие полосы пропускания

$$\omega_0 (\eta_2 - \eta_1) = \omega_0 d = \frac{\omega_0}{Q}$$

как диапазона частот, для которых имеет место условие $I > \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$.

Назовем расстройкой контура по частоте величину $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ и относительной расстройкой величину $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. При этом

$$\eta - \frac{1}{\eta} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega_0 + \Delta\omega)^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \frac{1 + 0,5 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}$$

При больших значениях добротности ток резко падает при небольших отклонениях η от единицы. Если $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, то приближенно можно считать

$$\eta - \frac{1}{\eta} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0},$$

и тогда

$$\frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}} \text{ и } \varphi \approx \arctg \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right).$$

Величину $a = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q$ назовем обобщенной расстройкой контура. Таким образом, через обобщенную расстройку окончательно можно записать:

$$\frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \varphi \approx \arctg a.$$

На границах полосы пропускания обобщенная расстройка равна единице, а $\varphi = \pm 45^\circ$.

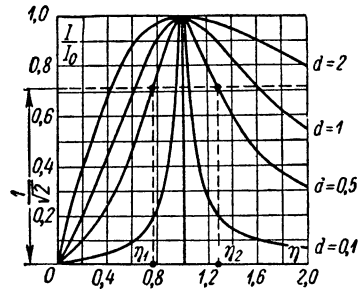


Рис. 6-6.

6-4. Резонанс при параллельном соединении участков g , L , C

Условием резонанса при параллельном соединении активного, индуктивного и емкостного сопротивлений (рис. 6-7) является также отсутствие сдвига фаз между током и напряжением на зажимах цепи.

Поскольку $Y = g - jb = ye^{-i\varphi}$, где

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g} = \arctg \frac{b}{g},$$

то условие $\varphi = 0$ означает, что $b = b_L - b_C = 0$ или

$$\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0, \quad \omega^2 LC = 1.$$

Таким образом, взаимная компенсация реактивных проводимостей, при которой наступает резонанс в данной цепи, имеет место, если либо частота, либо индуктивность, либо емкость подобраны согласно соотношениям:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

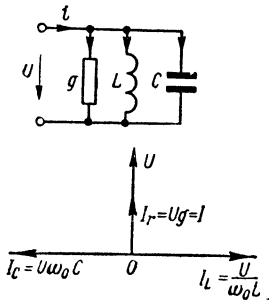


Рис. 6-7.

Следовательно, резонанса при параллельном соединении можно добиться изменением либо частоты, либо индуктивности, либо емкости. Частоту ω_0 называют резонансной частотой.

При резонансе реактивная проводимость цепи равна нулю и полная проводимость цепи достигает своего минимального значения. Поэтому ток в общей ветви $I = Uy$ при неизменном напряжении оказывается наименьшим в отличие от резонанса при последовательном соединении, когда ток, наоборот, имел максимальное значение. Векторная диаграмма при резонансе в рассматриваемой цепи приведена на рис. 6-7.

Так как вектор тока в общей ветви оказывается геометрической суммой векторов трех токов, два из которых I_L и I_C находятся в противофазе, то при резонансе возможны случаи, когда токи в индуктивной катушке и в конденсаторе могут превосходить, и иногда намного, суммарный ток в цепи. Поэтому резонанс при параллельном соединении называют резонансом токов.

Превышение токов в реактивных элементах цепи над суммарным током цепи имеет место при условии

$$g < \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma.$$

Величина $\sqrt{C/L}$, имеющая размерность проводимости и обозначенная нами через γ , носит название волновой проводимости контура.

Отношение

$$Q = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{U\omega_0 C}{Ug} = \frac{\omega_0 C}{g} = \frac{\gamma}{g}$$

определяет кратность превышения тока в реактивной катушке и в конденсаторе над суммарным током при резонансе. Величина Q является добротностью контура. Как и ранее (§ 6-2), величина $d = \frac{1}{Q}$, обратная добротности, носит название затухания контура.

Энергетические процессы при резонансе в цепи с параллельным соединением участков g , L и C аналогичны энергетическим процессам при резонансе в цепи с последовательным соединением участков r , L и C . Теперь также имеем $p_L = -p_C$, т. е. $p_L + p_C = 0$. Действительно, при параллельном соединении при резонансе $i_L = -i_C$ в любой момент времени, а напряжение является общим и, так как $p_L = ui_L$, $p_C = ui_C$, то $p_L = -p_C$. Таким образом, и в этом случае происходят колебания энергии в цепи. Энергия полей переходит из конденсатора в катушку и обратно, не обмениваясь с источником, питающим цепь. Источник же энергии только покрывает потери энергии в ветви с проводимостью g .

6-5. Частотные характеристики цепи с параллельным соединением участков g , L , C

Зависимости реактивных и полной проводимостей цепи и угла сдвига φ между током и напряжением от частоты приведены на рис. 6-8. В данной цепи активная проводимость не зависит от частоты. Реактивная проводимость (рис. 6-9) $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C = \frac{C}{\omega} (\omega_0^2 - \omega^2)$ имеет три характерные частоты — два полюса $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, при которых $b = \infty$, и один нуль $\omega = \omega_0$, когда $b = 0$.

Отмеченное в § 6-3 общее характерное свойство функции $b(\omega)$, заключающееся в том, что при всех частотах $\frac{db}{d\omega} < 0$, должно соблюдаться и в данном случае. Действительно,

$$\frac{db}{d\omega} = -\frac{1}{\omega^2 L} - C < 0.$$

Как и для цепи с последовательным соединением r, L, C , и в этом случае в момент резонанса происходит изменение характера реактивной проводимости (рис. 6-8 и 6-9). Если при $\omega < \omega_0$ реактивная проводимость имела индуктивный характер ($b > 0, \varphi > 0$), то при $\omega > \omega_0$ она принимает емкостный характер ($b < 0, \varphi < 0$). В частном случае, если $g = 0$, при частоте $\omega = \omega_0$ происходит скачкообразное изменение угла φ от $+\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$, т. е. происходит «прокидывание фазы» (рис. 6-9).

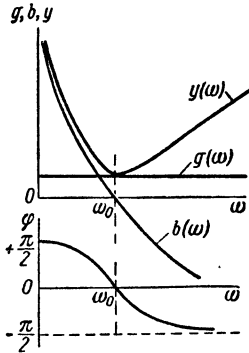


Рис. 6-8.

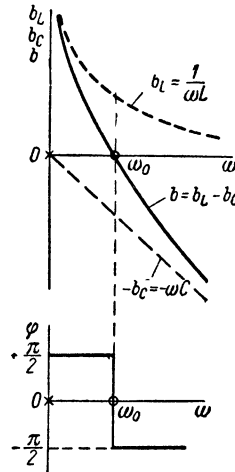


Рис. 6-9.

Реактивное сопротивление x контура можно найти из выражения:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx.$$

Если $g = 0$, то $x = \frac{1}{b} = \frac{\omega/C}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Для этого случая зависимость $x(\omega)$ дана на рис. 6-10. Заметим, что и в данных условиях $\frac{dx}{d\omega} > 0$. В момент резонанса реактивное сопротивление становится бесконечно большим и одновременно меняет свой характер. До резонанса характер цепи был индуктивный, после резонанса — емкостный.

При отличной от нуля активной проводимости ($g \neq 0$) в цепи зависимость $x(\omega)$ имеет вид, показанный на рис. 6-10 пунктиром. Прохождение кривой $x(\omega)$ через нуль при $\omega = \omega_0$ вовсе не означает, что и полное сопротивление цепи мало. При $\omega = \omega_0$

$$z = r = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{1}{g} = \rho Q = \omega_0 L Q.$$

При больших значениях Q это сопротивление оказывается достаточно большим. В отличие от активной проводимости, которая не зависит

от частоты, активное сопротивление $r = \frac{g}{g^2 + b^2}$ зависит от частоты (рис. 6-10).

Частотная характеристика $U(\omega)$ при $I = \text{const}$, $g = \text{const}$, $L = \text{const}$ и $C = \text{const}$ выражается формулой:

$$U(\omega) = I \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

и изображается кривой, представленной на рис. 6-11. На рисунке также приведены частотные характеристики $I_L(\omega) = \frac{U(\omega)}{\omega L}$ и $I_C(\omega) = U(\omega)\omega C$. При $\omega = 0$ имеем $U = 0$, так как сопротивление катушки при постоянном токе равно нулю и, соответственно,

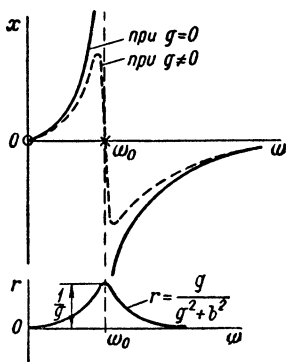


Рис. 6-10.

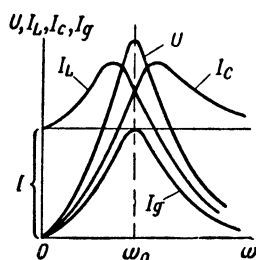


Рис. 6-11.

весь ток проходит через катушку ($I_L = I$). При $\omega = \infty$ также $U = 0$, так как при этом сопротивление конденсатора падает до нуля и, соответственно, весь ток проходит через конденсатор ($I_C = I$). При частоте резонанса $\omega = \omega_0$ имеем $I_C = I_L$, и так как токи в катушке и конденсаторе взаимно компенсируются, то весь ток I проходит через участок с проводимостью g ($I_g = Ug = I$). Диаграмма на рисунке приведена для случая $d < 1$, вследствие чего при частоте резонанса $I_C = I_L > I$. Максимумы величин I_L и I_C не совпадают с максимумом напряжения U по тем же причинам, которые были указаны при рассмотрении последовательной цепи.

Рассматривая зависимость $\frac{U}{U_0}(\eta)$, где $U_0 = \frac{I}{g}$ и $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, и строя соответствующие ей резонансные кривые для различных затуханий, нетрудно показать, что и в этом случае имеет место равенство $\eta_2 - \eta_1 = d$, где η_1 и η_2 — значения относительной частоты, при которых $\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Как и в случае с последовательным соединением r , L , C , здесь также можно ввести понятия полосы пропускания, расстройки контура, относительной расстройки и обобщенной расстройки.

Представляет интерес сопоставить кривые на рис. 6-5 и 6-11 для последовательной и параллельной цепей. Зависимости в этих

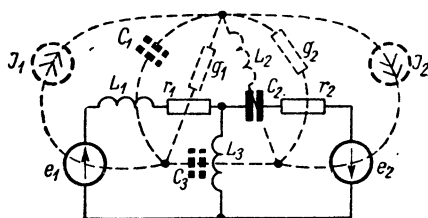


Рис. 6-12.

цепях полностью совпадут, если заменить токи на напряжения, емкость на индуктивность и сопротивление на проводимость и обратно. Такие цепи называются дуальными. Дуальными являются и любые две сложные планарные электрические цепи, в которых взаимно соответствуют: контурам узлы, последовательному соединению параллельное, источникам э. д. с. источники тока, индуктивностям емкости, сопротивлениям проводимости (рис. 6-12). Процессы в дуальных цепях аналогичны с заменой напряжений на токи и обратно, в частности, резонанс напряжений в одной соответствует резонанс токов в другой.

6-6. Частотные характеристики цепей, содержащих только реактивные элементы

Рассмотрим связь между током и э. д. с. на входе пассивного двухполюсника, состоящего только из реактивных элементов. Полагая в выражении для I_1 , полученном по методу контурных токов (§ 5-11), $I_1 = I_{вх}$ и $\dot{E}_{11} = \dot{E}_{вх}$, имеем:

$$I_{вх} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{E}_{вх} = Y_{вх} \dot{E}_{вх},$$

т. е.

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = Y_{вх} \quad \text{и} \quad Z_{вх} = jx_{вх} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}.$$

Здесь Δ — определитель n уравнений цепи, записанных по методу контурных токов, имеющий n строк и n столбцов; Δ_{11} — его алгебраическое дополнение, имеющее $(n - 1)$ строк и $(n - 1)$ столбцов. В каждом элементе Δ и Δ_{11} содержатся величины вида

$$Z_{ii} = jx_{ii} = j\omega L_{ii} + \frac{1}{j\omega C_{ii}} = \frac{j}{\omega} \left(\omega^2 L_{ii} - \frac{1}{C_{ii}} \right)$$

и

$$Z_{kq} = jx_{kq} = \frac{j}{\omega} \left(\omega^2 L_{kq} - \frac{1}{C_{kq}} \right),$$

т. е. во всех них содержится множитель j/ω при вещественных величинах. Имея в виду это обстоятельство, мы можем записать:

$$Z_{\text{вх}} = jx_{\text{вх}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{(j/\omega)^n \Delta'}{(j/\omega)^{n-1} \Delta'_{11}} = \frac{j}{\omega} \frac{\Delta'}{\Delta'_{11}}$$

или

$$x_{\text{вх}} = \frac{1}{\omega} \frac{\Delta'}{\Delta'_{11}},$$

где Δ' и Δ'_{11} вещественны. Элементы, входящие в Δ' и Δ'_{11} , имеют вид

$$\omega^2 L_{ii} - \frac{1}{C_{ii}} \quad \text{и} \quad \omega^2 L_{kq} - \frac{1}{C_{kq}}.$$

Раскрывая Δ' и Δ'_{11} и группируя в них члены с одинаковой степенью ω , мы получим в числителе и знаменателе полиномы вида:

$$x_{\text{вх}} = \frac{a_{2n}\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots + a_0}{\omega(b_{2n-2}\omega^{2n-2} + b_{2n-4}\omega^{2n-4} + \dots + b_0)}.$$

Если найти корни полинома числителя ($\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$) и корни полинома знаменателя ($\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2}$), приравнявая соответствующие полиномы нулю, то можем записать также:

$$x_{\text{вх}} = \frac{a_{2n}}{b_{2n-2}} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}.$$

В цепи, содержащей только реактивные элементы, угол сдвига между напряжением и током может принимать только значения $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. При резонансе в таких цепях $\varphi = 0$, и поэтому скачкообразное изменение φ от $+\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$ или от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ может происходить только в моменты резонанса в цепи.

Таким образом, зависимость $\varphi(\omega)$ должна иметь вид, показанный на рис. 6-13.

В точках резонанса $x_{\text{вх}} = 0$ или $x_{\text{вх}} = \infty$, т. е. для $x_{\text{вх}}$ имеем нуль или полюс, аналогично резонансу напряжений или резонансу токов в простейших цепях, рассмотренных в § 6-3, 6-5.

Как будет показано в дальнейшем, для чисто реактивных цепей $x(\omega)$ всегда возрастает с ростом ω , т. е.

$$\frac{dx_{\text{вх}}}{d\omega} > 0,$$

в справедливости чего мы убедились ранее для простейших цепей. В таком случае полюсы и нули функции $x_{\text{вх}}$ могут только чередоваться.

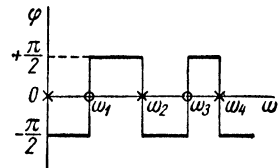


Рис. 6-13.

Действительно, величина $x_{вх}$, увеличиваясь от $-\infty$ (полюс функции), все время растет, проходит через нуль (нуль функций) и, возрстая все время дальше, достигнет значения $+\infty$ (полюс функции). При переходе частоты через полюс $x_{вх}$ меняет знак и процесс повторяется.

Если корни числителя и знаменателя $\omega_1, \omega_2, \dots$ расположить по мере возрастания их значений, то легко заметить, что в силу чередования нулей и полюсов имеем:

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{2n-1}.$$

Из выражения для $x_{вх}$ видно, что полиномы числителя и знаменателя имеют члены, степень ω в которых уменьшается на две единицы и, кроме того, разница в максимальных степенях числителя и знаменателя не превышает единицу. Если все коэффициенты не равны нулю, то степень числителя на единицу выше, чем степень знаменателя. Может оказаться, что $a_{2n} = 0$, но $b_{2n-2} \neq 0$; тогда степень числителя на единицу ниже степени знаменателя. То, что могут существовать только такие варианты, можно понять из следующих соображений. Когда частота ω стремится к бесконечности, сопротивление всех катушек также стремится к бесконечности, а сопротивления всех конденсаторов стремятся к нулю. В зависимости от структуры схемы результат будет тот или иной, а именно, если на пути от одного входного зажима к другому будет существовать хоть одна цепочка ветвей, состоящая только из конденсаторов, то $x_{вх} \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$ (рис. 6-14 и 6-15). Наличие катушек не играет при этом роли, так как их сопротивление стремится к бесконечности. Следовательно, $x_{вх}$ стремится к нулю пропорционально $\frac{1}{\omega}$, т. е. в пределе цепь будет вести себя как емкостное сопротивление. Если в цепи нет такой цепочки конденсаторов и по любому пути от одного зажима к другому встретится хотя бы одна катушка (рис. 6-16 и 6-17), то конденсаторы при $\omega \rightarrow \infty$ не играют никакой роли, так как сопротивление цепи будет полностью определяться сопротивлением катушки, стремящимся к бесконечности. Следовательно, при этом $x_{вх}$ стремится к бесконечности пропорционально ω , т. е. в пределе цепь будет вести себя, как индуктивное сопротивление. Так как в числителе и знаменателе при $\omega \rightarrow \infty$ остаются только члены с высшей степенью ω , то рассмотренные предельные случаи подтверждают сделанное выше заключение, что наибольшие степени числителя и

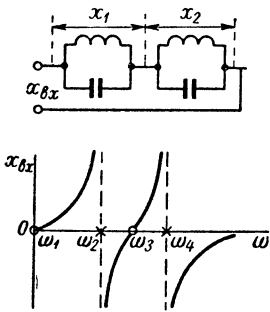


Рис. 6-14.

знаменателя могут отличаться в ту или иную сторону только на единицу.

Вышеприведенные свойства входного реактивного сопротивления цепей, состоящих из чисто реактивных элементов, помогают

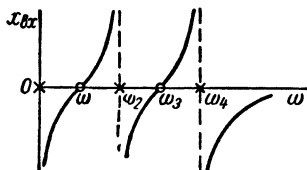
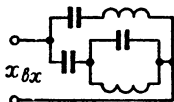


Рис. 6-15.

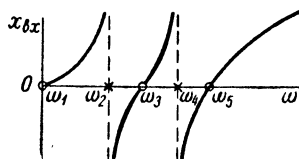
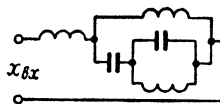


Рис. 6-16.

правильно строить частотные характеристики таких цепей. Примеры частотных характеристик, где показаны все четыре возможных варианта расположения нулей и полюсов при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, приведены на рис. 6-14, 6-15, 6-16 и 6-17.

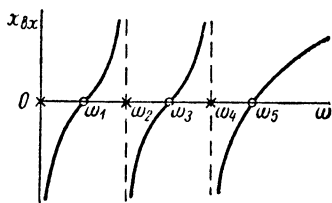
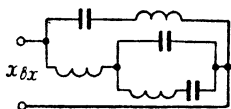


Рис. 6-17.

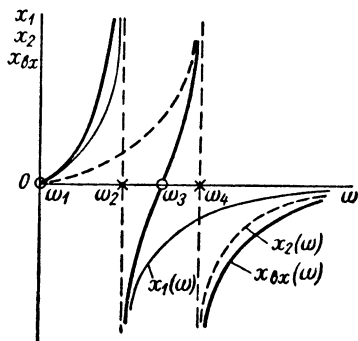


Рис. 6-18.

Имея частотные характеристики $x(\omega)$ или $b(\omega)$ отдельных участков цепей, можно графически суммировать $x(\omega)$ ветвей и участков цепи, соединенных последовательно, и $b(\omega)$ ветвей и участков цепи, соединенных параллельно. Пример такого графического построения показан на рис. 6-18 для схемы, приведенной на рис. 6-14.

6-7. Частотные характеристики цепей в общем случае

Полученные в предыдущем параграфе частотные характеристики L , C цепей без потерь могут быть использованы для выяснения характера частотных характеристик реальных электрических цепей при наличии активных сопротивлений.

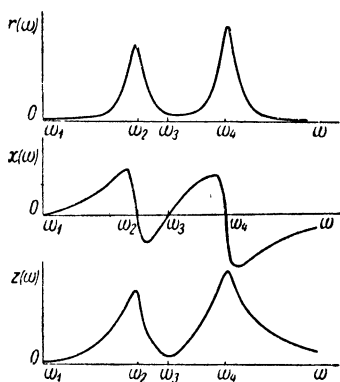


Рис. 6-19.

Мы видели (§ 6-5), что при резонансе токов в случае $g \neq 0$ реактивное сопротивление контура равно нулю, а не бесконечности, как при $g = 0$. Поэтому вид частотных характеристик вблизи резонансных частот, при которых наступает резонанс токов, будет существенно отличаться от вида этих характеристик для случая $g = 0$. Активное сопротивление всей цепи в общем случае оказывается функцией частоты. Все эти обстоятельства осложняют исследование частотных зависимостей. Характер зависимости z , r , x от ω при

наличии конечного активного сопротивления при большой добротности элементов цепи показан на рис. 6-19.

При этом можно под добротностью катушек при резонансной частоте ω_0 понимать отношение ее индуктивного сопротивления к ее активному сопротивлению, т. е. $Q_L = \frac{\omega_0 L}{r_L}$. Соответственно под добротностью конденсатора при частоте ω_0 можно понимать отношение его емкостного сопротивления к его активному сопротивлению, т. е. $Q_C = \frac{1}{\omega_0 C r_C}$.

Общий метод определения резонансных частот остается и в этом случае тем же — необходимо написать выражение для комплексного сопротивления или комплексной проводимости цепи, выделить в них мнимую часть и приравнять нулю коэффициент при j . Решая эти уравнения, определяем резонансные частоты цепи. Частотные характеристики $z(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $r(\omega)$, $x(\omega)$, $g(\omega)$, $b(\omega)$, $y(\omega)$ для заданной цепи взаимосвязаны, и в некоторых случаях достаточно знать лишь одну из перечисленных характеристик, чтобы можно было определить остальные. Этот весьма важный вопрос будет рассмотрен в одиннадцатой главе.

В заключение рассмотрим резонансные явления в цепи, изображенной на рис. 6-20.

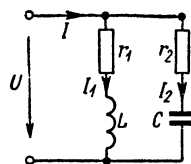


Рис. 6-20.

Комплексная проводимость этой цепи имеет выражение:

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r_1 + j\omega L} + \frac{1}{r_2 - j1/\omega C} =$$

$$= \frac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + 1/\omega^2 C^2} - j \left(\frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{r_2^2 + 1/\omega^2 C^2} \right) = g - jb.$$

Условием резонанса будет $b = 0$, откуда найдем:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\left(\frac{L}{C} - r_1^2\right) : \left(\frac{L}{C} - r_2^2\right)}.$$

Представляет интерес частный случай, когда $r_1 = r_2 = r = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Разделим числитель и знаменатель первого члена в выражении для b на $\omega^2 LC$. Заметив, что $r_1^2 = r_2^2 = \frac{L}{C}$, получим:

$$\frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{1/\omega^2 C^2 + L/C} = \frac{1/\omega C}{1/\omega^2 C^2 + r_2^2}.$$

При любом значении частоты ω реактивная проводимость равна нулю, т. е. резонанс в цепи имеет место при любой частоте. Нетрудно убедиться, что при этом сопротивление всей цепи остается при всех частотах неизменным и равным r .

При напряжении на зажимах цепи $u = U_m \sin \omega t$ ток i_1 в катушке равен $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1)$, а ток i_2 в конденсаторе и напряжение u_C на нем равны:

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2) \quad \text{и} \quad u_C = U_{Cm} \sin\left(\omega t - \varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

При $r_1 = r_2 = \sqrt{L/C}$ имеем: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{r_1} = \omega \sqrt{LC}$ и

$$\operatorname{tg}\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{r_2}{1/\omega C} = \omega \sqrt{LC}.$$

Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$, и ток в катушке совпадает по фазе с напряжением на конденсаторе, т. е. энергия в катушке и энергия в конденсаторе одновременно достигают максимума и одновременно убывают до нуля. Таким образом, в рассматриваемой цепи при резонансе совсем не совершается обмена энергией между катушкой и конденсатором, а происходит в течение части периода поступление энергии из внешнего источника одновременно в электрическое поле конденсатора и в магнитное поле катушки, а также на выделение тепла в сопротивлениях r_1 и r_2 . В другую часть периода энергия, возвращаясь одновременно из конденсатора и из катушки, преобразовывается в тепло в сопротивлениях r_1 и r_2 . В то же время энергия продолжает поступать из внешнего источника, причем она также поглощается в виде тепла в сопротивлениях r_1 и r_2 .

Из этого примера видно, что энергетические процессы при резонансе в сложных цепях протекают значительно сложнее, чем это было в простых цепях с последовательным или параллельным соединением участков, рассмотренных в § 6-2 и 6-4.

Весьма важным является случай, когда в цепи, изображенной на рис. 6-20, можно положить $r_2 = 0$. Это весьма распространенный случай колебательных контуров в радиотехнических устройствах, так как потерями в конденсаторе можно пренебречь по сравнению с активной мощностью в ветви с катушкой.

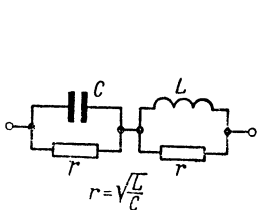


Рис. 6-21.

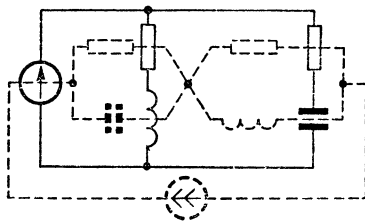


Рис. 6-22.

В таком случае из условия $b = 0$ для резонансной частоты получаем $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r_1^2}{L^2}}$. Сопротивление всей цепи при этой частоте оказывается равным

$$r = \frac{1}{g} = \frac{r_1^2 + \omega_0^2 L^2}{r_1} = \frac{L}{r_1 C} = \frac{\rho^2}{r_1} = \rho Q.$$

Последней формулой обычно пользуются для расчета сопротивления такого контура. При большой добротности Q эквивалентное сопротивление контура значительно превосходит его волновое сопротивление ρ .

Рассматриваемая цепь при $r_1 = r_2 = \sqrt{L/C}$ обладает замечательным свойством постоянства активной проводимости и отсутствием реактивной проводимости при всех частотах, в то время как каждая ветвь этой цепи имеет величины $g_1(\omega)$, $g_2(\omega)$ и $b_1(\omega)$ и $b_2(\omega)$, зависящие от частоты. При этих условиях эти ветви можно называть взаимно дополняющими друг друга цепями.

Нетрудно заметить, что дополняющей цепью для цепи с параллельно соединенными участками r и C (рис. 6-21) будет включенная с ней последовательно цепь с параллельно соединенными участками $r_1 L$, если обеспечить условие $r_1 = r_2 = r = \sqrt{L/C}$. При этом суммарное сопротивление цепи будет активным, неизменным и равным r на всех частотах. Действительно, свойства всей цепи, изображенной на рис. 6-21, должны быть аналогичными свойствам рассмотренной

нами цепи, изображенной на рис. 6-20, так как эти цепи дуальны, что хорошо видно из рис. 6-22.

Взаимно дополняющие цепи могут быть использованы для обеспечения неизменности выходного или входного сопротивлений. Для этой цели к заданной цепи необходимо присоединить дополняющую ее цепь.

6-8. Резонанс в индуктивно связанных контурах

Определим резонансные частоты и частотные характеристики в цепи, изображенной на рис. 6-23. В радиотехнике и в технике связи часто используют явление резонанса в индуктивно связанных колебательных контурах с большой добротностью. В связи с этим для упрощения расчета пренебрежем активным сопротивлением вторичного контура. Собственные частоты контуров, при которых наступает в них резонанс, в случае отсутствия взаимной индукции равны:

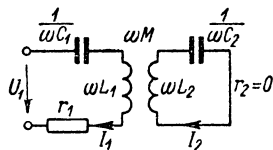


Рис. 6-23.

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Имеем уравнения рассматриваемой цепи:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= I_1 \left[r_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] + j \omega M I_2, \\ -j \omega M I_1 &= j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) I_2. \end{aligned}$$

Выражая I_2 из второго уравнения через I_1 и подставляя в первое уравнение, получаем:

$$\dot{U}_1 = I_1 \left[r_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right) \right] = I_1 [r_1 + j x_{13}].$$

Условием резонанса напряжений будет равенство нулю эквивалентного реактивного сопротивления, т. е. $x_{13} = 0$, откуда

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = \omega^2 M^2.$$

Разделив на $(\omega L_1 \cdot \omega L_2)$ обе части, получим:

$$\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \right) = k^2,$$

где $k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}$ есть квадрат коэффициента связи, причем $k^2 < 1$.

Решая это уравнение относительно ω , найдем частоты ω'_0 и ω''_0 , отвечающие резонансу напряжений, из выражения:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \mp \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1-k^2)\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1-k^2)}},$$

где $\omega_{\text{рез}}$ равно либо ω'_0 , либо ω''_0 .

Если оба контура предварительно были настроены на одну частоту $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, то частоты ω'_0 и ω''_0 находятся из выражения:

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 \mp k}{1 - k^2}}, \text{ т. е. они оказываются равными:}$$

$$\omega'_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega''_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}},$$

причем $\omega'_0 < \omega_0 < \omega''_0$.

При частотах ω'_0 и ω''_0 сопротивление цепи оказывается минимальным и равным r_1 , а ток I_1 достигает максимальных значений; $I_1 = \frac{U_1}{r_1}$.

При $\omega = \omega_0$ имеем $x_{12} = \infty$ и ток $I_1 = 0$. Это можно пояснить следующим образом: при частоте ω_0 имеет место резонанс во вторичном контуре $x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0$ и при условии $r_2 = 0$ получается $z_2 = 0$. Как видно из уравнения для второго контура, при конечном значении тока I_2 э. д. с. взаимной индукции $-j\omega M I_1$ должна быть равна

нулю, т. е. $I_1 = 0$. Ток I_2 устанавливается таким, чтобы э. д. с. взаимной индукции $-j\omega M I_2$ со стороны второго контура на первый контур уравновесила приложенное напряжение, что видно из первого уравнения при $I_1 = 0$. Этот случай по своему характеру аналогичен резонансу токов в контуре без потерь.

На рис. 6-24 представлена частотная характеристика $I_1(\omega)$ при $U_1 = \text{const}$, а также частотная характеристика $x_{12}(\omega)$. Полюсами функции $x_{12}(\omega)$ являются частоты $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ и $\omega = \infty$. Ее нулями являются частоты $\omega = \omega'_0$ и $\omega = \omega''_0$. В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе во всем диапазоне частот соблюдается условие $\frac{dx_{12}}{d\omega} > 0$ и полюсы и нули чередуются. Пунктиром нанесены частотные характеристики при $r_2 \neq 0$.

Таким образом, резонансная кривая $I_1 = F_1(\omega)$ цепи, состоящей из двух связанных контуров с малым затуханием, имеет два максимума и один минимум.

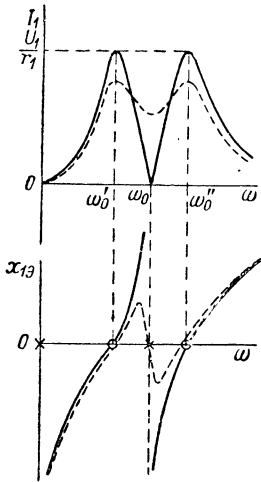


Рис. 6-24.

6-9. Практическое значение явления резонанса в электрических цепях

Явление резонанса в электрических цепях весьма широко используется в современной электротехнике и особенно в технике высокой частоты.

Генераторы высокой частоты, применяемые в радиотехнике, содержат в себе в качестве основного элемента колебательный контур, колебания тока и напряжения в котором происходят с резонансной частотой или с частотой, весьма близкой к резонансной. Антенны передающих и приемных радиостанций вместе с включенными в их цепь катушками или конденсаторами представляют собой также колебательные контуры, настраиваемые в резонанс с частотой колебаний тока в ламповом генераторе в случае передающей станции и с частотой колебаний напряженностей поля в электромагнитной волне в случае приемной станции. Радиоприемники содержат в себе настраиваемые в резонанс колебательные контуры. Настройка в резонанс на частоту одной из передающих радиостанций колебательных контуров в радиоприемнике, в том числе и контура антенны, обеспечивает возможность выделить в приемнике эту передающую радиостанцию из числа многих работающих одновременно.

Применение этой же идеи в проволочной междугородной телефонной связи позволяет осуществить так называемую многократную телефонию, т. е. осуществить по одной паре проводов одновременно несколько разговоров. При этом те или иные колебания выделяются на конечных пунктах к различным приемникам с помощью резонансных устройств.

В таких случаях эти устройства несколько усложняются по сравнению с рассмотренными выше простейшими цепями, так как здесь ставится более сложная задача выделить целую полосу частот, отвечающих диапазону частот звуковых колебаний. Обычно каждому телефонному разговору, так же как каждой передающей станции при радиопередаче, отвечает определенная высокая частота, называемая несущей частотой. На колебания тока с этой частотой накладываются колебания со звуковой частотой. Этот процесс, называемый модуляцией колебаний, будет рассмотрен в дальнейшем подробно. Сейчас существенно отметить, что около каждой несущей частоты образуется полоса частот, отвечающая диапазону частот звуковых колебаний, и оконечные устройства в телефонной передаче должны выделять определенную полосу частот, прилегающую к той или иной несущей частоте. Такие устройства называют электрическими фильтрами. В дальнейшем мы ознакомимся с принципом их устройства и работы.

В радиоприемных устройствах точно так же существенно обеспечить пропускание и усиление в одинаковой мере всей полосы

частот, соответствующей диапазону звуковых частот, чтобы не было искажения передачи. С этой целью может быть использована система из двух связанных контуров, имеющая резонансную кривую, показанную на рис. 6-24. Подбирая надлежащим образом коэффициент связи и затухание контура, можно получить кривую с малым изменением тока — в пределах изменения частоты от ω_0' до ω_0'' и с крутыми спадами за пределами этого диапазона частоты.

Явление резонанса используется в радиотехнике для измерения частоты колебаний или отвечающей ей длины электромагнитной волны с помощью измерительных приборов, называемых волномерами. Волномер содержит колебательный контур с градуированными индуктивностью и емкостью и прибором, указывающим ток в контуре. Колебательный контур волномера связывается индуктивно с контуром устройства, в котором необходимо измерить частоту тока. При плавном изменении емкости волномера добиваются максимума тока в контуре волномера и по величине индуктивности и емкости контура волномера судят о частоте.

Явление резонанса широко используется и в других электроизмерительных устройствах, а также в устройствах электроавтоматики.

Компенсация отстающей реактивной составляющей тока в мощных приемных устройствах электроэнергетических систем с помощью подключаемых параллельно этим устройствам конденсаторов или перевозбужденных синхронных двигателей, по сути дела, также представляет собой мероприятие, при котором достигается резонанс. Но в этом случае явление резкого уменьшения общего тока по сравнению с токами в отдельных ветвях, характерное для резонанса в контурах с малыми потерями энергии, не имеет места, так как эквивалентная активная проводимость таких устройств велика по сравнению с их эквивалентной индуктивной проводимостью.

Все перечисленные примеры относились к случаям, когда явление резонанса в электрической цепи используется для практических целей. Однако в тех случаях, когда явление резонанса в электрической цепи возникает, не будучи специально предусмотренным, оно может повести к нежелательным последствиям. Особенно опасен в этом отношении резонанс при последовательном соединении индуктивных и емкостных элементов цепи при малом активном сопротивлении цепи, так как при этом на индуктивных и на емкостных элементах могут появиться весьма высокие напряжения. Подобные явления могут, например, возникнуть при включении к зажимам генератора или трансформатора длинной линии передачи или кабеля, не замкнутых на другом их конце на приемник энергии. Генератор и трансформатор обладают индуктивностью, а линия и ка-

бель обладают емкостью и индуктивностью. При отсутствии активной нагрузки в конце линии затухание такой цепи невелико, и легко могут появиться перенапряжения, если частота близка к резонансной. Следует отметить, что резонанс в подобных цепях может возникнуть и не для основной гармоники, а для высших гармонических, если они содержатся в кривой э. д. с. генератора или в кривой приложенного к зажимам цепи напряжения.





РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

7-1. Многофазные цепи и системы и их классификация

Многофазной системой электрических цепей называют совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные э. д. с. одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии. Отдельные электрические цепи, входящие в состав многофазной электрической цепи, называются фазами. Число фаз многофазной системы цепей будем обозначать через m .

Обычно электрические цепи, образующие многофазную систему цепей, тем или иным способом электрически соединяют друг с другом. При этом многофазную систему электрических цепей мы будем кратко называть **многофазной цепью**. В частности, при $m = 3$ мы имеем трехфазную цепь.

Совокупность э. д. с., действующих в фазах многофазной цепи, а также совокупность токов и напряжений в многофазной цепи называют **многофазной системой**, соответственно, э. д. с., токов и напряжений.

Трехфазные генераторы выполняют так, как это изложено в § 4-1. На рис. 4-2 и 4-3 в пазах статора показаны сечения проводов, принадлежащих обмотке одной фазы. Обмотки двух других фаз располагают в свободных пазах так, что оси всех трех обмоток составляют друг с другом при двухполюсной машине угол $2\pi/3$, а при числе пар полюсов, равном p , угол $2\pi/3p$.

Рассмотрим основные признаки классификации многофазных систем э. д. с., напряжений и токов.

Различают системы **симметричные** и **несимметричные**.

Симметричной называют многофазную систему э. д. с., в которой э. д. с. в отдельных фазах равны по амплитуде и отстают по

фазе друг относительно друга на углы, равные $q \frac{2\pi}{m}$, где q —любое целое число.

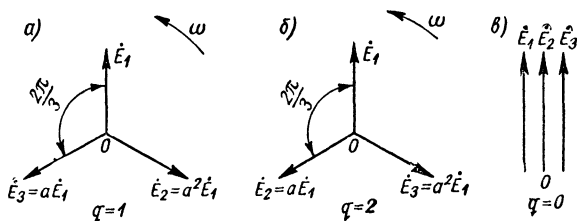


Рис. 7-1.

Для трехфазной цепи ($m = 3$) при $q = 1$ получаем систему трех равных по амплитуде э. д. с., сдвинутых друг относительно друга на угол $2\pi/3$ (рис. 7-1, а):

$$e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi); \quad e_2 = E_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$e_3 = E_m \sin\left(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Соответственно, для действующих значений э. д. с. в комплексной форме можем написать:

$$\dot{E}_1 = E_1 e^{j\psi}; \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \dot{E}_3 = \dot{E}_1 e^{-j\frac{4\pi}{3}}.$$

Обозначим $e^{j\frac{2\pi}{3}} = a$. Имеем:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a^3 = a^{j2\pi} = 1, \quad a^4 = a \quad \text{и} \quad 1 + a + a^2 = 0.$$

Соответственно, симметричную трехфазную систему э. д. с. можно записать в виде

$$\dot{E}_1, \dot{E}_2 = a^2 \dot{E}_1, \quad \dot{E}_3 = a \dot{E}_1,$$

так как

$$e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{4\pi}{3}} = a^2 \quad \text{и} \quad e^{-j\frac{4\pi}{3}} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = a.$$

Как видно из рис. 7-1, а, э. д. с. в фазах проходят через максимум в порядке номеров фаз (1, 2, 3, 1, 2, 3, ...). Такую систему называют симметричной системой прямой последовательности.

Приняв $q = 2$, получим симметричную систему обратной последовательности (рис. 7-1, б), в которой э. д. с. проходят через максимум в обратном порядке номеров фаз (1, 3, 2, 1, 3, 2, ...). Ее можно написать в виде

$$\dot{E}_1, \dot{E}_2 = a\dot{E}_1, \dot{E}_3 = a^2\dot{E}_1.$$

Положив $q = 0$, получим симметричную систему нулевой последовательности (рис. 7-1, в), в которой все три э. д. с. проходят через максимум одновременно. Ее можно записать в виде

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3.$$

Отметим важное положение, что для симметричной системы с прямой или обратной последовательностью сумма э. д. с. во всех фазах

$$\text{равна нулю: } \sum_{k=1}^m \dot{E}_k = 0.$$

Все сказанное выше относится в равной мере к симметричным системам напряжений или токов.

Несимметричными системами называют многофазные системы, не удовлетворяющие вышеуказанным условиям симметрии.

Нередко фазы обозначают буквами А, В, С или а, в, с. В таком случае при прямом следовании э. д. с. в фазах проходят через максимум в порядке букв алфавита (А, В, С, А, В, С, ...).

Другим важным признаком классификации является зависимость или независимость мгновенного значения мощности многофазной системы от времени. Уравновешенными называют многофазные системы, мгновенное значение мощности которых не зависит от времени, и не уравновешенными, мгновенное значение мощности которых является функцией времени.

Уравновешенность является весьма важным качеством многофазной системы. Так, например, момент на валу многофазного генератора при этом остается постоянным, а не пульсирует с частотой 2ω , как это имело бы место в однофазном генераторе, мгновенное значение мощности которого, как мы видели в § 4-7, изменяется с частотой 2ω . Покажем, что многофазная система при симметрии э. д. с. и при равномерной нагрузке фаз, т. е. при симметрии также токов, является уравновешенной, если число фаз m больше двух ($m > 2$). Для мгновенного значения мощности в k -й фазе имеем выражение:

$$\begin{aligned} p_k &= e_k i_k = \\ &= \sqrt{2} E \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \cdot \sqrt{2} I \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right] = \\ &= EI \cos \varphi - EI \cos \left[2\omega t - 2(k-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right]. \end{aligned}$$

Сумма мгновенных значений мощности во всех фазах равна $p = \sum_{k=1}^m p_k$. Сумма вторых членов в выражении для p_k равна нулю при $m > 2$, так как, изображая слагаемые этой суммы векторами, мы получим симметричную звезду. Таким образом, при $m > 2$ мгновенное значение мощности всей многофазной системы оказывается равным:

$$p = \sum_{k=1}^m EI \cos \varphi = mEI \cos \varphi = P = \text{const},$$

т. е. не зависит от времени, и, следовательно, система уравновешена. Заметим, что при несимметрии э. д. с. можно так подобрать неравномерную нагрузку фаз, что система также будет уравнове-

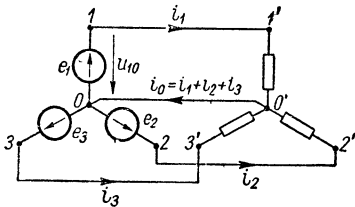


Рис. 7-2.

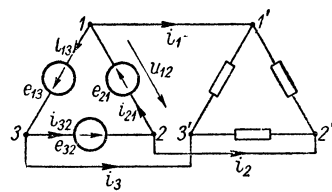


Рис. 7-3.

шенной. Но при этом может оказаться, что в отдельных фазах мы получим отрицательные активные сопротивления приемника, т. е. в этих фазах приемника необходимо включить источники энергии. Отметим, что нашедшая на практике применение двухфазная несимметричная система э. д. с. со сдвигом $\pi/2$, как нетрудно показать, уравновешена при равномерной нагрузке фаз.

Перейдем теперь к вопросу о связывании многофазных цепей. Основными видами связывания являются *связывание многоугольником* и *связывание звездой*. Рассмотрим эти виды связывания для наиболее важного случая трехфазной системы.

На рис. 7-2 показан способ связывания фаз трехфазного генератора и приемника *звездой*. При этом начала обмоток фаз генератора объединяются в нейтральную точку 0 генератора. Провод, соединяющий нейтральные точки 0 генератора и 0' приемника, называют нейтральным проводом, а провода, идущие от концов фаз генератора к приемнику, — линейными проводами.

Ток в нейтральном проводе при симметрии токов в фазах равен нулю, и этот провод в таком случае можно было бы удалить. Поэтому при симметрии токов достаточно трех линейных проводов. В этом заключается достоинство связывания звездой, так как при

отсутствии связывания между собой фаз потребовалось бы для каждой фазы иметь пару проводов, а всего шесть проводов. При несимметрии токов в фазах по нейтральному проводу протекает ток i_0 , амплитуда которого обычно меньше амплитуды токов в линейных проводах. Поэтому сечение нейтрального провода, учитывая возможную несимметрию токов, достаточно взять несколько меньшим, чем сечение линейных проводов.

На рис. 7-3 показано соединение фаз генератора и приемника *треугольником*. При этом в генераторе конец обмотки каждой фазы соединяется с началом обмотки следующей фазы. Так как при симметрии э. д. с. сумма фазных э. д. с. равна нулю, то при таком соединении в отсутствие токов i_1, i_2, i_3 , уходящих в приемник, токи в обмотках генератора равны нулю. Такой метод связывания дает также экономию в проводах, поскольку используется только три провода. Заметим, что способы связывания генератора и приемника независимы друг от друга, если нет нейтрального провода.

Напряжения на зажимах отдельных фаз генератора или приемника называют *ф а з н ы м и н а п р я ж е н и я м и*. Напряжения между линейными проводами — *л и н е й н ы м и н а п р я ж е н и я м и*. Токи в фазах генератора или приемника называют *ф а з н ы м и т о к а м и*. Токи в линейных проводах — *л и н е й н ы м и т о к а м и*.

Будем приписывать фазным величинам индекс «ф», а линейным — индекс «л».

Рекомендуется выбирать положительные направления э. д. с., напряжений и токов так, чтобы соблюдалась определенная симметрия. Этому удовлетворяет, например, выбор положительных направлений токов и напряжений, указанных на рис. 7-2 и 7-3. В таком случае, как видно из рис. 7-2, при соединении звездой линейные токи равны соответствующим фазным токам, а линейные напряжения равны разностям соответствующих фазных напряжений:

$$u_{12} = u_{10} + u_{02} = u_{02} - u_{01}; \quad u_{23} = u_{03} - u_{02}; \\ u_{31} = u_{01} - u_{03}.$$

При соединении *треугольником* (рис. 7-3), наоборот, линейные напряжения равны соответствующим фазным напряжениям, а линейные токи равны разностям соответствующих фазных токов.

$$i_1 = i_{21} - i_{13}; \quad i_2 = i_{32} - i_{21}; \quad i_3 = i_{13} - i_{32}.$$

При синусоидальных токах и напряжениях для комплексных линейных напряжений при соединении *звездой* получим:

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_{02} - \dot{U}_{01}, \quad \dot{U}_{23} = \dot{U}_{03} - \dot{U}_{02}, \quad \dot{U}_{31} = \dot{U}_{01} - \dot{U}_{03},$$

и для комплексных линейных токов при соединении треугольником найдем:

$$I_1 = I_{21} - I_{13}, \quad I_2 = I_{32} - I_{21}, \quad I_3 = I_{13} - I_{32}.$$

В частном случае, когда системы напряжений и токов симметричны (рис. 7-4), имеем:

при соединении звездой

$$I_n = I_\phi, \quad U_n = \sqrt{3} U_\phi$$

и при соединении треугольником

$$U_n = U_\phi, \quad I_n = \sqrt{3} I_\phi.$$

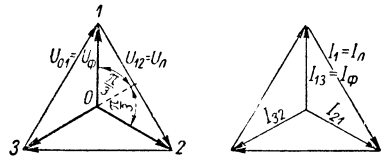


Рис. 7-4.

Пользуясь полученными соотношениями, находим выражение для мощности трехфазной системы при симметрии и системы токов, и системы напряжений, справедливое как для соединения звездой, так и для соединения треугольниками:

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3} U_n I_n \cos \varphi.$$

Аналогично для реактивной мощности получим:

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3} U_n I_n \sin \varphi.$$

7-2. Расчет трехфазной цепи в общем случае несимметрии э. д. с. и несимметрии цепи

Расчет трехфазной цепи может быть произведен любым изложенным в пятой главе методом, так как трехфазная цепь представляет собою частный случай сложной цепи, в которой действуют несколько источников э. д. с., поскольку каждый трехфазный генератор можно рассматривать как три источника фазных э. д. с.

Рассмотрим в виде примера расчет цепи, изображенной на рис. 7-5, причем для общности предположим, что как цепь, так и система э. д. с. несимметричны. Так как цепь имеет только два узла, то естественно воспользоваться методом узловых напряжений. Узловое напряжение между узлами 0 и 0' будет определяться из формулы:

$$\dot{U}_{00'} (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = \dot{\mathcal{J}}_1 + \dot{\mathcal{J}}_2 + \dot{\mathcal{J}}_3,$$

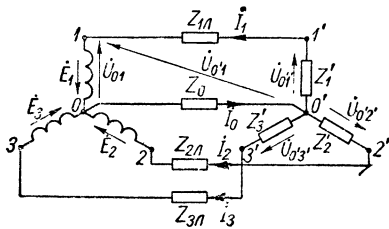


Рис. 7-5.

где

$$Y_1 = \frac{1}{Z_{1л} + Z'_1}, \quad Y_2 = \frac{1}{Z_{2л} + Z'_2},$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_{3л} + Z'_3}, \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0},$$

являются проводимостями ветвей, а

$$\dot{\mathcal{J}}_1 = \dot{E}_1 Y_1, \quad \dot{\mathcal{J}}_2 = \dot{E}_2 Y_2, \quad \dot{\mathcal{J}}_3 = \dot{E}_3 Y_3.$$

Получаем:

$$\dot{U}_{00'} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dot{E}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0}.$$

При этом расчете было предположено, что сопротивления фазных обмоток генератора равны нулю. Если это условие не имеет места, то эти сопротивления должны быть учтены в величинах $Z_{1л}$, $Z_{2л}$, $Z_{3л}$.

При отсутствии сопротивлений обмоток э. д. с. генератора равны фазным напряжениям на его зажимах, т. е.

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_{01}, \quad \dot{E}_2 = \dot{U}_{02}, \quad \dot{E}_3 = \dot{U}_{03},$$

и полученную формулу можно записать в виде

$$\dot{U}_{00'} = \frac{\dot{U}_{01} Y_1 + \dot{U}_{02} Y_2 + \dot{U}_{03} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0}.$$

Теперь легко находятся токи во всех проводах:

$$I_0 = \dot{U}_{00'} Y_0, \quad I_1 = (\dot{U}_{01} - \dot{U}_{00'}) Y_1,$$

$$I_2 = (\dot{U}_{02} - \dot{U}_{00'}) Y_2, \quad I_3 = (\dot{U}_{03} - \dot{U}_{00'}) Y_3.$$

При отсутствии нейтрального провода следует положить $Y_0 = 0$ и воспользоваться той же формулой для напряжения $\dot{U}_{00'}$.

Если заданными являются линейные напряжения на зажимах генератора и отсутствует нейтральный провод, то можно воспользоваться найденной формулой, поступив следующим образом. Поскольку положение точки O генератора может быть произвольным, то совместим ее с точкой 1 (рис. 7-5). При этом $\dot{U}_{01} = \dot{U}_{11} = 0$, а $\dot{U}_{02} = \dot{U}_{12}$, и, соответственно, $\dot{U}_{03} = \dot{U}_{13} = -\dot{U}_{31}$ представляют два заданных линейных напряжения. Третье линейное напряжение определяется через них, так как $\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = 0$. Подставляя указанные величины в формулу для $\dot{U}_{00'} = \dot{U}_{10'}$, получаем:

$$\dot{U}_{10} = \frac{\dot{U}_{12} Y_2 - \dot{U}_{31} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Отсюда находится ток $I_1 = \dot{U}_{10} Y_1$. Аналогично получаются остальные токи, если последовательно совмещать точку O с точками 2 и 3 и находить напряжения $\dot{U}_{20'}$ и $\dot{U}_{30'}$.

Если приемник соединен треугольником (рис. 7-6), то, преобразуя его в эквивалентное соединение звездой, приводим задачу к предыдущей при отсутствии нейтрального провода. Определив вышеуказанным методом токи в линейных проводах, нетрудно определить фазные напряжения приемника в эквивалентной звезде и получить линейные напряжения на приемнике $\dot{U}_{1'2'}$, $\dot{U}_{2'3'}$, $\dot{U}_{3'1'}$ как разность фазных, например, $\dot{U}_{1'2'} = \dot{U}_{0'2'} - \dot{U}_{0'1'}$.

При изображении напряжений в рассматриваемой цепи с помощью векторов на диаграмме, целесообразно пользоваться так называемой топографической диаграммой. Особенностью этой диаграммы является то, что каждой точке электри-

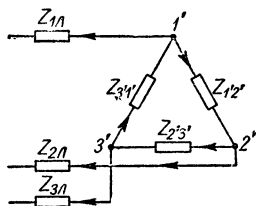


Рис. 7-6.

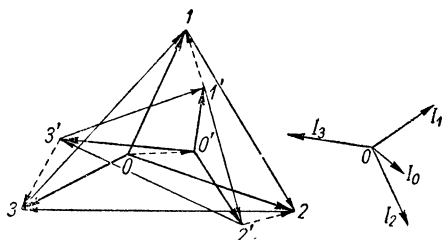


Рис. 7-7.

ческой цепи соответствует определенная точка на плоскости диаграммы. Расположение этих точек на диаграмме должно быть таким, чтобы напряжение между двумя любыми точками электрической цепи изображалось вектором, соединяющим соответствующие точки.

На рис. 7-7 изображена топографическая диаграмма напряжений для цепи, приведенной на рис. 7-5. Жирными линиями показаны векторы фазных напряжений на генераторе и на приемнике. Тонкими линиями изображены векторы линейных напряжений на генераторе и на приемнике, образующие треугольники этих напряжений, и пунктирными линиями показаны векторы падений напряжений в линейных проводах и в нейтральном проводе. Рядом с топографической диаграммой показаны векторы тока, соответственно ориентированные по направлению относительно векторов напряжения на топографической диаграмме. При построении предположено, что как сопротивления проводов, так и сопротивления фаз-приемника носят индуктивный характер. Топографическая диаграмма дает наглядное представление о величине и фазе напряжения между любыми двумя точками цепи.

Если между проводами или между фазами приемника имеется взаимная индукция, она может быть учтена с помощью метода,

изложенного в § 5-16. Учет наличия взаимной индукции между проводами необходим в длинных линиях передачи или при очень больших токах даже в коротких проводах, подводящих ток к мощным приемникам, например к трехфазным электрическим печам. При несимметричном расположении проводов взаимная индуктивность между ними различна для разных пар проводов, что приводит к своеобразному явлению переноса мощности из одной фазы в другую. Учет наличия взаимной индукции между проводами трехфазной линии и рассмотрение связанных с ним явлений будет произведен в последней части курса при изложении метода расчета параметров трехфазной линии. Явление взаимной индукции между фазами трехфазной цепи должно быть учтено также при наличии в цепи трехфазных электрических машин или трехфазных трансформаторов, в которых взаимная индукция между фазными обмотками осуществляется через общую магнитную цепь. В случае электрических машин явление еще осложняется тем, что в машине имеется вращающаяся часть — ротор. Все эти вопросы будут рассмотрены в конце настоящей главы при изложении так называемого метода симметричных составляющих трехфазной системы.

7-3. Получение вращающегося магнитного поля

Большим достоинством многофазных, в частности, трехфазных систем является легкость получения вращающегося магнитного поля. Это дает возможность создания большого класса трехфазных электрических машин переменного тока — генераторов и двигателей. На рис. 7-8 схематически изображены статор и ротор трехфазной машины с одной парой полюсов на фазу. В пазах статора условно в виде одного витка в каждом пазу показаны обмотки первой, второй и третьей фаз. Место, занимаемое обмоткой первой фазы, отмечено римскими цифрами I и I' около фигурных скобок. Положительное направление тока i_1 в этой обмотке указано крестиками и точками. В таком случае положительное направление магнитной оси этой обмотки оказывается направленным по вертикали вверх, что отмечено стрелкой с цифрой I . Расположение обмоток второй и третьей фаз видно из рисунка. Магнитные оси обмоток смещены друг относительно друга на пространственный угол $2\pi/3$. На рисунке показана картина магнитного поля, созданного током i_1 первой обмотки. Магнитные линии замыкаются по пути, проходящему в теле ротора, в воздушном зазоре между ротором и статором и в статоре. Магнитное сопротивление определяется в основном воздушным зазором, так как путь потока в статоре и роторе расположен в ферромагнитном материале. В таком случае распределение магнитной индукции в воз-

душном зазоре вдоль окружности статора имеет вид, показанный на рис. 7-9.

На рис. 7-9 окружность вдоль воздушного зазора распрямлена. Положение точки A в зазоре, в которой мы ищем индукцию, определим углом α , отсчитываемым против часовой стрелки от магнитной оси первой обмотки. Распределение индукции носит ступенчатый характер вследствие наличия зубцов. Индукция практически остается постоянной вдоль всего полюса данной обмотки, поскольку для всех трубок магнитной индукции равного сечения в воздушном зазоре будет одно и то же магнитное сопротивление и одна и та же м. д. с. Индукция спадает вдоль каждого паза, поскольку здесь убывает м. д. с.

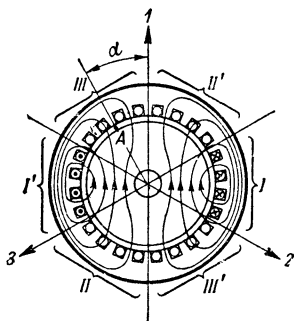


Рис. 7-8.

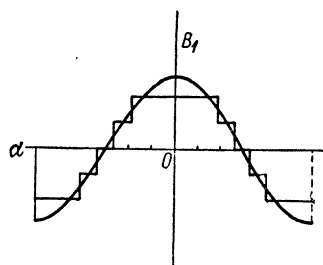


Рис. 7-9.

Так как индукция в воздушном зазоре $B(\alpha)$ является периодической функцией угла α , то ее можно разложить в ряд Фурье и выделить первую пространственную гармонику, которая также изображена на рис. 7-9. В дальнейшем будем интересоваться только этой первой гармоникой индукции. Пусть ток в первой обмотке меняется во времени по закону $i_1 = I_m \cos \omega t$. Поскольку мы пренебрегли магнитными сопротивлениями ферромагнитных частей машины, то магнитное сопротивление не зависит от тока, и поэтому магнитная индукция будет изменяться пропорционально току. На основании всего сказанного мы можем для магнитной индукции в зазоре в точке A в момент времени t написать выражение:

$$B_1 = B_m \cos \omega t \cos \alpha.$$

Пусть токи в обмотках образуют симметричную систему прямого следования, т. е. $i_2 = I_m \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$ и $i_3 = I_m \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3})$. Так как обмотки смещены в пространстве друг относительно друга на угол $2\pi/3$, то та же точка A смещена по отношению к оси второй

обмотки на угол $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ и по отношению к оси третьей обмотки на угол $\alpha + \frac{4\pi}{3}$. Поэтому составляющие индукции в той же точке A и тот же момент времени t , созданные токами i_2 и i_3 в других обмотках, будут:

$$B_2 = B_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$B_3 = B_m \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right).$$

В силу уже принятого допущения независимости магнитного сопротивления от намагничивающего тока мы можем воспользоваться принципом наложения и считать, что результирующая индукция в точке A в момент t есть сумма индукций, созданных токами в отдельных обмотках, т. е.

$$B = B_1 + B_2 + B_3.$$

Преобразуя произведение косинусов в полусуммы косинусов разности аргументов и косинусов суммы аргументов, получаем:

$$B = \frac{B_m}{2} \left[3 \cos(\omega t + \alpha) + \cos(\omega t - \alpha) + \cos\left(\omega t - \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \cos\left(\omega t - \alpha - \frac{8\pi}{3}\right) \right] = \frac{3}{2} B_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Пусть точка A перемещается в отрицательную сторону отсчета углов с угловой скоростью ω , т. е. $\alpha = -\omega t + \alpha_0$. В этой перемещающейся точке имеем:

$$B = \frac{3}{2} B_m \cos(\omega t + \alpha) = \frac{3}{2} B_m \cos \alpha_0 = \text{const.}$$

Так как в каждой неподвижной точке индукция меняется во времени, то полученный результат означает, что найденное значение индукции перемещается вместе с точкой A вдоль окружности зазора. Таким образом, результирующее магнитное поле вращается с постоянной угловой скоростью ω по часовой стрелке, причем вдоль окружности статора индукция распределена по косинусоидальному закону с амплитудой $\frac{3}{2} B_m$. Такое поле называют *круговым вращающимся полем*. Для изменения направления вращения поля необходимо изменить порядок следования фаз токов в обмотках статора.

В пазы ротора обычно укладывают обмотку, в которой вращающееся магнитное поле статора индуцирует токи, и взаимодействие токов ротора и статора создает вращающий момент.

Заметим, что магнитное поле, созданное током только в одной первой обмотке, называемое *пульсирующим*, можно условно рассматривать как два вращающихся в противоположные стороны с угловой скоростью ω , так как

$$B_1 = B_m \cos \omega t \cdot \cos \alpha = \frac{B_m}{2} \cos (\omega t + \alpha) + \frac{B_m}{2} \cos (\omega t - \alpha).$$

7-4. Разложение несимметричных трехфазных систем на симметричные составляющие

Любую несимметричную трехфазную систему э. д. с., напряжений или токов можно представить в виде суммы в общем случае трех симметричных трехфазных систем: нулевой, прямой и обратной последовательностей, которые называют *симметричными составляющими* данной *несимметричной трехфазной системы*.

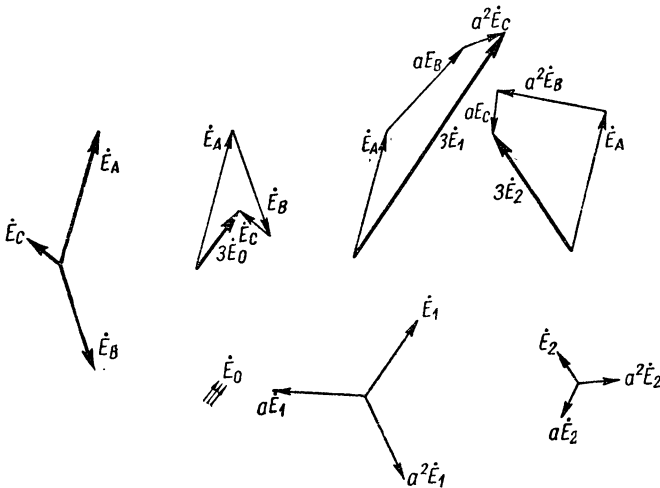


Рис. 7-10.

Рассмотрим, например, несимметричную трехфазную систему э. д. с. \dot{E}_A , \dot{E}_B и \dot{E}_C (рис. 7-10). Фазы будем обозначать буквами A , B и C , так как цифровые индексы 0, 1 и 2 теперь будут заняты для обозначения симметричных составляющих. Представим э. д. с. \dot{E}_A , \dot{E}_B и \dot{E}_C в каждой фазе в виде суммы трех слагаемых и подчиним эти слагаемые условиям, чтобы первые из них образовывали в трех фазах симметричную систему нулевой последовательности (\dot{E}_0 , \dot{E}_0 , \dot{E}_0), вторые — симметричную систему прямой

последовательности $(\dot{E}_1, a^2\dot{E}_1, a\dot{E}_1)$ и третьей — симметричную систему обратной последовательности $(\dot{E}_2, a\dot{E}_2, a^2\dot{E}_2)$.

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_A &= \dot{E}_0 + \dot{E}_1 + \dot{E}_2, \\ \dot{E}_B &= \dot{E}_0 + a^2\dot{E}_1 + a\dot{E}_2, \\ \dot{E}_C &= \dot{E}_0 + a\dot{E}_1 + a^2\dot{E}_2. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Через a мы обозначим, как и в § 7-1, комплексный множитель: $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, умножение на который комплексного числа соответствует увеличению аргумента этого комплексного числа на величину $2\pi/3$, т. е. увеличению начальной фазы соответствующей синусоидальной величины на угол $2\pi/3$.

Термин «симметричные составляющие» относят не только к симметричным системам $\dot{E}_0, \dot{E}_1, \dot{E}_2, a^2\dot{E}_1, a\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2, a\dot{E}_2, a^2\dot{E}_2$, но и к основным комплексам \dot{E}_0, \dot{E}_1 и \dot{E}_2 этих систем, на которые раскладывается э. д. с. \dot{E}_A в фазе A .

Из уравнений (*) легко выразить симметричные составляющие \dot{E}_0, \dot{E}_1 и \dot{E}_2 через заданные комплексные э. д. с. $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ несимметричной системы, если учесть, что $1 + a + a^2 = 0$, $a^3 = 1$ и $a^4 = a$.

Для получения \dot{E}_0 следует сложить равенства (*) и разделить полученную сумму на три.

Для получения \dot{E}_1 следует, оставив первое равенство (*) без изменения, умножить второе равенство на a и третье на a^2 , затем сложить полученные три равенства и разделить сумму на три.

Для получения \dot{E}_2 следует, оставив первое равенство (*) без изменения, умножить второе равенство на a^2 и третье на a , затем сложить полученные три равенства и разделить сумму на три.

Поступая таким образом, находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C), \\ \dot{E}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{E}_A + a\dot{E}_B + a^2\dot{E}_C), \\ \dot{E}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{E}_A + a^2\dot{E}_B + a\dot{E}_C). \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Формулы (**) служат для нахождения симметричных составляющих \dot{E}_0, \dot{E}_1 и \dot{E}_2 по известным э. д. с. \dot{E}_A, \dot{E}_B и \dot{E}_C несимметричной системы. Формулы же (*) позволяют найти несимметричную систему э. д. с. \dot{E}_A, \dot{E}_B и \dot{E}_C , если известны ее симметричные составляющие \dot{E}_0, \dot{E}_1 и \dot{E}_2 .

На рис. 7-10 показан метод графического построения векторов \bar{E}_0 , \bar{E}_1 и \bar{E}_2 симметричных составляющих по заданным векторам \bar{E}_A , \bar{E}_B и \bar{E}_C несимметричной системы. Для построения использованы формулы (**).

Аналогичные рассуждения можно провести и по отношению к несимметричным системам напряжений и токов.

Из первого равенства (**) и построения на рис. 7-10 видно, что нулевая составляющая отсутствует, если сумма рассматриваемых синусоидальных величин всех трех фаз равна нулю. Поэтому система линейных напряжений не содержит нулевой составляющей. Также не содержит нулевой составляющей система линейных токов при отсутствии нейтрального провода. При наличии нейтрального провода по нему протекает только утроенная нулевая составляющая несимметричной системы линейных токов.

7-5. О применении метода симметричных составляющих к расчету трехфазных цепей

Для расчета несимметричных режимов в линейных трехфазных цепях может быть использован метод симметричных составляющих, так как он сводит сложную задачу при наличии несимметрии э. д. с., токов и напряжений к нескольким более простым задачам расчета той же цепи при симметричных режимах. Особенно ценным этот метод становится, когда сопротивления цепи зависят от характера несимметрии токов, т. е. сопротивление цепи имеет разные значения для различных симметрических составляющих.

Наиболее важным случаем, когда это имеет место, является случай трехфазной электрической цепи, содержащей вращающиеся электрические машины — генераторы или двигатели. Обозначим через Z_0 , Z_1 и Z_2 комплексные эквивалентные сопротивления некоторого элемента цепи для нулевой, прямой и обратной составляющих.

Во вращающихся трехфазных машинах магнитное поле, создаваемое системой токов прямой последовательности, вращается в одном направлении с ротором, а поле, вызываемое системой токов обратной последовательности, вращается в противоположном направлении. Это приводит к тому, что для машины $Z_1 \neq Z_2$, так как реакция ротора на цепь статора оказывается для прямой и обратной последовательности различной. Токи нулевой последовательности не создают вращающегося поля, и пути потоков, вызванных этими токами, существенно отличаются от путей потоков, вызванных токами прямой и обратной последовательностей. Потоки, созданные токами нулевой последовательности, одновременно во всех трех фазах направлены к ротору или от него и вынуждены

замыкаться от ротора к статору по воздуху в торцевых частях машины. Поэтому сопротивление нулевой последовательности Z_0 машины существенно отличается от сопротивлений Z_1 и Z_2 . Таким образом, для симметрично, в конструктивном отношении, устроенной машины имеем:

$$Z_1 \neq Z_2 \neq Z_0.$$

Если пренебречь нелинейностью цепи, возникающей вследствие насыщения машины, то, пользуясь принципом наложения, расчет цепи можно вести методом симметричных составляющих. Расчет сопротивлений Z_1 , Z_2 и Z_0 по конструктивным параметрам машины не представляет особого труда, так как эти сопротивления определяются для симметричных режимов; в частности, величины Z_1 и Z_2 рассчитываются при круговом вращающемся магнитном поле. Расчет же сопротивлений фаз при действительных несимметричных токах в обмотках оказывается сложным, так как вращающееся поле при этом не является круговым и, кроме того, сами эти сопротивления сложным образом зависят от характера несимметрии токов.

Наиболее резкая несимметрия токов в цепях с вращающимися машинами наблюдается при коротких замыканиях в цепи. Поэтому метод симметричных составляющих получил наиболее широкое распространение при расчете токов короткого замыкания в электрических системах.

Отметим важное обстоятельство, что если электрическая цепь симметрична, т. е. отдельно для каждой симметричной составляющей сопротивления всех фаз одинаковы, то токи нулевой последовательности определяются только электродвижущими силами нулевой последовательности, токи прямой последовательности определяются только электродвижущими силами прямой последовательности и токи обратной последовательности определяются только электродвижущими силами обратной последовательности. Таким образом, в симметричных цепях расчет для каждой последовательности мы можем вести независимо.

Рассмотрим простой случай, когда симметричный генератор с обмотками, соединенными в звезду, имеет нейтральную точку, соединенную с землей через сопротивление Z_{00} , причем в последней включается и сопротивление протекания тока в земле. Система фазных э. д. с. генератора, в силу симметрии его устройства, содержит только одну симметричную составляющую прямой последовательности, т. е. $\dot{E}_0 = 0$, $\dot{E}_1 = \dot{E}$ и $\dot{E}_2 = 0$. Цепь, включая обмотки генератора, до места короткого замыкания симметрична и имеет эквивалентные сопротивления Z_0 , Z_1 и Z_2 для составляющих нулевой, прямой и обратной последовательности, причем, как было сказано, $Z_0 \neq Z_1 \neq Z_2$. У места короткого замыкания

(рис. 7-11) система фазных напряжений (\dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C) относительно земли, а также и система токов (\dot{I}_A , \dot{I}_B и \dot{I}_C) при коротком замыкании несимметричны. Разложив их на симметричные составляющие \dot{U}_0 , \dot{U}_1 , \dot{U}_2 и \dot{I}_0 , \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , можем написать:

$$0 = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{U}_0, \quad \dot{E}_1 = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{U}_1, \quad 0 = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{U}_2. \quad (*)$$

Эти уравнения и служат для расчета токов короткого замыкания при любом характере несимметричного короткого замыкания — одной фазы на землю, между двумя фазами, или двух фаз на землю.

Составляя эти уравнения, мы пользуемся отмеченным выше свойством независимости симметричных составляющих в симметричной трехфазной цепи. До места короткого замыкания, как было оговорено, цепь вполне симметрична. Короткое замыкание на землю только одной или только двух фаз нарушает симметрию цепи.

Однако в уравнения явно введены, помимо э. д. с. генератора, также напряжения \dot{U}_0 , \dot{U}_1 и \dot{U}_2 или, что то же, однозначно через них определяемые напряжения \dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C . Мы получили бы тот же самый режим, если бы предположили, что у места короткого замыкания провода присоединены к зажимам еще одного соединенного в звезду генератора с заземленной нейтралью, имеющего

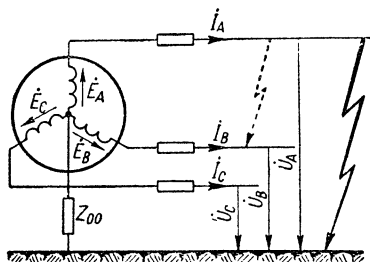


Рис. 7-11.

во всех фазах равное нулю сопротивление и э. д. с. $\dot{E}_A = -\dot{U}_A$, $\dot{E}_B = -\dot{U}_B$ и $\dot{E}_C = -\dot{U}_C$, т. е. э. д. с., обеспечивающие систему напряжений \dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C . При таком рассмотрении вся цепь получается симметричной. Однако в трех уравнениях содержатся шесть неизвестных \dot{I}_0 , \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{U}_0 , \dot{U}_1 и \dot{U}_2 или, что то же, однозначно через них определяемых шесть неизвестных \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C , \dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C . Таким образом, вообще говоря, этих уравнений недостаточно. Если же при заданных \dot{E} , Z_0 , Z_1 , Z_2 по условиям задачи из шести величин \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C , \dot{U}_A , \dot{U}_B , \dot{U}_C известны три величины или три независимых уравнения, связывающих их, то можно вычислить все величины, характеризующие данный режим работы генератора и приемника.

Рассмотрим случай однофазного замыкания фазы *A* на землю (зигзагообразная стрелка на рис. 7-11).

Пренебрегая токами нормальной нагрузки по сравнению с токами короткого замыкания, имеем:

$$\dot{U}_A = 0, \quad \dot{I}_B = 0, \quad \dot{I}_C = 0$$

и так как $\dot{U}_A = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0$, то, суммируя уравнения (*), получим:

$$\dot{E} = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2,$$

откуда, приняв во внимание, что при $\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0$ симметричные составляющие системы токов будут $\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{1}{3} \dot{I}_A$, найдем:

$$\dot{E} = \frac{1}{3} \dot{I}_A (Z_0 + Z_1 + Z_2)$$

и

$$\dot{I}_A = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2}.$$

Для симметричных составляющих системы напряжений в месте короткого замыкания из уравнений (*) находим:

$$\dot{U}_0 = -\frac{\dot{I}_A Z_0}{3} = -\frac{\dot{E} Z_0}{Z_0 + Z_1 + Z_2},$$

$$\dot{U}_1 = \dot{E} - \frac{\dot{I}_A Z_1}{3} = \frac{\dot{E} (Z_0 + Z_2)}{Z_0 + Z_1 + Z_2},$$

$$\dot{U}_2 = -\frac{\dot{I}_A Z_2}{3} = -\frac{\dot{E} Z_2}{Z_0 + Z_1 + Z_2},$$

после чего легко определяются \dot{U}_B и \dot{U}_C .

На первый взгляд кажется, что эта задача решается гораздо проще прямым применением закона Ома к контуру, по которому проходит ток \dot{I}_A . Этот контур образован участком между землей и нейтралью генератора, фазой A генератора, проводом в этой фазе до места короткого замыкания и землей. Если бы сопротивление фазы генератора и провода было одинаковым для всех трех составляющих трехфазной системы и равным Z , то ток \dot{I}_A вычислялся бы элементарно:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}}{Z_{00} + Z}.$$

Это соотношение вытекает при таком условии и из полученного выше выражения. Действительно, при этом было бы:

$$Z_0 = 3Z_{00} + Z, \quad Z_1 = Z, \quad Z_2 = Z.$$

Первое из этих трех равенств следует из того, что через участок Z_{00} проходят все три тока нулевой последовательности, протекающих по всем трем фазам. Следовательно, этот участок можно заменить тремя ветвями, соединенными параллельно и имеющими каждая сопротивление $3Z_{00}$, но по каждой из которых протекает

только ток i_0 . Подставив эти выражения для Z_0 , Z_1 и Z_2 в выражение для i_A , находим:

$$i_A = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2} = \frac{3\dot{E}}{3Z_0 + Z + Z + Z} = \frac{\dot{E}}{Z_0 + Z},$$

т. е. то же выражение, что и непосредственно из закона Ома. Однако это получается только в предположении, что сопротивления фаз генератора одинаковы для составляющих любой последовательности. В действительности наличие вращающегося ротора и взаимной индукции между фазами приводит к тому, что сопротивления генератора для систем прямой, обратной и нулевой последовательностей различны. Если они известны, то формула:

$$i_A = \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2}$$

дает возможность произвести расчет тока i_A и всех остальных величин. Формула же $i_A = \frac{\dot{E}}{Z_0 + Z}$ не дает такой возможности, так как в ней неопределенным является сопротивление Z , на величину которого влияет вращающийся ротор.

Таким образом, уже на этом простом примере мы видим достоинство метода симметричных составляющих для расчета трехфазных цепей, содержащих вращающиеся машины.





РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ Э. Д. С., НАПРЯЖЕНИЯХ И ТОКАХ

8-1. Метод расчета мгновенных значений установившихся напряжений и токов в линейных электрических цепях при действии периодических несинусоидальных э. д. с.

В предыдущих главах рассматривались синусоидальные э. д. с., напряжения и токи. Однако в действительности во многих случаях при установившемся процессе кривые периодических э. д. с., токов и напряжений в той или иной мере отличаются от синусоиды. Периодические э. д. с., напряжения и токи можно представить в виде рядов Фурье, которые в общем случае содержат постоянную составляющую, основную или первую гармонику, имеющую период, равный периоду самой функции, и высшие гармоники, частота которых в целое число раз больше частоты первой гармоники. Например, для периодической э. д. с. можем написать:

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots$$

Здесь E_0 — постоянная составляющая э. д. с., $E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ — основная или первая гармоника, $E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ — высшая гармоника порядка k (k -я гармоника), E_{km} — амплитуда и ψ_k — начальная фаза k -й гармоники.

Заметим, что разложение в ряд Фурье возможно для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле, т. е. имеющих за полный период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Этим условиям всегда удовлетворяют э. д. с., напряжения и токи в реальных физических цепях.

В общем случае ряд Фурье содержит бесконечное число членов, но, как правило, обычно можно ограничиться некоторым конечным числом членов ряда.

Для вычисления коэффициентов ряда Фурье целесообразно его члены представить через синусы и косинусы без начальных фаз. Имеем:

$$E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = E_{km} \cos \psi_k \sin k\omega t + E_{km} \sin \psi_k \cos k\omega t = \\ = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t.$$

Таким образом:

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t.$$

Постоянная составляющая E_0 и коэффициенты B_k и C_k , как известно из курса математики, определяются с помощью формул:

$$E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin k\omega t dt, \\ C_k = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cos k\omega t dt.$$

Имея B_k и C_k , нетрудно вычислить амплитуду и начальную фазу k -й гармоники:

$$E_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \quad \text{и} \quad \text{tg } \psi_k = \frac{C_k}{B_k}.$$

Аналогично можно разложить в ряд Фурье несинусоидальные токи и напряжения.

Приведенные формулы для постоянной составляющей и коэффициентов B_k и C_k позволяют найти эти величины, когда функция задана аналитически. Нередко мы располагаем кривыми э. д. с., тока или напряжения, заданными в виде графиков. В этом случае постоянную составляющую можно определить как среднюю за период ординату кривой, а для вычисления коэффициентов B_k и C_k существует ряд приближенных методов. Например, можно воспользоваться приближенными формулами:

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt \approx \frac{2}{p} \sum_{n=1}^p f\left(n \frac{\omega T}{p}\right) \sin\left(kn \frac{\omega T}{p}\right), \\ C_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt \approx \frac{2}{p} \sum_{n=1}^p f\left(n \frac{\omega T}{p}\right) \cos\left(kn \frac{\omega T}{p}\right).$$

Для вычисления делим период T на p равных интервалов и в p точках деления определяем ординаты $f\left(n\frac{\omega T}{p}\right)$ заданной графически кривой, полагая $n = 1, 2, 3, \dots, p$.

Существуют также приборы, именуемые гармоническими анализаторами, позволяющие определить коэффициенты B_k и C_k или механически по заданному графику кривой $f(t)$, или электрически путем подачи на зажимы прибора исследуемого несинусоидального напряжения.

Причиной появления высших гармоник в кривых тока в линейных цепях является наличие высших гармоник в кривых э. д. с. и напряжений устройств, питающих эти цепи. Характерным примером может служить питание цепи от выпрямителя, в напряжении на выходе которого, наряду с постоянной составляющей, содержится переменная периодическая составляющая. Но и обычные генераторы переменного тока, хотя и конструируются так, чтобы э. д. с. в их обмотках были возможно близкими к синусоидальным, все же вследствие некоторых конструктивных особенностей, например наличия зубцов, имеют э. д. с., содержащие в некоторой мере высшие гармоники.

Высшие гармоники в кривых тока могут возникать также вследствие того, что параметры самой цепи изменяются в течение периода. Если это изменение параметров происходит по заданной периодической функции времени и не зависит от тока, то цепь остается линейной. Если же изменение параметров возникает вследствие их зависимости от тока, то цепь является нелинейной. Этот последний случай будет рассмотрен в третьей части, посвященной нелинейным цепям.

В случае линейных цепей применим принцип наложения. Основываясь на нем, можно предложить следующий метод расчета мгновенных значений токов в этих цепях при действии в них периодических несинусоидальных э. д. с. или напряжений.

Раскладываем заданные периодические несинусоидальные э. д. с. или напряжения в ряд Фурье:

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_k + \dots,$$

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

Находим как функции времени мгновенные значения токов $i_0, i_1, i_2, i_3, \dots, i_k, \dots$, возникающих в некоторой ветви цепи под действием в отдельности каждой составляющей э. д. с. $e_0, e_1, e_2, e_3, \dots, e_k, \dots$ или напряжения $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, \dots$.

Суммируя найденные таким путем мгновенные значения токов, получаем искомый ток в рассматриваемой ветви в цепи в виде

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots$$

Так как каждая составляющая является либо постоянной величиной, либо синусоидальной функцией времени, то для расчета каждой из них в отдельности могут быть применены все методы, изложенные в предыдущих главах. Весьма целесообразно для расчета каждой синусоидальной составляющей в отдельности воспользоваться комплексным методом. Однако суммировать полученные комплексы токов для отдельных гармоник нельзя, так как они имеют разные частоты. Суммировать можно лишь мгновенные значения, выраженные как функции времени.

Пользуясь этим методом, определим ток i в простейшей неразветвленной цепи с постоянными параметрами r , L , C при установившемся режиме в случае, когда напряжение u на зажимах цепи является периодической несинусоидальной функцией времени. Представим напряжение u в виде ряда:

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots,$$

где u_0 — постоянная составляющая, а $u_k = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk})$ — k -я гармоника напряжения.

Постоянная составляющая тока в этой цепи равна нулю, т. е. $i_0 = 0$, так как конденсатор постоянного тока не проводит. Мгновенное значение k -й гармоники тока имеет вид

$$i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk} - \varphi_k),$$

причем для рассматриваемой цепи

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} \quad \text{и} \quad \varphi_k = \arctg \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{r}.$$

Искомый ток определяется суммой:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots$$

Следует обратить внимание на то, что реактивное сопротивление $x_k = k\omega L - \frac{1}{k\omega C}$, а следовательно, и полное сопротивление $z_k = \sqrt{r^2 + x_k^2}$, и угол сдвига $\varphi_k = \arctg \frac{x_k}{r}$ зависят от порядка гармоники. Поэтому форма кривой тока i не будет подобна форме кривой приложенного напряжения u .

В качестве примера разветвленной цепи рассмотрим цепь, изображенную на рис. 8-1. Определим ток i на входе цепи.

Постоянная составляющая тока определяется в этом случае из соотношения

$$i_0 = \frac{u_0}{r_1 + r_2},$$

где u_0 — постоянная составляющая приложенного напряжения u .

Для вычисления гармонических составляющих тока воспользуемся комплексным методом. С этой целью представим в комплексной форме k -ю гармонику $u_k = U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk})$ приложенного к зажимам цепи напряжения u . Имеем комплексную амплитуду k -й гармоники в виде

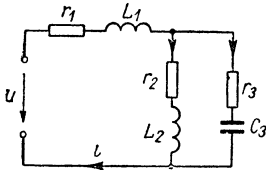


Рис. 8-1.

$$\dot{U}_{km} = U_{km} e^{j\psi_{uk}}.$$

Найдем комплексное сопротивление всей цепи для k -й гармоники. Условимся первым индексом у сопротивления обозначать порядок гармоники, а вторым индексом, после запятой, — номер ветви, для которой записывается то или иное сопротивление. Для рассматриваемой цепи сопротивление Z_k всей цепи имеет вид

$$Z_k = Z_{k,1} + \frac{Z_{k,2} Z_{k,3}}{Z_{k,2} + Z_{k,3}},$$

где в соответствии со схемой рис. 8-1

$$Z_{k,1} = r_1 + jk\omega L_1, \quad Z_{k,2} = r_2 + jk\omega L_2, \\ Z_{k,3} = r_3 - j \frac{1}{k\omega C_3}.$$

Комплексная амплитуда k -й гармоники искомого тока вычисляется в виде

$$I_{km} = \frac{\dot{U}_{km}}{Z_k} = \frac{U_{km} e^{j\psi_{uk}}}{z_k e^{j\varphi_k}} = \frac{U_{km}}{z_k} e^{j(\psi_{uk} - \varphi_k)} = I_{km} e^{j\psi_{ik}}.$$

Теперь не представляет труда написать выражение для мгновенного значения k -й гармоники тока: $i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik})$.

Придавая индексу k все значения, соответствующие основной ($k = 1$) и высшим ($k = 2, 3, \dots$) гармоникам, имеющимся в кривой напряжения, получим все соответствующие им гармонические составляющие тока. Весь искомым ток найдется в виде суммы:

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots$$

8-2. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении

Сопротивление электрической цепи, содержащей индуктивные катушки и конденсаторы, зависит от частоты, и, следовательно, оно оказывается различным для разных гармоник. Поэтому если к зажимам такой цепи приложено периодическое несинусоидаль-

ное напряжение, то кривая тока в цепи отличается по форме от кривой напряжения.

Кривая тока i подобна кривой напряжения u только в случае, если цепь обладает одним активным сопротивлением r , одинаковым для всех частот. В таком случае для всех гармоник $I_{km} = U_{km} : r$ и, следовательно, $I_{km} : I_{1m} = U_{km} : U_{1m}$, т. е. кривые тока и напряжения подобны друг другу.

Соблюдение такого условия необходимо в цепях вольтметров, в параллельных цепях ваттметров и особенно в цепях вибраторов осциллографов, предназначенных для записи кривых напряжения. В точности достичь этого условия невозможно, так как принципиально всякая цепь обладает индуктивностью и емкостью. Однако, применяя специальные способы намотки добавочных сопротивлений, в таких цепях удастся существенно снизить их индуктивность и емкость и приблизиться к требуемым условиям. Кроме того, если сечение проволоки намотки мало, то можно при не очень высоких частотах пренебречь явлением поверхностного эффекта и считать, что активное сопротивление одинаково для всех гармоник не слишком высокого порядка.

Рассмотрим отдельно катушку с индуктивностью L и $r = 0$. Ее сопротивление при частоте $k\omega$ k -й гармоники равно $z_k = k\omega L$, т. е. растет с возрастанием порядка гармоники. Соответственно

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{k\omega L} \quad \text{и} \quad \frac{I_{km}}{I_{1m}} = \frac{1}{k} \frac{U_{km}}{U_{1m}}.$$

Таким образом, содержание высших гармоник, выраженных в долях первой гармоники, в кривой тока меньше, чем в кривой напряжения. Говорят, что катушка сглаживает кривую тока. Этим пользуются, например, для сглаживания кривой тока после выпрямителей, включая в цепь между выпрямителем и приемником индуктивную катушку. Напряжение на выходе выпрямителя обычно содержит, кроме постоянной составляющей, еще ряд гармонических составляющих. Катушка не оказывает сопротивления постоянной составляющей тока, но ее сопротивление высшим гармоникам тока тем больше, чем выше порядок гармоники.

Рассмотрим теперь конденсатор без потерь. Его сопротивление $z_k = \frac{1}{k\omega C}$ убывает с ростом порядка гармоники. Имеем:

$$I_{km} = k\omega C U_{km} \quad \text{и} \quad \frac{I_{km}}{I_{1m}} = k \frac{U_{km}}{U_{1m}},$$

т. е. в конденсаторе содержание гармоник, выраженных в долях первой гармоники, в кривой тока больше, чем в кривой напряжения. Говорят, что конденсатор искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения.

В случае сложной цепи, содержащей участки с активным сопротивлением, катушки и конденсаторы, на форму кривой тока будет влиять конфигурация цепи.

Если, например, в цепи для гармоника порядка $k = q$ имеет место резонанс напряжений, то сопротивление цепи для этой гармоника минимально и, соответственно, эта гармоника в кривой тока будет выделяться. Простейшей такой цепью является цепь из последовательно включенных катушки L и конденсатора C . Этим можно воспользоваться, чтобы обеспечить преимущественное прохождение гармоника порядка q от источника несинусоидального напряжения u к приемнику, включив на пути между ними последовательно соединенные катушку и конденсатор (рис. 8-2) и подобрав L и C так, чтобы соблюдалось условие $q\omega L = \frac{1}{q\omega C}$.

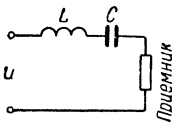


Рис. 8-2.

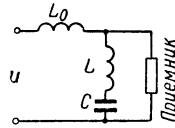


Рис. 8-3.

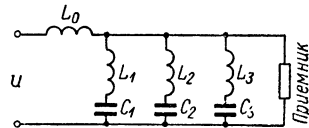


Рис. 8-4.

Если ветвь из последовательно соединенных катушки L и конденсатора C , настроенную в резонанс при частоте $q\omega$, включить параллельно приемнику, причем до этой ветви еще включить индуктивную катушку L_0 (рис. 8-3), то гармоника тока порядка q не пройдет в приемник, так как для этой частоты приемник будет зашунтирован ветвью L, C , имеющей при резонансе весьма малое активное сопротивление. Гармоника порядка q , содержащаяся в напряжении u , вся придется на зажимы катушки L_0 . Остальные гармоники тока, встречая значительное сопротивление ветви L, C , проходят в приемник. Если напряжение u содержит постоянную составляющую, то вызываемая ею постоянная составляющая пройдет целиком в приемник, так как сопротивление ветви L, C для нее бесконечно, а индуктивное сопротивление катушки L_0 равно нулю. Такой метод широко используется на выпрямительных подстанциях, питающих контактную сеть электрических железных дорог. Напряжение после выпрямителя содержит, кроме постоянной составляющей, также ряд гармоник. После выпрямителя и катушки L_0 включают ветви L, C по схеме, изображенной на рис. 8-4, настраивая эти ветви в резонанс на частоты гармоник, которые хотят не допустить в контактную сеть.

Если в цепи для гармоника порядка q имеет место резонанс токов, то сопротивление цепи для этой гармоника максимально, и, соответственно, эта гармоника в кривой тока будет ослаблена. Простейшей такой цепью является цепь из параллельно соединен-

ных катушки L и конденсатора C . Этим можно воспользоваться, чтобы затруднить прохождение гармоники порядка q от источника несинусоидального напряжения u к приемнику, включив на пути между ними контур из параллельно соединенных катушки и конденсатора (рис. 8-5) и подобрав L и C так, чтобы соблюдалось условие $q\omega C = \frac{1}{q\omega L}$.

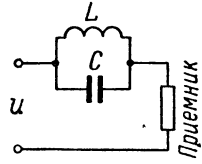


Рис. 8-5.

Электрические цепи, предназначенные для преимущественного пропуска или задержания токов определенных частот, носят название электрических фильтров. Здесь были приведены примеры простейших фильтров, пропускающих или задерживающих токи определенных дискретных частот. В дальнейшем мы рассмотрим фильтры, пропускающие или задерживающие токи в определенном диапазоне частот.

8-3. Действующие значения периодических несинусоидальных токов, напряжений и э. д. с.

Действующее значение периодического тока мы определили в § 4-2 в общем виде как его среднее квадратичное значение за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Раскладывая $i(t)$ в ряд Фурье, имеем:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots)^2 dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt + \sum_{\substack{q=0 \\ s=0}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_q i_s dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots, \end{aligned}$$

так как при $q \neq s$

$$\begin{aligned} \int_0^T i_q i_s dt &= \int_0^T I_{qm} I_{sm} \sin(q\omega t + \psi_q) \sin(s\omega t + \psi_s) dt = \\ &= \frac{1}{2} I_{qm} I_{sm} \left\{ \int_0^T \cos[(q-s)\omega t + \psi_q - \psi_s] dt - \right. \\ &\quad \left. - \cos[(q+s)\omega t + \psi_q + \psi_s] dt \right\} = 0. \end{aligned}$$

Действительно, при $q \neq s$ мы получаем здесь интегралы от синусоидальных функций за целое число $(q-s)$ и $(q+s)$ периодов. Такие интегралы равны нулю.

Итак, имеем:

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots},$$

т. е. действующее значение периодического несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений всех гармоник.

Аналогично находим для периодических несинусоидальных напряжений и э. д. с.:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} U_k^2} \quad \text{и} \quad E = \sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} E_k^2}.$$

8-4. Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях

Сохраняя общее определение для активной мощности как ее среднее значение за период (§ 4-6), имеем:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots) (i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt + \sum_{\substack{q=0 \\ s=0}}^{q=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_q i_s dt = \\ &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} P_k, \end{aligned}$$

так как по тем же соображениям, что и в предыдущем параграфе,

$$\int_0^T u_q i_s dt = 0 \text{ при } q \neq s.$$

Таким образом,

$$P = \sum_{k=0}^{k=\infty} P_k = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots = \\ = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots,$$

т. е. активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях равна сумме активных мощностей постоянных и всех гармонических составляющих тока и напряжения.

Во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что принцип наложения для квадратичных величин несправедлив, и для мгновенных значений токов, напряжений и мощности мы имеем $i^2 \neq \sum i_k^2$, $u^2 \neq \sum u_k^2$ и $p = ui \neq \sum p_k$, так как мгновенные значения произведений $i_q i_s$, $u_q u_s$ и $u_q i_s$ при $q \neq s$ не равны нулю. Однако интегралы от этих произведений за целый период T обращаются в нуль, что является свойством ортогональности функций, входящих сомножителями в эти произведения.

При периодических несинусоидальных токах и напряжениях, как и при синусоидальных, вводят понятие о коэффициенте мощности, обозначая его при этом через α , из соотношения

$$P = UI\alpha,$$

т. е.

$$\alpha = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_{k=0}^{k=\infty} P_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{k=\infty} I_k^2}}.$$

Величина α равна единице только если цепь обладает одним активным сопротивлением, не зависящим от частоты и от тока. Во всех остальных случаях $\alpha < 1$.

В частном случае, когда напряжение и ток изменяются по синусоидальному закону, т. е. когда отсутствуют постоянные, составляющие и высшие гармоники, коэффициент мощности, как было получено в § 4-6, равен косинусу разности фаз φ синусоидальных напряжения и тока ($\alpha = \cos \varphi$).

Можно показать, что появление высших гармоник в кривых напряжения и тока приводит к снижению коэффициента мощности по сравнению со случаем, когда ток и напряжение при тех же

действующих значениях синусоидальны. Следовательно, уже хотя бы в этом отношении появление высших гармоник нежелательно. Поэтому стремятся конструировать генераторы переменного тока так, чтобы кривая э. д. с. в них была по возможности близка к синусоиде. Наличие высших гармоник может быть причиной и ряда других нежелательных явлений. Оно приводит к возможности резонанса для одной из высших гармоник и, соответственно, к появлению перенапряжений на отдельных участках цепи, к нежелательному влиянию гармоник звуковой частоты на радио и на телефонную связь, к возникновению в трехфазных двигателях магнитных полей, вращающихся против направления вращения ротора (например, при $k = 5, 11, \dots$) и, следовательно, вызывающих торможение ротора и добавочные потери в двигателях.

Однако отсюда не следует, что во всех без исключения устройствах всегда необходимо стремиться к получению синусоидальных токов и напряжений. Это безусловно относится к мощным электроэнергетическим устройствам. Однако в маломощных устройствах автоматического управления и регулирования, а также в ряде специальных радиотехнических, электроизмерительных и различных электронных устройств оказывается как раз необходимым получить формы кривых напряжения и тока, отличающиеся от синусоидальных, т. е. содержащие высшие гармоники. Некоторые из таких устройств будут рассмотрены в главах о нелинейных электрических цепях.

8-5. Особенности поведения высших гармоник в трехфазных цепях

Предположим, что фазные э. д. с. симметрично устроенного трехфазного генератора содержат высшие гармоники. Кривые э. д. с. во всех фазах по форме одинаковы и сдвинуты в каждой последующей фазе относительно предыдущей на угол $2\pi/3$, где 2π — период всей кривой э. д. с., равный периоду первой гармоники. Так как период k -й гармоники в k раз меньше периода первой гармоники, то угол сдвига k -й гармоники в последующей фазе по отношению к предыдущей фазе равен $k \frac{2\pi}{3}$. Таким образом, все гармоники, порядок которых кратен числу фаз, т. е. кратен трем ($k = 3, 6, 9, 12, 15, \dots$), сдвинуты друг относительно друга на угол, равный 2π , умноженный на целое число, т. е. эти гармоники находятся в фазе друг с другом и образуют симметричные системы нулевой последовательности.

Гармоники, для которых $k - 1$ делится на три ($k = 4, 7, 10, 13, \dots$), образуют, как нетрудно убедиться, симметричные системы прямой последовательности.

Гармоники, для которых $k + 1$ делится на три ($k = 2, 5, 8, 11, \dots$), образуют симметричные системы обратной последовательности.

Из этих свойств вытекает ряд особенностей поведения высших гармоник в трехфазных цепях.

Предположим, что обмотки генератора соединены треугольником. Сумма первых гармоник фазных э. д. с. в контуре треугольника равна нулю. Это имеет место также для всех высших гармоник, порядок которых не кратен трем. Гармоники же, порядок которых кратен трем, совпадают по фазе во всех фазных обмотках, и их сумма не равна нулю. Эта суммарная э. д. с. вызывает в контуре треугольника ток даже при отсутствии нагрузки генератора. Падения напряжения в обмотках вследствие протекания этого тока компенсируют вызывающие ток э. д. с. Поэтому напряжения на зажимах обмотки не содержат гармоник, порядок которых кратен трем.

То же самое имеет место при соединении обмоток трансформатора треугольником, если фазные э. д. с. в обмотках трансформатора симметричны. Обычно, используя это свойство, стремятся соединить либо обмотку генератора, либо одну из обмоток трансформатора в треугольник с целью погасить гармоники, имеющие порядок кратный трем, внутри этой обмотки и не дать им выхода в остальную цепь. В э. д. с. симметрично устроенного генератора отсутствуют четные гармоники, так как кривые, симметричные относительно оси абсцисс, не содержат четных гармоник, что будет показано в следующем параграфе. Поэтому при наличии соединения треугольником на выходных зажимах, кроме первых, могут быть высшие гармоники порядков $k = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, \dots$

Если обмотки генератора или трансформатора соединены звездой, то при симметрии фазных э. д. с. в линейных напряжениях также отсутствуют гармоники, порядок которых кратен трем, хотя в фазных напряжениях эти гармоники содержатся. Это является следствием того, что линейные напряжения равны разностям фазных напряжений. Поэтому отношение действующих значений линейного и фазного напряжений в этом случае меньше $\sqrt{3}$. Покажем это. Обозначим через U_1, U_2, U_3, \dots действующие значения гармоник фазного напряжения. Имея в виду, что линейные напряжения для гармоник, порядок которых не кратен трем, в $\sqrt{3}$ больше фазных, получаем:

$$\frac{U_{\text{л}}}{U_{\text{ф}}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + 0 + U_5^2 + U_7^2 + 0 + U_{11}^2 + \dots}}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 + \dots}} < \sqrt{3}.$$

При отсутствии нейтрального провода в линейных токах и в приемнике нет гармоник с порядком кратным трем, так как этих гармоник нет в линейных напряжениях. Соответственно, нет этих

гармоник и в фазных напряжениях приемника, даже если он соединен звездой. В последнем случае между нейтральными точками генератора и приемника появляется напряжение тройной частоты, которое может достигать опасных для жизни значений. При наличии нейтрального провода по нему и, соответственно, по линейным проводам замкнутся токи тройной частоты.

Все эти нежелательные явления исчезают, если гармоники с порядком кратным трем погашены в одной из обмоток генератора или трансформатора, соединенных треугольником. Иногда в трансформаторе для этой цели создают не имеющую выводов специальную обмотку, соединенную в треугольник.

При рассмотрении вопроса о получении вращающегося поля в трехфазном двигателе мы ограничились учетом первых гармоник токов в обмотках. Гармоники, для которых число $(k - 1)$ делится на три, имеют ту же последовательность, что и первая гармоника. Они создают поле, вращающееся в том же направлении, что и поле основной волны, но с большей скоростью. Гармоники, для которых число $(k + 1)$ делится на три, создают поля, вращающиеся в обратном направлении.

8-6. О составе высших гармоник при наличии симметрии форм кривых тока или напряжения

При наличии того или иного вида симметрии в кривых тока или напряжения некоторые коэффициенты в разложении в ряд Фурье обращаются в нуль.

Важным случаем является симметрия кривых относительно оси абсцисс (рис. 8-6), при которой выполняется условие

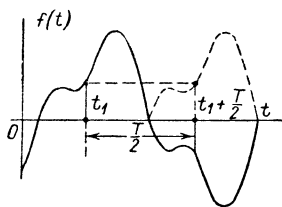


Рис. 8-6.

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right),$$

т. е. отрицательная полуволна является зеркальным изображением сдвинутой на половину периода положительной полуволны.

В случае кривой, симметричной относительно оси абсцисс, ряд Фурье не содержит постоянной составляющей и четных гармоник, так как для них не удовлетворяется вышеприведенное условие симметрии. Действительно, сдвигу функций, а следовательно, и первой гармоники, на $T/2$ соответствует сдвиг четных гармоник на целое число полных периодов, и значения этих гармоник не меняют своего знака. Таким образом, любая симметричная относительно оси абсцисс кривая содержит только нечетные гармоники.

Это положение имеет исключительно большое значение. Основываясь на нем, можно утверждать, что при симметричном устройстве вращающихся генераторов э. д. с. в их обмотках не содержат четных гармоник, а также если условия прохождения тока по цепи одинаковы в обоих направлениях, то при симметричной э. д. с. и ток не будет содержать четных гармоник. В линейных электрических цепях с постоянными параметрами условия прохождения тока в обоих направлениях всегда одинаковы. Эти условия могут быть не одинаковы в цепях с изменяющимися параметрами, например, в нелинейных цепях с выпрямителями. В последнем случае появляются постоянная составляющая и четные гармоники в кривой тока.

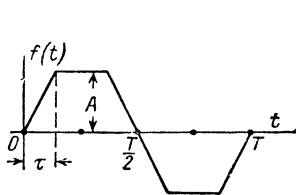


Рис. 8-7.

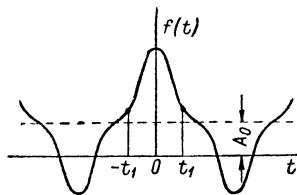


Рис. 8-8.

Примером симметричной относительно оси абсцисс кривой является кривая трапецеидальной формы, приведенная на рис. 8-7. Разложение ее в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{2A}{\pi^2} \frac{T}{\tau} (\sin \omega\tau \sin \omega t + \frac{1}{3^2} \sin 3\omega\tau \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega\tau \sin 5\omega t + \dots)$$

что легко получается, если воспользоваться вышеприведенными формулами для B_k и C_k . При $\tau = \frac{T}{4}$ получаем равнобедренный треугольник, и разложение принимает вид

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \dots \right).$$

При $\tau = 0$ получаем прямоугольную кривую, для которой

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

Из этих разложений видно, что в них отсутствуют постоянные составляющие и четные гармоники.

Может иметь место симметрия кривых другого характера. На рис. 8-8 изображена кривая, симметричная относительно оси

ординат. Ею изображаемая функция удовлетворяет условию $f(t) = -f(-t)$. Нетрудно убедиться, что при этом

$$B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_k = \dots = 0$$

и разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t + \dots$$

Если кривая симметрична относительно начала координат (рис. 8-9), то $f(t) = -f(-t)$. В этом случае

$$A_0 = C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_k = \dots = 0$$

и ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + \dots$$

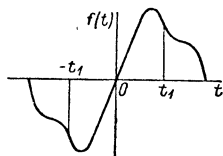


Рис. 8-9.

Подчеркнем, что условие симметрии относительно оси абсцисс не зависит от выбора начала отсчета времени, т. е. является свойством самих кривых, тогда как рассмотренные остальные виды симметрии связаны с выбором начала отсчета времени.

8-7. Представление ряда Фурье в комплексной форме

В ряде случаев целесообразно представить ряд Фурье в комплексной форме. Это особенно будет полезно при рассмотрении в одиннадцатой главе частотного метода анализа процессов в электрических цепях. Выше ряд Фурье был представлен в виде

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t).$$

В выражениях для A_0 , B_k и C_k нам будет удобнее взять пределы интегрирования не от 0 до T , а от $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$. Будем иметь:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt,$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt,$$

причем $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — угловая частота первой гармоники.

Пользуясь выражениями:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} j (-e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \text{ и } \cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}),$$

можем написать:

$$B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t = \frac{1}{2} [(C_k - jB_k) e^{jk\omega t} + (C_k + jB_k) e^{-jk\omega t}].$$

Из формул для B_k и C_k имеем:

$$C_k - jB_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega t} dt,$$

$$C_k + jB_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{jk\omega t} dt.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega t} dt + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{T} e^{-jk\omega t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{jk\omega t} dt =$$

$$= \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{T} e^{jq\omega t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega t} dt + \sum_{q=-\infty}^{q=-1} \frac{1}{T} e^{jq\omega t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega t} dt.$$

Здесь произведена замена в первой сумме k на q , а во второй сумме k на $(-q)$ с целью получить одинаковые выражения под знаками обеих сумм. Естественно, чтобы вторая сумма при этом не изменилась, суммирование в ней необходимо произвести по значениям q от $-\infty$ до -1 , что соответствует суммированию по значениям k от $+1$ до $+\infty$.

Учитывая, что

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt = \left[\frac{1}{T} e^{jq\omega t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega t} dt \right]_{q=0},$$

можем представить $f(t)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega t} F(jq\omega), \\ F(jq\omega) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega t} dt. \end{aligned} \right\} (*)$$

Полученное выражение для $f(t)$ представляет собой ряд Фурье в комплексной форме. В этом выражении каждой k -й гармонике отвечает сумма двух сопряженных членов (при $q = +k$ и при $q = -k$), равная удвоенной вещественной части каждого из этих членов:

$$\frac{1}{T} e^{jk\omega t} F(jk\omega) + \frac{1}{T} e^{-jk\omega t} F(-jk\omega) = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{T} F(jk\omega) e^{jk\omega t} \right].$$

Обозначив $F(jk\omega) = F(k\omega) e^{j\alpha_k}$, имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{2}{T} F(jk\omega) e^{jk\omega t} \right] &= \frac{2}{T} F(k\omega) \cos(k\omega t + \alpha_k) = \\ &= \frac{2}{T} F(k\omega) \sin(k\omega t + \psi_k), \end{aligned}$$

где

$$\psi_k = \frac{\pi}{2} + \alpha_k.$$

Таким образом, величина

$$\frac{2}{T} F(k\omega) e^{j\psi_k} = j \frac{2}{T} F(k\omega) e^{j\alpha_k} = j \frac{2}{T} F(jk\omega)$$

представляет собой комплексную амплитуду k -й гармоник:

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k},$$

где

$$A_k = \frac{2}{T} F(k\omega).$$

Совокупность комплексных амплитуд всех гармоник данной функции может рассматриваться как дискретный спектр этой функции. Его можно представить на графике в виде спектра значений амплитуд и спектра значений фаз. По оси абсцисс откладываем частоту, которая имеет дискретные значения, равные частотам гармоник. Для каждой частоты гармоник откладываем от оси абсцисс параллельно оси ординат отрезки, длины которых равны амплитудам A_k или начальным фазам ψ_k гармоник. При этом $A_k > 0$,

а ψ_k может быть как положительным, так и отрицательным. Такие характеристики носят название дискретных спектров, или дискретных частотных характеристик, соответственно амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик.

На рис. 8-10 изображена дискретная амплитудно-частотная характеристика для функции времени, показанной на рис. 8-7, при $\tau = 0$.

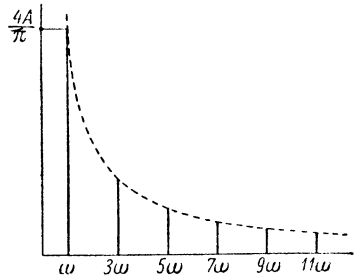


Рис. 8-10.

8-8. Биения колебаний

На практике используются несинусоидальные токи и напряжения, которые не могут быть представлены в виде ряда Фурье, содержащего составляющие с частотами, кратными основной частоте, и вместе с тем обладающие в известном отношении периодичностью своих изменений. Сюда относятся несинусоидальные токи и напряжения, изображаемые кривыми с периодической огибающей. К ним принадлежат так называемые биения колебаний и модуляция колебаний.

Рассмотрим случай биения колебаний. Пусть в некоторой цепи налагаются два синусоидальных тока: $i_1 = I_m \sin \omega_1 t$ и $i_2 = I_m \sin \omega_2 t$, имеющие одинаковые амплитуды, но разные частоты, причем частоты ω_1 и ω_2 близки друг к другу, так что разность их значительно меньше каждой из них:

$$|\omega_1 - \omega_2| < \omega_1 \quad \text{и} \quad |\omega_1 - \omega_2| < \omega_2.$$

Результирующий действительный ток в цепи при этом равен:

$$i = i_1 + i_2 = I_m (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) = 2I_m \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Так как $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| < \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, то кривую тока i можно рассматривать как синусоиду с угловой частотой $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right)$, амплитуда которой изменяется сравнительно медленно по закону $2I_m \left| \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right|$.

Так как амплитуда есть величина существенно положительная, а величина $\cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t$ меняет знак в моменты перехода ее через нуль, то это равносильно скачкообразному изменению в эти моменты времени фазы синусоидальных колебаний с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ на угол π .

На рис. 8-11 изображены биения колебаний для случая $\frac{\omega_1 + \omega_2}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{26}{3}$, т. е. для случая $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{29}{23}$ или $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{23}{29}$.

Частотой биений f_6 принято называть частоту, определяемую числом максимумов огибающей кривой в единицу времени. Соответственно величину $T_6 = \frac{1}{f_6}$ (рис. 8-11) называют периодом биений. Таким образом, период биений равен половине периода функции $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$.

Легко усмотреть из рисунка, что характер результирующей кривой не повторяется в двух соседних периодах биений. В рассмотренном примере характер результирующей кривой будет повторяться только через три периода функции $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$, т. е. через $6T_6$, так как в этом интервале времени укладывается целое число периодов функции $\sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$, и число скачкообразных изменений ее фазы на угол π является четным числом 6.

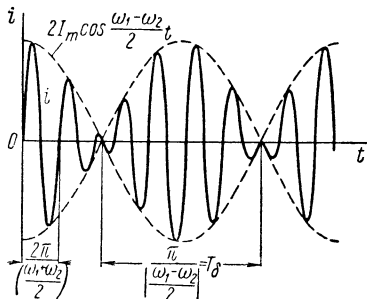


Рис. 8-11.

Таким образом, период результирующей кривой больше периода биений. Если отношение ω_1/ω_2 является иррациональным числом, то период результирующей кривой обращается в бесконечность и, следовательно, эта кривая не является периодической. Тем не менее понятие о периоде биений T_6 сохраняет определенный смысл.

Явление биений колебаний с успехом используется для установления отклонения частоты ω_1 колебаний в одной системе от частоты ω_2 колебаний в другой системе. Измеряя частоту биений, мы получаем возможность наблюдать весьма малые отклонения $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ по сравнению с самими величинами ω_1 и ω_2 .

Так как результирующая кривая $i = f(t)$ в общем случае не является периодической, то для вычисления действующего значения тока $i = f(t)$, строго говоря, мы не можем пользоваться методами, установленными в § 8-3.

Однако если условиться под действующим значением I понимать среднее квадратичное значение тока $i = f(t)$ за достаточно большой промежуток времени $\tau \gg T_6$, то с большой точностью можно вычислить величину I как корень квадратный из суммы квадратов действующих значений составляющих, имеющих ча-

стоты ω_1 и ω_2 . Так, в рассмотренном примере при одинаковых амплитудах I_m этих составляющих имеем:

$$I = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i^2(t) dt} \approx \sqrt{\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2} = I_m = \frac{2I_m}{2},$$

т. е. в этом случае действующее значение тока, которое покажет обычный прибор переменного тока, равно половине максимума огибающей кривой.

8-9. Модулированные колебания

Другим случаем несинусоидальных токов, изображаемых кривой с периодической огибающей, являются модулированные токи. В случае так называемой амплитудной модуляции они описываются уравнением:

$$i = I_m \sin \omega t = I_0 (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t,$$

причем Ω — частота модуляции — много меньше частоты ω , называемой несущей частотой. Коэффициент m , лежащий в пределах $0 < m < 1$, называют коэффициентом модуляции. Таким образом, модулированный ток можно рассматривать как ток частоты ω , амплитуда которого изменяется периодически с частотой Ω (рис. 8-12).

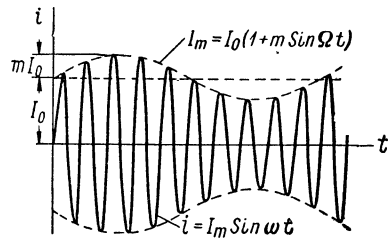


Рис. 8-12.

Модуляция применяется в проводной и радиосвязи. В передающем устройстве на колебания с основной несущей частотой ω воздействуют со звуковой частотой Ω , создавая таким образом модулированные колебания. Модуляция осуществляется обычно с помощью нелинейных элементов электрической цепи, например, путем подачи колебаний несущей и звуковой частот на сетку электронной лампы и подбора условий работы лампы на нелинейном участке ее характеристики.

Переписав модулированный ток в виде

$$i = I_0 \sin \omega t + \frac{1}{2} m I_0 \cos (\omega - \Omega) t - \frac{1}{2} m I_0 \cos (\omega + \Omega) t,$$

мы видим, что его можно рассматривать как сумму трех синусоидальных токов. Первый из них имеет несущую частоту ω , а два других изменяются с частотами $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$, которые называют боковыми частотами. Так как $\Omega \ll \omega$, то боковые

частоты близки к несущей. Передача сигнала по проводам или по радио производится на несущей и боковых частотах. В приемном устройстве вновь выделяются колебания со звуковой частотой с помощью процесса детектирования.

О действующем значении модулированного тока можно привести те же соображения, что и в случае биений. Пользуясь последним выражением для модулированного тока и выбирая $\tau \gg \frac{2\pi}{\Omega}$, получаем:

$$I = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i^2 dt} \approx \sqrt{\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2} \frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2} \frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2} = \\ = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2+m^2}{2}}.$$

При $m = 0$, т. е. при отсутствии модуляции, имеем $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, так как при этом ток i изменяется по синусоидальному закону. При $m = 1$, т. е. при стопроцентной модуляции, имеем $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1,5}$.

Помимо рассмотренной выше амплитудной модуляции осуществляют также частотную и фазовую модуляции, воздействуя от модулирующего устройства или на частоту ω , или на начальную фазу ψ тока i . Частотная модуляция при радиопередаче имеет большое достоинство в том, что при ней легче избавляться от мешающих влияний, вызывающих шумы в приемнике.



РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

9-1. О переходных процессах в линейных электрических цепях

Переходным называется процесс, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. При установившихся режимах токи и напряжения в цепи теоретически могут существовать неограниченно долго, не изменяя своего характера, и при заданных конфигурации цепи и ее параметрах определяются только видом действующих в цепи э. д. с. или, соответственно, видом заданных токов источников токов. Если в цепи действуют постоянные во времени э. д. с., то в установившемся режиме токи и напряжения во всех участках цепи должны быть также постоянными во времени. Когда э. д. с. источников изменяются во времени по закону синуса с одной и той же частотой, то и токи и напряжения в цепи в установившемся режиме должны быть синусоидальными функциями времени той же частоты. Если действующие в цепи э. д. с. несинусоидальны, но изменяются периодически во времени с одним и тем же периодом, то токи и напряжения должны быть периодическими функциями времени с тем же периодом. Этими тремя видами э. д. с. и токов исчерпывается перечень случаев установившихся режимов в цепи, причем постоянные и синусоидальные э. д. с. и токи можно рассматривать как частные случаи периодических токов и э. д. с.

Отыскание токов и напряжений в установившемся режиме сводится к нахождению частных решений дифференциальных уравнений цепи. Способы нахождения этих частных решений были рассмотрены в четвертой, пятой и восьмой главах.

Для отыскания токов $i(t)$ и напряжений $u(t)$ в переходном процессе необходимо найти полные решения дифференциальных

уравнений цепи. Как известно, в случае линейного уравнения его полное решение $i(t)$ образуется как сумма частного решения $i'(t)$ неоднородного уравнения, т. е. уравнения, содержащего заданные э. д. с. или заданные напряжения, и решения $i''(t)$ однородного уравнения, которое получается из того же уравнения цепи, если положить в нем заданные э. д. с. или напряжения равными нулю, т. е.

$$i(t) = i'(t) + i''(t).$$

При $t \rightarrow \infty$ ток $i''(t)$ стремится к нулю, так как процесс в цепи, обладающей конечным сопротивлением, должен затухать при отсутствии в цепи источников э. д. с. Поэтому ток $i''(t)$ называют *п р е х о д я щ и м т о к о м*. Его называют также *с в о б о д н ы м т о к о м*, так как он определяется из уравнений при отсутствии источников э. д. с.

Преходящий ток возникает вследствие того, что при включении или выключении цепи, или любом другом внезапном изменении в ней имеющиеся запасы энергии в полях цепи от предыдущего установившегося режима не соответствуют запасам энергии в полях, которые должны были бы быть в новом установившемся режиме после происшедших изменений в цепи.

Так как преходящий ток $i''(t)$ стремится к нулю, то ток $i(t)$ стремится к $i'(t)$. Следовательно, частное решение $i'(t)$ является *т о к о м у с т а н о в и в ш е г о с я р е ж и м а*, который устанавливается после происшедших изменений в цепи.

9-2. Общий путь расчета переходных процессов в линейных электрических цепях

Общий путь расчета переходных процессов в любой сколь угодно сложной линейной электрической цепи заключается в нижеследующем. Составляем дифференциальные уравнения цепи согласно первому и второму законам Кирхгофа. Если заданными являются э. д. с. источников, то неизвестными будут токи во всех p ветвях цепи. Пусть мы желаем найти ток i_k в k -й ветви. Исключая последовательно все остальные токи, мы получим одно дифференциальное уравнение, содержащее только ток i_k и его производные до порядка n :

$$a_n \frac{d^n i_k}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_k}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 i_k}{dt^2} + a_1 \frac{d i_k}{dt} + a_0 i_k = f_k(t),$$

т. е.

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_k}{dt^s} = f_k(t).$$

Порядок n уравнения определяется конфигурацией цепи и характером ее элементов. Свободный член $f_k(t)$ содержит в себе заданные э. д. с.

Полный интеграл этого уравнения равен сумме частного решения i'_k , определяемого видом функции $f_k(t)$, и полного решения i''_k однородного уравнения:

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i''_k}{dt^s} = 0,$$

т. е.

$$i_k = i'_k + i''_k.$$

Для определения i''_k находим n корней характеристического уравнения:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_s \alpha^s + \dots + a_1 \alpha + a_0 = \sum_{s=0}^n a_s \alpha^s = 0.$$

В случае, если все корни простые, имеем:

$$i''_k = A_{k1} e^{\alpha_1 t} + A_{k2} e^{\alpha_2 t} + \dots + A_{kn} e^{\alpha_n t} = \sum_{s=1}^n A_{ks} e^{\alpha_s t}$$

и, следовательно, искомое решение имеет вид

$$i_k = i'_k + \sum_{s=1}^n A_{ks} e^{\alpha_s t}.$$

Здесь A_{ks} — произвольные постоянные интегрирования. Они определяются из физических начальных условий, о чем будет сказано в следующем параграфе.

В случае наличия кратных корней характеристического уравнения приведенное выше выражение для i_k после определения всех величин A_{ks} из начальных условий будет содержать неопределенности, раскрывая которые получим выражение i_k для этого случая.

Изложенный метод часто называют классическим.

Выше было сказано, что дифференциальные уравнения цепи составляются по первому и второму законам Кирхгофа, при этом общее число уравнений равно числу ветвей цепи. Можно составлять дифференциальные уравнения для контурных токов, и тогда число уравнений будет равно числу независимых контуров цепи, или же для узловых напряжений, и тогда число уравнений будет равно числу узлов цепи без единицы.

9-3. Определение постоянных интегрирования из начальных условий

Будем называть коммутацией любое изменение в цепи, приводящее к возникновению переходного процесса, причем будем предполагать, что это изменение происходит мгновенно, т. е. совершается за интервал времени $\Delta t = 0$. Это может быть включение цепи под действие источника э. д. с. или отключение цепи от источника, замыкание цепи накоротко, скачкообразное изменение параметра цепи, изменение скачком амплитуды, частоты или фазы приложенного к цепи напряжения и т. д. Реальный процесс коммутации всегда длится конечный, хотя и весьма малый интервал времени Δt , в течение которого происходит изменение сопротивления выключателя от бесконечности до нуля при включении цепи и от нуля до бесконечности при отключении цепи или происходит изменение параметра цепи, амплитуды напряжения и т. д. Однако, не интересуясь процессом в течение этого времени Δt , а рассматривая лишь процесс после того, как коммутация закончена, т. е. абстрагируясь в этом отношении от действительной картины явления, мы будем полагать $\Delta t = 0$. Условимся далее начало отсчета времени $t = 0$ совмещать с моментом коммутации и обозначать через $t = -0$ момент времени, непосредственно прилегающий к моменту коммутации до коммутации, и через $t = +0$ момент времени, также непосредственно прилегающий к моменту коммутации, но после коммутации.

В любой электрической цепи, в которой не могут развиваться бесконечно большие напряжения или протекать бесконечно большие токи, мгновенная мощность p — величина всегда конечная, и поэтому в таких цепях не может иметь место мгновенное изменение накопленной в электрических и магнитных полях энергии. Если изменение энергии во время коммутации за время $\Delta t \rightarrow 0$ обозначим $\Delta W = W(+0) - W(-0)$, то получим $\Delta W = p\Delta t \rightarrow 0$, и, следовательно, $W(+0) = W(-0)$.

Так как энергия электрического поля конденсатора и энергия магнитного поля индуктивной катушки равны:

$$W_c = \frac{Cu_c^2}{2} \quad \text{и} \quad W_m = \frac{Li_L^2}{2},$$

то равенство $\Delta W = 0$ означает, что в момент коммутации имеются условия:

$$u_c(+0) = u_c(-0) \quad \text{и} \quad i_L(+0) = i_L(-0),$$

т. е. в момент коммутации остаются неизменными напряжения на обкладках конденсаторов и токи в индуктивных катушках.

Так как в реальных физических цепях каждый элемент обладает индуктивностью и емкостью, то в них не могут скачком изменяться ни токи, ни напряжения. Однако если, абстрагируясь от действительности, пренебречь в катушке ее распределенной емкостью, то получим, что напряжение на катушке может изменяться скачком. Точно так же, если полностью пренебречь индуктивностью конденсатора, то в нем ток может изменяться скачком.

Наконец, если в результате идеализации процессов теоретически окажется возможным появление длящихся бесконечно малое время бесконечно больших напряжений на последовательно включенных отдельных индуктивных участках цепи, хотя суммарное напряжение и остается конечным, или окажется возможным появление длящихся бесконечно малое время бесконечно больших токов в отдельных емкостных параллельно включенных ветвях цепи, хотя суммарный ток во всех ветвях и остается конечным, то условие $\Delta W = 0$, вообще говоря, не будет иметь места, так как при этом величина $\Delta W = p \Delta t = \infty \cdot 0$ становится неопределенной. Эти особые случаи мы рассмотрим в § 9-10.

Если до коммутации к моменту $t = -0$ имелись токи в катушках и напряжения на конденсаторах, определяемые процессом, происходившим до коммутации, то говорят, что имеют место *ненулевые начальные условия*. В случае же, когда токи в катушках и напряжения на конденсаторах до коммутации были равны нулю, принято говорить, что имеют место *нулевые начальные условия*.

Рассмотренные выше начальные условия

$$u_C(+0) = u_C(-0) \quad \text{и} \quad i_L(+0) = i_L(-0)$$

и служат для определения произвольных постоянных интегрирования A_{ks} . С этой целью определяем начальные значения тока i_k и всех его производных до $(n-1)$ -й включительно, используя уравнения цепи и подставляя в них заданные начальные значения напряжений на конденсаторах и токов в катушках.

Имея решения для тока i_k в форме

$$i_k = i'_k + \sum_{s=1}^n A_{ks} e^{\alpha_s t}$$

и для его производных в виде

$$\frac{d^m i_k}{dt^m} = \frac{d^m i'_k}{dt^m} + \sum_{s=1}^n \alpha_s^m A_{ks} e^{\alpha_s t},$$

где $m = 1, 2, \dots, (n-1)$, и, подставляя слева от знака равенства найденные начальные значения тока i_k и его производных при $t = +0$, а в выражения справа от знака равенства подставляя

$t = 0$, получим n алгебраических уравнений с n неизвестными величинами A_{ks} , из которых и находим последние.

Следует отметить, что в случае сложной электрической цепи определение всех постоянных A_{ks} вышеуказанным путем получается весьма трудоемким. Существуют другие последовательности определения величин A_{ks} через заданные начальные значения токов в катушках и напряжений на конденсаторах, также трудоемкие в случае сложных электрических цепей.

Заметим, что энергетическое состояние цепи в начальный момент определяется значениями в этот момент токов i_L во всех катушках и

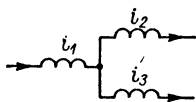


Рис. 9-1.

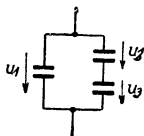


Рис. 9-2.

напряжений u_C во всех конденсаторах. Для определения же постоянных A_{ks} требуется задать начальные значения n из этих величин, причем число n может быть и меньше суммы всех катушек и всех конденсаторов. Действительно, если несколько катушек включены

в одну и ту же ветвь, то достаточно знать начальное значение тока в одной из них, так как ток в других тот же самый. Если несколько конденсаторов соединены параллельно, то достаточно знать начальное значение напряжения на одном из них, так как напряжение на других то же самое. Если к одному узлу подходят три ветви, содержащие индуктивные катушки (рис. 9-1), то достаточно задать начальные значения тока только в двух из них, так как третий ток при этом также оказывается заданным соответственно первому закону Кирхгофа. Если три конденсатора включены в один контур согласно рис. 9-2, то достаточно задать начальные значения напряжения только на двух из них, так как напряжение на третьем также получается заданным в соответствии со вторым законом Кирхгофа.

9-4. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками r и L

Исследуем переходные процессы в простой цепи, схема которой содержит последовательно соединенные участки с сопротивлением r и индуктивностью L . В частности, это может быть эквивалентная схема индуктивной катушки, обладающей активным сопротивлением r и индуктивностью L , при условии пренебрежения емкостью между витками катушки. Последнее означает, что мы пренебрегаем энергией электрического поля цепи и учитываем только энергию магнитного поля.

Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + ri = u,$$

где $u = u(t)$ — напряжение на зажимах цепи. Соответствующее однородное уравнение, определяющее переходящий ток i'' , будет:

$$L \frac{di''}{dt} + ri'' = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$L\alpha + r = 0$$

имеет единственный корень $\alpha = -\frac{r}{L}$. Поэтому

$$i'' = Ae^{\alpha t} = Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Установившийся ток $i'(t)$, являющийся частным решением неоднородного уравнения, определяется видом заданной функции $u(t)$.

Ток в переходном процессе

$$i = i' + i'' = i' + Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Постоянная интегрирования A определяется по начальному значению тока i .

Рассмотрим ряд частных случаев.

1) Пусть цепь в момент $t = 0$ замыкается накоротко (рис. 9-3). После замыкания накоротко имеем $u = 0$. Установившийся ток i' при этом также будет равен нулю ($i' = 0$) и, следовательно,

$$i = i'' = Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Произвольная постоянная A определяется из начального условия для тока в катушке $i(+0) = i(-0)$.

Положим, что к моменту коммутации до короткого замыкания ток в цепи был равен $i(-0) = I$. Следовательно, $i(+0) = I$. Полагая в последнем уравнении $i = I$ и $t = 0$, находим:

$$I = A.$$

Таким образом,

$$i = Ie^{-\frac{r}{L}t} = Ie^{-\frac{t}{\tau}},$$

Величина $\tau = \frac{L}{r}$ имеет размерность времени и называется постоянной времени цепи. За промежуток времени τ ток убывает в e раз. Чем больше τ , тем медленнее затухает ток.

Из полученного решения вытекает, что ток станет равным нулю теоретически через бесконечный промежуток времени. Практически ток становится весьма малым, по сравнению с начальным током,

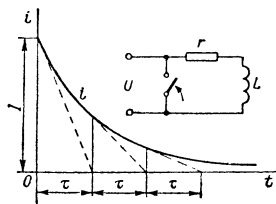


Рис. 9-3.

обычно спустя малый промежуток времени, равный нескольким значениям τ . Кроме того, следует заметить, что данное решение описывает ток в цепи только до тех пор, пока определяемое из него значение тока не становится сравнимым с весьма малыми флюктуационными токами, определяемыми тепловыми процессами и носящими случайный характер (§ 12-4). Это замечание относится и ко всем последующим случаям.

Постоянная времени τ равна длине подкасательной в любой точке кривой $i(t)$ (рис. 9-3), так как $\frac{di}{dt} = -\frac{i}{\tau}$.

Энергия, выделяемая в виде тепла в сопротивлении цепи, равна энергии, запасенной в магнитном поле цепи в начальный момент времени. Действительно,

$$\int_0^{\infty} i^2 r dt = I^2 r \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{L} t} dt = \frac{1}{2} LI^2.$$

Постоянная времени индуктивных катушек зависит от их размеров. Для геометрически подобных катушек она изменяется пропорционально квадрату их линейных размеров l . Действительно, индуктивность L геометрически подобных катушек увеличивается пропорционально квадрату чисел их витков ω и первой степени их линейных размеров l , т. е. $L = k_1 \omega^2 l$. Последнее вытекает из размерности индуктивности: $[L] = [\mu] \cdot [l]$. Так как мы рассматриваем в настоящей главе только цепи с постоянными параметрами, то сердечник должен быть из неферромагнитного материала, т. е. должно быть $\mu \approx \mu_0$.

Сопротивление r геометрически подобных катушек увеличивается пропорционально квадрату чисел их витков и уменьшается обратно пропорционально линейным размерам l катушек. Действительно, длина проволоки таких катушек увеличивается пропорционально их числам витков ω и линейным размерам l , сечение же проволоки убывает обратно пропорционально ω и возрастает пропорционально l^2 . Поэтому

$$r = k_2 \frac{\omega l}{l^2 / \omega} = k_2 \frac{\omega^2}{l}.$$

Таким образом, для постоянной времени получаем:

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{k_1}{k_2} l^2.$$

Интересно отметить, что величина τ для геометрически подобных катушек не зависит от числа витков ω , если при изменении ω коэффициент заполнения сечения обмотки медью не изменяется, т. е. не изменяется соотношение частей сечения обмотки, занятых медью проволоки и изоляцией.

Для оценки порядка величины τ укажем, что круглая катушка без сердечника из медной проволоки, эскиз которой с указанием размеров приведен на рис. 9-4, весящая 17 кг, имеет: $L = 0,218$ гн; $r = 4,4$ ом и $\tau = L/r = 0,0495$ сек. Подобные ей катушки меньших размеров будут иметь меньшую величину τ , катушки же больших размеров будут иметь большую величину τ , причем τ будет изменяться пропорционально квадрату линейных размеров, например, пропорционально квадрату диаметра D катушки.

Внесение сердечника из ферромагнитного материала значительно увеличивает постоянную времени катушки, так как увеличивается L вследствие увеличения μ . Однако при этом цепь становится нелинейной и зависимость тока от времени, строго говоря, будет отличаться от только что полученной, так что самое понятие о постоянной времени становится условным. Если в магнитной цепи сердечника из ферромагнитного материала имеется достаточный воздушный зазор, то практически L мало зависит от тока i и полученные в настоящем параграфе соотношения остаются справедливыми с большой точностью для таких катушек. При этом постоянная времени τ при той же затрате меди, как, например, в вышеприведенном конкретном случае, может быть увеличена по сравнению с величиной τ катушки без сердечника в несколько десятков раз.

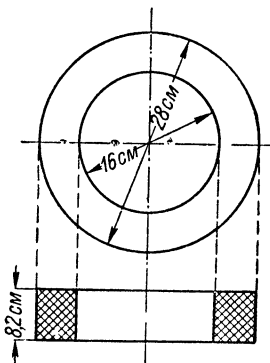


Рис. 9-4.

Из сказанного видно, что постоянные времени больших катушек, магнитные цепи которых содержат участки из ферромагнитных материалов, могут быть весьма значительны. Например, постоянная времени обмотки возбуждения крупных гидрогенераторов может иметь значение $\tau \approx 5$ сек.

Полученная выше зависимость постоянной времени τ от линейных размеров l геометрически подобных катушек весьма затрудняет моделирование переходных процессов, происходящих в мощных больших устройствах, с помощью малых лабораторных моделей, если при этом не изменять масштаб времени.

2) В качестве другого примера рассмотрим процесс отключения от источника постоянного напряжения цепи, состоящей из индуктивной катушки с индуктивностью L и сопротивлением r и параллельно с ней соединенной ветвью с сопротивлением r_0 (рис. 9-5). Переходный процесс при этом описывается уравнением

$$i = i'' = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{r + r_0}.$$

До размыкания рубильника в катушке протекает ток $i_L(-0) = U/r$. Следовательно,

$$A = i_L(+0) = i_L(-0) = \frac{U}{r}.$$

Таким образом,

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на сопротивлении r_0 до размыкания было равно U , а в первый момент после размыкания оно окажется равным

$$r_0 i(+0) = U \frac{r_0}{r}.$$

Если $r_0 \gg r$, например на зажимах катушки с малым сопротивлением r включен вольтметр с большим сопротивлением r_0

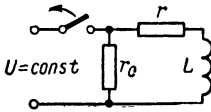


Рис. 9-5.

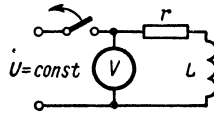


Рис. 9-6.

(рис. 9-6), то при отключении цепи напряжение на вольтметре в первый момент повысится в r_0/r раз.

Если энергия магнитного поля, запасенная в катушке, достаточно велика, то вольтметр может быть сожжен. Во избежание возникновения больших перенапряжений при отключении цепей постоянного тока, обладающих большой индуктивностью, например обмоток возбуждения генераторов постоянного тока, эти цепи предварительно замыкают на малое сопротивление.

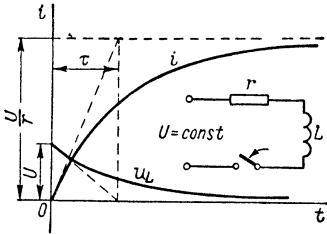


Рис. 9-7.

3) В качестве еще одного примера определим процесс при включении рассматриваемой цепи под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ (рис. 9-7).

Ток установившегося режима в данном случае равен $i' = U/r$. Следовательно:

$$i = i' + i'' = \frac{U}{r} + A e^{-\frac{r}{L} t}.$$

Если до включения ток i был равен нулю [$i(-0) = 0$], то

$$i(+0) = i(-0) = \frac{U}{r} + A = 0 \quad \text{и} \quad A = -\frac{U}{r}.$$

Таким образом,

$$i = \frac{U}{r} (1 - e^{-\frac{r}{L}t}) = \frac{U}{r} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Напряжение на зажимах катушки при этом:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{U}{r} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = U e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Зависимости $i(t)$ и $u_L(t)$ изображены на рис. 9-7.

4) Наконец рассмотрим процесс при включении цепи под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Ток установившегося режима при этом будет равен (§ 4-4):

$$i' = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

и, следовательно,

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Здесь $z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$, $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}$ и $\tau = \frac{L}{r}$. Постоянная A определяется из

начального условия, что ток до включения был равен нулю: $i(-0) = 0$. Тогда

$$i(+0) = i(-0) = 0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + A.$$

Таким образом,

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

На рис. 9-8 приведены кривые $u(t)$, $i'(t)$, $i''(t)$ и $i(t)$. При $t = 0$ начальное значение преходящего тока i'' равно и противоположно току i' и $i = 0$. Начальное значение преходящего тока зависит от начальной фазы ψ напряжения. Наибольшее начальное значение преходящего тока, равное амплитуде I_m установившегося тока, имеет место, если $\psi - \varphi = \pi/2$. Наибольшее значение результирующего тока, как видно из рис. 9-8, не превышает двойной амплитуды установившегося тока. Преходящий ток вообще не возникает, и сразу наступает установившийся режим при условии $\psi = \varphi$.

9-5. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками r и C

Рассмотрим переходные процессы в цепи, состоящей из последовательно включенных участка с сопротивлением r и конденсатора емкостью C . Обозначив напряжение на зажимах цепи через u ,

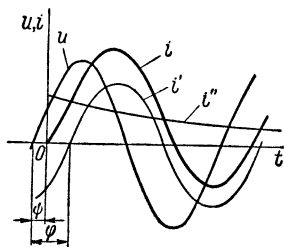


Рис. 9-8.

а напряжение на обкладках конденсатора и величину его заряда, соответственно, через u_C и q , имеем:

$$ri + u_C = u.$$

Так как

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt},$$

то

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = u.$$

Соответствующее однородное уравнение, определяющее переходящее напряжение u_C'' , будет:

$$rC \frac{du_C''}{dt} + u_C'' = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$rC\alpha + 1 = 0$$

имеет единственный корень $\alpha = -\frac{1}{rC}$.

Поэтому

$$u_C'' = Ae^{\alpha t} = Ae^{-\frac{t}{rC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $rC = \tau$ есть постоянная времени рассматриваемой цепи.

Для переходного процесса получим:

$$u_C = u_C' + u_C'' = u_C' + Ae^{-\frac{t}{rC}},$$

причем установившееся напряжение u_C' может быть найдено, если известен вид функции $u(t)$, а постоянная интегрирования A определяется по начальным условиям.

Рассмотрим ряд частных случаев.

1) Пусть цепь (r , C) замыкается накоротко, что соответствует равенству нулю напряжения u (рис. 9-9). Для установившегося напряжения u_C' на зажимах конденсатора имеем $u_C' = 0$ и, следовательно,

$$u_C = u_C'' = Ae^{-\frac{t}{rC}}$$

Положим, что к моменту коммутации до короткого замыкания напряжение на зажимах конденсатора было равно $u_C(-0) = U_0$. Следовательно, из условия $u_C(+0) = u_C(-0)$, полагая в последнем уравнении $u_C = U_0$ и $t = 0$, находим $U_0 = A$.

Таким образом, $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{rC}}$.
Для тока в цепи получим:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Согласно этому решению ток в начальный момент меняется скачком от нуля до U_0/r . Это является результатом того, что мы полностью пренебрегли индуктивностью цепи.

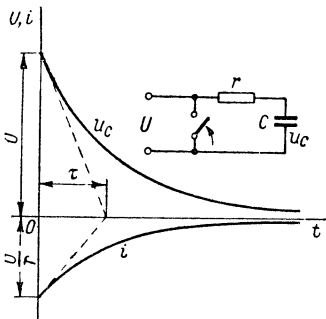


Рис. 9-9.

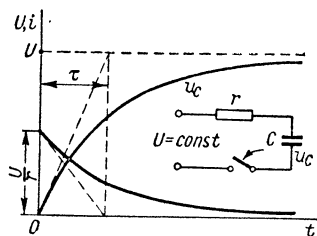


Рис. 9-10.

Энергия, выделяемая в виде тепла в сопротивлении цепи, равна энергии, запасенной в электрическом поле конденсатора в начальный момент времени. Действительно,

$$\int_0^{\infty} i^2 r dt = \frac{U_0^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{rC}} dt = \frac{1}{2} CU_0^2.$$

Постоянная времени $\tau = rC$ в реальных устройствах может иметь самые различные значения. Например, если конденсатор с емкостью $C = 100 \text{ мкф}$ разряжается через сопротивление $r = 100 \text{ ом}$, то постоянная времени получается: $\tau = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 0,01 \text{ сек}$. Если тот же конденсатор оставить заряженным и отключенным от остальной цепи, то он будет медленно разряжаться через свое сопротивление утечки. Пусть это сопротивление $r = 10^8 \text{ ом}$. Тогда имеем: $\tau = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 = 10^4 \text{ сек} = 27,8 \text{ час}$, т. е. конденсатор с такой хорошей изоляцией сохранит через сутки примерно одну треть своего начального заряда.

2) В качестве другого примера исследуем процесс при включении рассматриваемой цепи под постоянное напряжение $u = U_0 = \text{const}$ (рис. 9-10). Пусть конденсатор до включения не был заряжен, т. е. $u_C (-0) = 0$.

Установившееся напряжение на зажимах конденсатора после завершения переходного процесса будет: $u'_C = U$. Таким образом,

$$u_C = u'_C + u''_C = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянную интегрирования A определим из условия $u_C(+0) = u_C(-0) = 0$ и, полагая в последнем уравнении $t = 0$, получим:

$$0 = U + A \text{ или } A = -U.$$

Следовательно,

$$u_C = U - Ue^{-\frac{t}{\tau}} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Для тока в цепи имеем:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Из выражения для u_C видно, что напряжение на зажимах конденсатора и заряд его нарастают по тому же закону, что и ток в цепи (r, L) при включении ее под постоянное напряжение. Что же касается тока i (рис. 9-10), то при включении цепи он сразу получает значение U/r , так как в момент $t = 0$ напряжение на зажимах конденсатора равно нулю, и ток в цепи определяется лишь напряжением U и сопротивлением r цепи. В дальнейшем напряжение на зажимах конденсатора постепенно возрастает, и ток в цепи убывает по тому же показательному закону, что и при разряде конденсатора.

Определяя количество тепла, выделившегося в цепи во время заряда конденсатора, мы получим то же значение $\frac{1}{2}CU^2$, что и при разряде конденсатора, и можем поэтому сказать, что при $u = U = \text{const}$ количество энергии, превращаемой в тепло при заряде конденсатора через сопротивление, равно энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора. Следовательно, работа источника внешней э. д. с. в рассматриваемом случае равна CU^2 , т. е. удвоенному значению энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора. Однако такое соотношение имеет место только при включении цепи (r, C) под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$. Если напряжение u на зажимах цепи увеличивать медленно, то соотношение между количеством энергии, превращаемой в тепло, и энергией, запасаемой в конденсаторе, будет более выгодным. Это важное положение мы покажем на примере в § 12-3. Естественно, что при этом характер изменения тока и напряжения на конденсаторе будет определяться характером нарастания напряжения на зажимах цепи и будет отличаться от только что рассмотренного при $U = \text{const}$.

Если конденсатор до включения был заряжен, т. е. на его обкладках было напряжение $u_C(-0) = u_C(0)$, то постоянная интегрирования A определится из условия

$$u_C(+0) = u_C(-0) = u_C(0) = U + A, \text{ или } A = [u_C(0) - U].$$

В случае $u_C(0) > 0$ (рис. 9-11) конденсатор дозаряжается до напряжения U , а в случае $u_C(0) < 0$ конденсатор перезаряжается от начального отрицательного напряжения до приложенного напряжения (рис. 9-12).

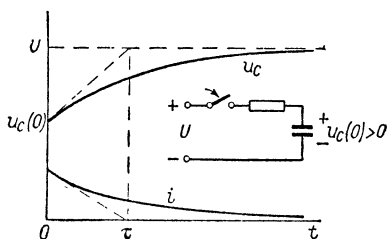


Рис. 9-11.

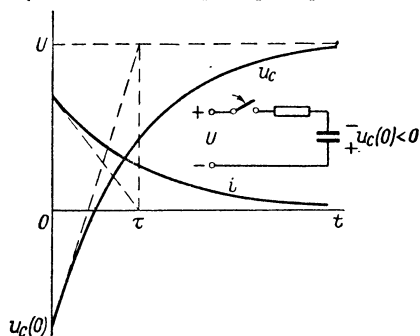


Рис. 9-12.

3) Рассмотрим еще процесс включения цепи (r, C) под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Напряжение u_C на зажимах конденсатора в установившемся режиме при этом будет равно (§ 4-4):

$$u'_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, для переходного процесса имеем:

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Здесь

$$I_m = \frac{U_m}{z}, \quad z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{1}{r\omega C} \text{ и } \tau = rC.$$

Постоянная A определяется из начального условия, согласно которому должно быть задано напряжение на зажимах конденсатора $u_C(-0)$ до включения цепи. Если конденсатор не был заряжен, то $u_C(-0) = 0$ и, следовательно,

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 0 = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A,$$

откуда

$$A = -\frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом,

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Для тока в переходном процессе в этом случае получим:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{I_m}{r\omega C} \times \\ \times \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если конденсатор был предварительно заряжен, то $u_C(-0) = u_C(+0)$ и, следовательно,

$$u_C(+0) = u_C(-0) = u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A,$$

откуда и определится постоянная A .

Из полученных выражений видно, что переходный процесс зависит от величины ψ .

Если $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$, то переходный процесс не возникает и сразу же наступает установившийся режим. При $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ установив-

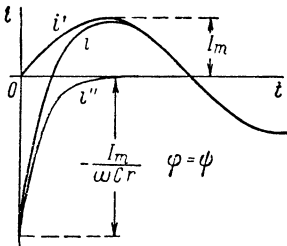


Рис. 9-13.

шееся напряжение на конденсаторе в момент $t = 0$ равно нулю. Таким образом, имеется полное соответствие между запасом энергии в конденсаторе до включения (в данном случае нуль) и запасом энергии, который должен быть в установившемся режиме (в данном случае также нуль). Поэтому переходный процесс и не возникает.

Если включение происходит при $\psi = \varphi$, то переходящее напряжение u_C'' будет наибольшим и в начальный момент имеет значение $\frac{I_m}{\omega C}$. Начальное значение переходящего тока при этом будет $\left(-\frac{I_m}{\omega Cr}\right)$. Если $\omega r C \ll 1$, т. е. $r \ll \frac{1}{\omega C}$, то в начальный момент происходит большой всплеск тока, намного превосходящий амплитуду I_m (рис. 9-13). Однако такой большой ток длится незначительную часть периода, так как $\omega Cr = \frac{2\pi}{T} \tau \ll 1$, и, следовательно, $\tau \ll T$.

Максимальное значение напряжения u_C в переходном процессе не превышает удвоенной амплитуды $U_{Cm} = \frac{I_m}{\omega C}$ напряжения на конденсаторе при установившемся режиме.

9-6. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками r , L и C

Рассмотрим переходные процессы в цепи, содержащей последовательно включенные участок с сопротивлением r , катушку с индуктивностью L и конденсатор с емкостью C (рис. 9-14).

Уравнение этой цепи имеет вид

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = u(t). \quad (*)$$

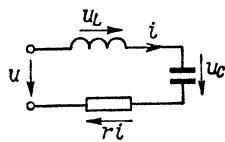


Рис. 9-14.

Дифференцируя обе части выражения (*), получим уравнение второго порядка для тока i в цепи:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}.$$

Соответствующее однородное уравнение, определяющее переходящий ток i'' после деления на L , будет:

$$\frac{d^2i''}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{di''}{dt} + \frac{i''}{LC} = 0,$$

или, обозначив $\frac{r}{L} = 2\delta$ и $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, получим:

$$\frac{d^2i''}{dt^2} + 2\delta \frac{di''}{dt} + \omega_0^2 i'' = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

имеет два корня:

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

или

$$\alpha_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Таким образом,

$$i'' = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Для тока переходного процесса, следовательно, имеем:

$$i = i' + i'' = i' + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (**)$$

Ток установившегося режима i' можно найти, если известен вид функции $u(t)$.

Произвольные постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяем из начальных физических условий неизменности тока в катушке и напряжения на зажимах конденсатора в момент коммутации: $i(+0) = i(-0)$, $u_C(+0) = u_C(-0)$. Для краткости в выражениях $i(+0)$ и $u_C(+0)$ будем опускать знак «плюс», т. е. начальные значения переходных тока в цепи и напряжения на конденсаторе будем обозначать $i(0)$ и $u_C(0)$.

Как было сказано в § 9-3, для определения постоянных A_1 и A_2 надо знать значение тока и всех его производных до $(n-1)$ -й включительно в начальный момент времени. Так как в данном случае мы имеем уравнение второго порядка ($n=2$), то необходимо знать начальное значение тока и его первой производной. Начальное значение тока в данном случае задано. Начальное значение первой производной тока находим из уравнения цепи, используя упомянутые выше физические начальные условия, а именно, при $t=0$ из уравнения (*) имеем:

$$ri(0) + L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} + u_C(0) = u(0),$$

где $u(0)$ есть значение приложенного напряжения $u(t)$ при $t=0$. Отсюда

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{u(0) - u_C(0) - ri(0)}{L}.$$

Из уравнения (**) для производной тока имеем:

$$\frac{di}{dt} = \frac{di'}{dt} + A_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Подставляя в уравнение (**) для тока и в полученное выражение для его производной слева от знака равенства найденные начальные значения тока и его производной, а в выражения справа от знака равенства подставляя $t=0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} i(0) &= i'(0) + A_1 + A_2, \\ \frac{u(0) - u_C(0) - ri(0)}{L} &= \left(\frac{di'}{dt} \right)_{t=0} + A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

где $i'(0)$ и $\left(\frac{di'}{dt} \right)_{t=0}$ — значения тока установившегося режима и его производной в начальный момент времени, известные из найденного ранее частного решения исходного дифференциального уравнения (*).

Из последних уравнений (***) и определяем постоянные A_1 и A_2 .

9-7. Разряд конденсатора на цепь r, L

Рассмотрим важный случай разряда конденсатора с емкостью C на цепь, обладающую активным сопротивлением r и индуктивностью L . В данном случае приложенное напряжение, а также ток установившегося режима, равны нулю, т. е. $u(t) = 0$ и $i'(t) = 0$.

Для определения произвольных постоянных в уравнении (***) предыдущего параграфа мы должны положить $i(0) = 0$, $i'(0) = 0$, $u(0) = 0$, $\left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0} = 0$. Обозначая $u_C(0) = U_0$, получим:

$$0 = A_1 + A_2, \quad -\frac{U_0}{L} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2,$$

откуда

$$A_1 = -A_2 = A = -\frac{U_0}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Окончательно для тока i имеем:

$$i = -\frac{U_0}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$$

и соответственно для напряжений на катушке и на конденсаторе получим:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}),$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt + U_0 = -\frac{U_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}).$$

При выводе последнего выражения для u_C следует принять во внимание, что $\alpha_1 \alpha_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Характер процессов при разряде конденсатора оказывается существенно различным в зависимости от того, будут ли корни характеристического уравнения вещественными или комплексными, что определяется соотношениями между параметрами r, L и C .

Исследуем различные возможные случаи.

1) Пусть корни характеристического уравнения *вещественны* и отличны друг от друга. Это имеет место при условии $\delta > \omega_0$, т. е. $\frac{r}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, или $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Так как $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$ и, кроме того, $|\alpha_2| > |\alpha_1|$, то при изменении t от 0 до ∞ величины $e^{\alpha_1 t}$ и $e^{\alpha_2 t}$ убывают от 1 до 0 и притом разность $e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}$ всегда положительна (рис. 9-15). Следовательно, ток i не меняет своего направления, т. е. конденсатор все время разряжается; в частности, при $u_C(0) = U_0 > 0$ ток все время

отрицателен. Такой односторонний разряд конденсатора называют а п е р и о д и ч е с к и м р а з р я д о м.

На рис. 9-16 изображены кривые $i(t)$, $u_C(t)$ и $u_L(t)$. В интервале времени $0 < t < t_m$ ток по абсолютному значению возрастает и достигает максимума при $t = t_m = \left(\ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) : (\alpha_1 - \alpha_2)$.

Значение t_m находится из условия $\frac{di}{dt} = \frac{u_L}{L} = 0$, т. е. из условия $\alpha_1 e^{\alpha_1 t_m} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t_m} = 0$. В интервале времени $t_m < t < \infty$ ток по абсолютному значению убывает, стремясь к нулю.

Напряжение на конденсаторе монотонно убывает, стремясь также к нулю.

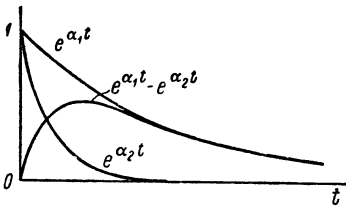


Рис. 9-15.

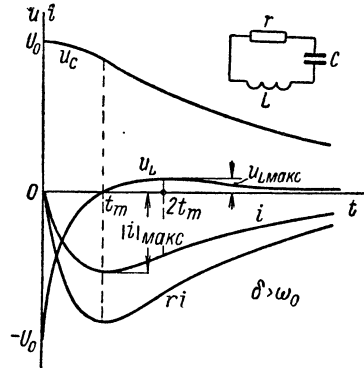


Рис. 9-16.

На рис. 9-14 показаны принятые ранее всюду и, в частности, при составлении уравнений в настоящем параграфе, взаимоотношения между *условным* положительным направлением тока и *условными* положительными напряжениями на конденсаторе, на катушке и участке с сопротивлением. При $u_C > 0$ и $i_C > 0$ конденсатор заряжается.

В рассматриваемом случае аperiodического разряда мы получили естественно $i < 0$ при $u_C > 0$. *Действительное* направление тока при разряде конденсатора показано пунктирной стрелкой на рис. 9-17. На этом же рисунке *действительные* направления напряжений показаны знаками «+» и «-». Из уравнения

$$u_C = - \left(L \frac{di}{dt} + ri \right)$$

следует, что напряжение на зажимах конденсатора в любой момент времени уравнивается суммой напряжения на зажимах катушки самоиндукции и напряжения на участке с сопротивлением. В первый момент времени, когда $ri = 0$, напряжение на зажимах конденсатора полностью уравнивается напряжением на зажимах катушки. Ток начинает возрастать по абсолютной своей

величине именно с такой скоростью, чтобы наступило такое равновесие. В интервале времени $0 < t < t_m$ (рис. 9-16) напряжение u_C частично уравнивается напряжением на катушке и частично напряжением на участке с сопротивлением. С возрастанием t на долю катушки приходится все меньшее напряжение и, соответственно, скорость нарастания тока уменьшается. В момент t_m величины u_C и ri оказываются равными и противоположными ($u_C = -ri$), т. е. оставшееся к этому моменту времени напряжение на конденсаторе полностью уравнивается напряжением на сопротивлении. Поэтому ток дальше возрастать не может. В этот момент он достигает максимума, так как после этого момента он должен убывать вследствие того, что конденсатор продолжает разряжаться.

На рис. 9-17 показаны знаки напряжений на катушке и участке с сопротивлением в интервале времени $0 < t < t_m$, а также стрелкой с хвостовым оперением показано действительное направление потока энергии в этот промежуток времени. Напряжение на конденсаторе и ток в нем разных знаков, и, следовательно, мощность $p_C = u_C i$ отрицательна, т. е. энергия отдается конденсатором из его электрического поля. Напряжения на катушке и на участке с сопротивлением одного знака с током, и, следовательно, $p_L = u_L i > 0$ и $p_r = ri^2 > 0$, т. е. энергия поступает в катушку, запасаясь в ее магнитном поле, и выделяется в форме тепла в сопротивлении.

В интервале времени $t_m < t < \infty$ напряжение на катушке, так же как и напряжение на конденсаторе, положительно — они совместно преодолевают сопротивление цепи, что легко видеть из рассмотрения знаков напряжений, показанных на рис. 9-17. Теперь мощность $p_L = u_L i$ отрицательна, и катушка, так же как и конденсатор, отдает запасенную в ней энергию. Вся эта энергия превращается в тепло, что показано стрелками с хвостовым оперением.

Представляет интерес сопоставить кривые на рис. 9-16 с кривыми на рис. 9-9, полученными при рассмотрении разряда конденсатора на сопротивление r в предположении, что $L = 0$. При таком предположении в начальный момент ток скачком принимает значение, определяемое отношением начального значения напряжения на конденсаторе к сопротивлению. При $L \neq 0$ (рис. 9-16) ток увеличивается постепенно от нулевого начального значения. Соответственно, скорость спада напряжения на конденсаторе в начальный период разряда при $L \neq 0$ получается меньше, чем при $L = 0$.

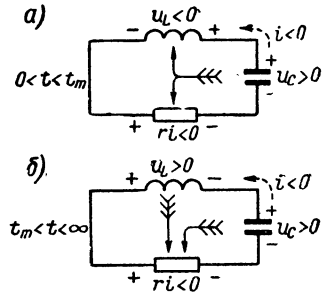


Рис. 9-17.

2) Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения *вещественны* и равны друг другу. Это имеет место при условии $\delta = \omega_0$, т. е. при $r = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$. Имеем $\alpha_1 = \alpha_2 = -\delta$.

При этом выражения для тока и напряжений становятся неопределенными из-за равенства нулю и числителя и знаменателя. Раскроем эти неопределенности по правилу Лопиталья, считая, что α_1 — переменная и стремится к $\alpha_2 = -\delta$. Для тока имеем:

$$i = -\frac{U_0}{L} \lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{U_0}{L} t e^{\alpha_2 t} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

Для напряжений соответственно получим:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 (\delta t - 1) e^{-\delta t},$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_0 = U_0 (\delta t + 1) e^{-\delta t}.$$

Характер процессов в этом случае не отличается от рассмотренного выше случая, когда $\delta > \omega_0$. Процесс также *апериодический*. Момент достижения максимума абсолютного значения тока теперь равен $t_m = \frac{1}{\delta}$. Данный случай при $\delta = \omega_0$ является предельным случаем апериодического разряда, так как при дальнейшем уменьшении r ниже значения $2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ разряд становится колебательным.

3) Пусть корни характеристического уравнения являются *комплексными*. Это имеет место при условии $\delta < \omega_0$, т. е. при $r < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$. Введем обозначение $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega'$. Корни характеристического уравнения при этом можем записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\omega' = \omega_0 e^{j\theta}, \\ \alpha_2 &= -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\omega' = \omega_0 e^{-j\theta}, \end{aligned}$$

где $\theta = \arctg\left(\frac{\omega'}{-\delta}\right)$. Угол θ лежит в пределах $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, так как

$$\sin \theta = \frac{\omega'}{\omega_0} > 0 \text{ и } \cos \theta = -\frac{\delta}{\omega_0} < 0.$$

Для тока имеем выражение:

$$\begin{aligned} i &= -\frac{U_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)L} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) = -\frac{U_0}{2j\omega'L} (e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) = \\ &= -\frac{U_0}{\omega'L} e^{-\delta t} \sin \omega' t = -I e^{-\delta t} \sin \omega' t, \end{aligned}$$

Для u_L и u_C имеем:

$$u_L = -\frac{U_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) = -\frac{U_0}{2j\omega'} (\omega_0 e^{j\theta} e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - \\ - \omega_0 e^{-j\theta} e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) = -\frac{U_0 \omega_0}{2j\omega'} e^{-\delta t} (e^{j(\omega' t + \theta)} - e^{-j(\omega' t + \theta)}) = \\ = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \theta),$$

$$u_C = -\frac{U_0}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}) = -\frac{U_0}{2j\omega'} (\omega_0 e^{-j\theta} e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - \\ - \omega_0 e^{j\theta} e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) = -\frac{U_0 e^{-\delta t} \omega_0}{2j\omega'} (e^{j(\omega' t - \theta)} - e^{-j(\omega' t - \theta)}) = \\ = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t - \theta).$$

На рис. 9-18 изображены в функции от $\omega' t$ величины ri , u_L и u_C . Кривая тока i подобна кривой ri . Из полученных аналитических выражений, а также из рисунка видно, что процесс в этом случае является колебательным. Ток и напряжения на всех участках периодически меняют знак. Амплитуда колебаний убывает по показательному закону, следовательно, в цепи совершаются затухающие колебания тока и напряжений. Угловая частота затухающих колебаний равна

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}.$$

Соответственно, период затухающих колебаний определяется из формулы:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi : \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}.$$

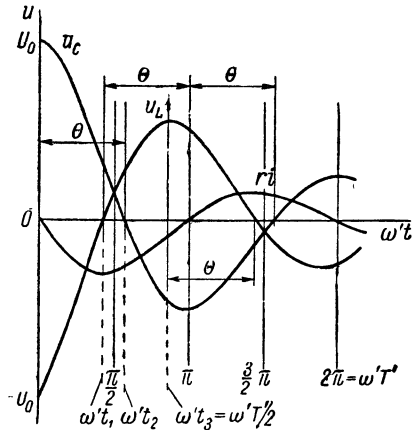


Рис. 9-18.

В предельном случае $r = 0$ имеем $\delta = 0$, $\omega' = \omega_0$ и $T' = T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$. В этом случае колебания будут незатухающими, так как энергия полей не рассеивается. Величину T_0 называют периодом незатухающих колебаний и выражающую его формулу

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$$

называют формулой Томсона. Угловая частота незатухающих колебаний $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, как мы видим, равна резонансной частоте

контура. Принимая во внимание, что при $\delta = 0$ имеем $\theta = \frac{\pi}{2}$, в этом случае получаем $i = -\frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t$, $u_L = -U_0 \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right)$ и $u_C = -U_0 \sin \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right)$. Кривые i , u_L и u_C для этого предельного случая изображены на рис. 9-19. Они полностью соответствуют характеру этих кривых при установившемся процессе в случае резонанса.

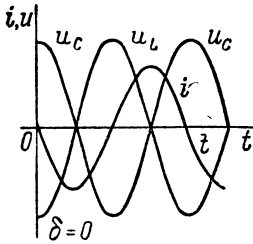


Рис. 9-19.

При $r \neq 0$ имеем, $\omega' < \omega_0$ и $T' > T_0$. В предельном случае, когда $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, т. е. $\delta = \omega_0$, получаем $\omega' = 0$ и $T' = \infty$. При этом колебательный разряд переходит в аperiodический. Этот предельный случай был рассмотрен ранее.

Быстроту затухания тока принято характеризовать так называемым декрементом колебаний Δ , равным отношению двух последующих амплитуд одного знака:

$$\Delta = Ie^{-\delta t} : Ie^{-\delta(t+T')} = e^{\delta T'}$$

а также логарифмическим декрементом колебаний, равным

$$\vartheta = \ln \Delta = \delta T'$$

При малом затухании $T' \approx T_0$ и

$$\vartheta = \delta T' \approx \delta T_0 = \frac{r}{2L} 2\pi \sqrt{LC} = \pi r : \sqrt{\frac{L}{C}} = \pi d.$$

При рассмотрении явления резонанса величина d была названа *затуханием контура*, так как при малом затухании она пропорциональна логарифмическому декременту колебаний.

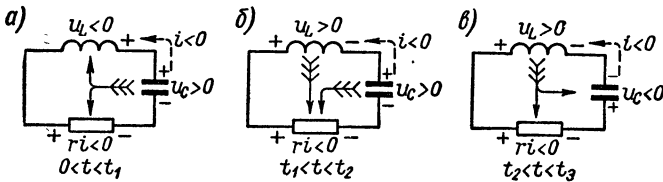


Рис. 9-20.

Остановимся несколько подробнее на процессах, происходящих при затухающем колебательном разряде конденсатора.

В интервале времени $0 < t < t_1$ (рис. 9-20, а), пока ток нарастает от нуля до максимального абсолютного значения, характер

процесса такой же, как и при аperiodическом разряде в интервале $0 < t < t_m$. Это видно из тождественности рисунков 9-17, а и 9-20, а. Точно так же характер процесса при колебательном разряде в интервале $t_1 < t < t_2$ (рис. 9-20, б) аналогичен характеру процесса при аperiodическом разряде в интервале $t_m < t < \infty$ (рис. 9-17, б). При аperiodическом разряде напряжение на конденсаторе и ток уменьшаются до нуля при $t = \infty$. Но при колебательном разряде к моменту t_2 , когда конденсатор полностью разрядится, ток в катушке сохраняет еще конечное значение, что является результатом сравнительно небольших потерь энергии в предыдущем интервале времени.

Сохранившаяся к моменту t_2 энергия в магнитном поле катушки и является причиной того, что процесс продолжается в последующее время. В интервале времени $t_2 < t < t_3$, где $t_3 = \frac{T'}{2}$, ток, поддерживаемый э. д. с. самоиндукции, продолжает протекать в том же направлении и заряжает конденсатор, причем напряжение на конденсаторе уже будет другого знака ($u_C < 0$). В этом промежутке времени (рис. 9-20, в) энергия из магнитного поля катушки частично переходит в энергию электрического поля конденсатора и частично превращается в тепло в сопротивлении r . К моменту $T'/2$ конденсатор заряжается до максимального абсолютного значения своего напряжения. В этот момент $i = 0$ и $u_L = -u_C$. В следующую половину периода энергетический процесс в точности повторяется, но знаки напряжений и тока будут противоположными их знакам в рассмотренном интервале $0 < t < \frac{T'}{2}$. Напряжение на конденсаторе в момент $t = T'$ будет в Δ раз меньше начального напряжения U_0 . Кривые на рис. 9-18 построены при $\Delta = 4$, чему соответствует $\vartheta \approx \ln \Delta = 1,4$ и $\theta = 102^\circ 55'$.

9-8. Включение цепи r, L, C под постоянное напряжение

Исследуем переходные процессы в цепи (r, L, C) при включении ее под постоянное напряжение $U = \text{const}$ при нулевых начальных условиях, т. е. при $i(-0) = 0$ и $u_C(-0) = 0$.

Уравнение для данной цепи

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = u(t),$$

как было показано в § 9-6, имеет решение:

$$i = i' + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

В данном случае ток установившегося режима будет равен нулю, т. е. $i' = 0$. Следовательно,

$$i = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t},$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = A_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Используя начальные условия для тока, имеем: $i(0) = 0 = A_1 + A_2$. Из уравнения цепи и из выражения для u_L , учитывая, что $u_C(0) = 0$ и $u(t) = U = \text{const}$, находим при $t = 0$:

$$L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = U.$$

Из полученных выражений находим произвольные постоянные A_1 и A_2 :

$$A_1 = -A_2 = \frac{U}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Таким образом,

$$i = \frac{U}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}),$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{U}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}) + U.$$

Сравнивая полученные выражения для тока i и напряжения u_C с выражениями для этих величин, приведенными в начале предыдущего параграфа для случая разряда конденсатора, видим, что закон изменения тока в обоих

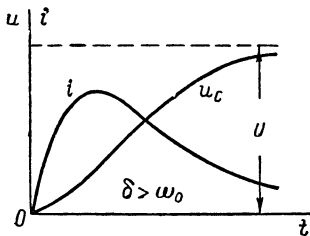


Рис. 9-21.

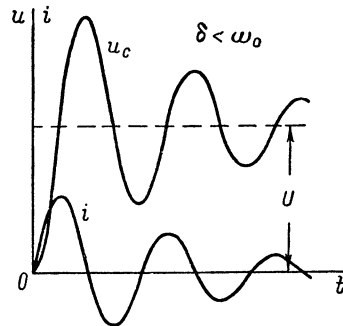


Рис. 9-22.

случаях один и тот же, и токи отличаются только знаками, так как теперь рассматривается процесс зарядки конденсатора. Напряжение же на конденсаторе при разряде изменяется от начального значения U_0 до нуля, а при зарядке от нуля до конечного значения U ; переход происходит по аналогичному закону.

Характер переходного процесса, как и при разряде конденсатора, зависит от того, будут ли корни характеристического уравнения вещественными (при $\delta \geq \omega_0$) или комплексными (при $\delta < \omega_0$). В первом случае процесс зарядки конденсатора аperiodический (рис. 9-21), а во втором случае колебательный (рис. 9-22).

9-9. Включение цепи r, L, C под синусоидальное напряжение

Исследуем переходные процессы в цепи (r, L, C) при включении ее под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Как и прежде (§ 9-6), общее решение для тока в цепи имеет вид

$$i = i' + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Ток i' в установившемся режиме, согласно изложенному в четвертой главе, равен:

$$i' = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где $I_m = \frac{U_m}{z}$, $z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, $\psi_i = \psi_u - \varphi$,

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

Произвольные постоянные A_1 и A_2 определим исходя из начальных условий. Пусть в начальный момент времени ток в цепи и напряжение на зажимах конденсатора равны нулю, т. е. $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$. Из выражения для тока i получаем:

$$0 = I_m \sin \psi_i + A_1 + A_2,$$

из уравнения цепи и из выражения для производных токов найдем:

$$L \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = U_m \sin \psi_u = L \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0} + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2.$$

Подставляя в это уравнение выражения:

$$\begin{aligned} U_m \sin \psi_u &= I_m z \sin(\psi_i + \varphi) = I_m (z \cos \varphi \sin \psi_i + z \sin \varphi \cos \psi_i) = \\ &= I_m (r \sin \psi_i + x \sin \psi_i) = I_m \left[r \sin \psi_i + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cos \psi_i \right] \end{aligned}$$

$$\text{и } L \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0} = \omega L I_m \cos \psi_i,$$

а также замечая, что $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ и $\frac{r}{L} = 2\delta$, получим:

$$- I_m \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i + I_m 2\delta \sin \psi_i = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением

$$0 = I_m \sin \psi_i + A_1 + A_2$$

и учитывая, что $2\delta + \alpha_2 = -\alpha_1$, найдем:

$$A_1 = -\frac{I_m}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\alpha_1 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i \right);$$

$$A_2 = \frac{I_m}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\alpha_2 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i \right).$$

Таким образом, для тока i получаем:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) - I_m \frac{\sin \psi_i}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) - \\ - I_m \frac{\cos \psi_i}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\omega_0^2}{\omega} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}),$$

и, соответственно,

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = -I_m \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) - \\ - I_m \frac{\sin \psi_i}{C(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) - I_m \frac{\cos \psi_i}{\omega C(\alpha_1 - \alpha_2)} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}).$$

Для комплексных корней характеристического уравнения, т. е. когда $\delta < \omega_0$, переходный процесс является колебательным. В этом случае, принимая во внимание, что при $\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\omega'$, целесообразно содержащиеся в вышеприведенных общих выражениях для i и u_C множители записать в виде

$$\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) = \frac{1}{\omega'} e^{-\delta t} \sin \omega' t, \\ \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) = \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \theta), \\ \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}) = \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t - \theta),$$

как это было сделано в § 9-7. При этом выражения для i и u_C примут вид

$$\left. \begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) - \\ &\quad - \left[\sin \psi_i \sin(\omega' t + \theta) + \frac{\omega_0}{\omega} \cos \psi_i \sin \omega' t \right] \frac{\omega_0}{\omega'} I_m e^{-\delta t}, \\ u_C &= -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) - \\ &\quad - \left[\sin \psi_i \sin \omega' t + \frac{\omega_0}{\omega} \cos \psi_i \sin(\omega' t - \theta) \right] \frac{I_m}{\omega' C} e^{-\delta t}. \end{aligned} \right\} (*)$$

Ограничимся рассмотрением случаев, когда $\omega = \omega'$ и ω и ω' близки, но не равны друг другу. При этом затухание будем предполагать малым, т. е. считать $\delta \ll \omega_0$.

Пусть $\omega = \omega'$. Принимая во внимание, что $\delta \ll \omega_0$, можем полагать $\omega' \approx \omega_0$ и $\theta \approx \pi/2$; при этом последние уравнения принимают вид

$$i \approx I_m (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t + \psi_i); \quad u_C \approx \frac{I_m}{\omega C} (1 - e^{-\delta t}) \cos(\omega t + \psi_i).$$

Характерная особенность переходного процесса заключается в том, что амплитуда колебаний тока и напряжения на конденсаторе постепенно нарастает от момента включения ($t = 0$) до своего установившегося значения (рис. 9-23).

Следует отметить, что амплитуда установившегося напряжения на конденсаторе $\frac{I_m}{\omega C} = \frac{U_m}{z} \cdot \frac{1}{\omega C}$ может значительно превзойти амплитуду приложенного напряжения U_m , так как частота $\omega = \omega'$ весьма близка к частоте резонанса ω_0 , и, следовательно, емкостное сопротивление конденсатора $x_C = 1/\omega C$ значительно превышает сопротивление z всей цепи при малом затухании.

Рассмотрим теперь случай, когда ω и ω' близки по величине, но не равны друг другу. Так как затухание мы приняли малой величиной, то в выражениях для i и u_C приближенно можно полагать $\frac{\omega_0}{\omega} \approx 1$, $\frac{\omega_0}{\omega'} \approx 1$. Принимая в первые после включения моменты времени $e^{-\delta t} \approx 1$, получим:

$$i \approx I_m [\sin(\omega t + \psi_i) - \sin(\omega' t + \psi_i)] = \\ = 2I_m \sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t + \psi_i\right);$$

$$u_C \approx \frac{I_m}{\omega C} [\cos(\omega t + \psi_i) - \cos(\omega' t + \psi_i)] = \\ = 2 \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t + \psi_i\right).$$

Эти выражения совпадают с полученными ранее в § 8-8, и, следовательно, в цепи возникают биения колебаний. Характер кривых был приведен на рис. 8-11. Постепенно, вследствие хотя и малого, но конечного затухания, биения прекратятся и в цепи установятся синусоидальные колебания установившегося режима, что видно из уравнений (*), так как множитель $e^{-\delta t}$ стремится к нулю.

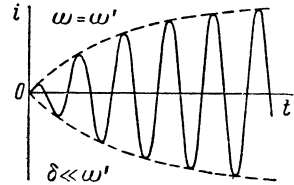


Рис. 9-23.

9-10. Переходные процессы при мгновенном изменении параметров участков цепи

В реальных цепях параметры участков цепи изменяются в течение конечных, хотя и весьма малых промежутков времени Δt . Однако при расчете, абстрагируясь от действительности, мы часто можем предполагать, что параметры участков изменяются мгновенно, т. е. скачком, на определенную величину. Это может иметь место при замыкании отдельных участков накоротко, при размыкании или включении ветвей цепи и т. д. Для расчета переходных процессов в этих случаях необходимо, так же как и во всех ранее рассмотренных случаях, составить дифференциальные уравнения цепи после коммутации и найти их общее решение.

В случае скачкообразного изменения сопротивления r цепи на конечную величину не возникает никаких особенностей в отношении определения произвольных постоянных интегрирования — токи в катушках и напряжения в конденсаторах в момент коммутации не изменяются.

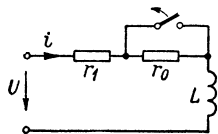


Рис. 9-24.

Некоторые особенности для определения произвольных постоянных интегрирования возникают при мгновенных изменениях индуктивностей или емкостей, что будет видно из дальнейшего.

Рассмотрим сначала вопрос о переходном процессе в цепи, при мгновенном изменении сопротивления r на конечную величину, на примере цепи, приведенной на рис. 9-24. Пусть приложенное к цепи напряжение постоянно, и в момент $t = 0$ происходит размыкание ключа, т. е. увеличение сопротивления цепи от r_1 до $r_1 + r_0$. Дифференциальное уравнение цепи после размыкания ключа имеет вид

$$(r_1 + r_0) i + L \frac{di}{dt} = u.$$

Его решение, в соответствии с изложенным в § 9-4, будет:

$$i = i' + Ae^{-\frac{r_1 + r_0}{L} t}.$$

Установившийся ток i' после размыкания ключа равен $i' = \frac{U}{r_1 + r_0} = I_2$. Для определения постоянной A воспользуемся условием $i(+0) = i(-0)$. Если до размыкания ключа в цепи протекал установившийся постоянный ток $I_1 = \frac{U}{r_1}$, т. е. $i(-0) = I_1$, то получаем:

$$i(+0) = I_1 = I_2 + A \text{ или } A = I_1 - I_2,$$

откуда

$$i = I_2 + (I_1 - I_2)e^{-\frac{r_1 + r_0}{L}t}.$$

На рис. 9-25 представлена кривая изменения тока i .

Рассмотрим теперь переходный процесс при скачкообразном изменении индуктивности на примере цепи, представленной на рис. 9-26, в которой в момент $t = 0$ происходит размыкание ключа.

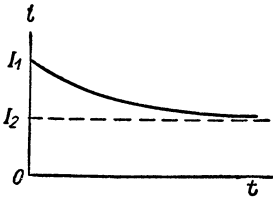


Рис. 9-25.

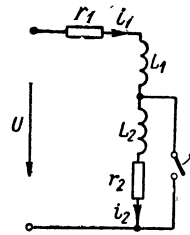


Рис. 9-26.

Дифференциальное уравнение цепи после размыкания ключа имеет вид:

$$(r_1 + r_2)i + (L_1 + L_2)\frac{di}{dt} = U$$

и имеет решение

$$i = i' + Ae^{-\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2}t} = i' + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (*)$$

Постоянный установившийся ток i' ограничивается сопротивлениями r_1 и r_2 и равен

$$i' = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования A мы не можем воспользоваться условием неизменности токов в катушках L_1 и L_2 в моменты $t = -0$ и $t = +0$. Действительно, в момент $t = -0$ токи в катушках были различны, а именно: $i_{1L}(-0) = \frac{U}{r_1} \neq 0$, т. е. до размыкания ключа в цепи протекал постоянный установившийся ток, который определялся сопротивлением r_1 . В катушке же L_2 ток отсутствовал и $i_{2L}(-0) = 0$, поскольку в ветви этой катушки имеется конечное сопротивление r_2 и весь ток проходил по ветви с ключом, имевшей сопротивление, равное нулю. После размыкания ключа в момент $t = +0$ токи в обеих катушках должны быть одинаковы. Следовательно, токи в катушках в момент

коммутации должны скачком измениться, что возможно только при появлении бесконечно больших напряжений на катушках.

Так как приложенное напряжение конечно, а также конечными остаются падения напряжения на сопротивлениях r_1 и r_2 вследствие конечных значений токов, то сумма напряжений на катушках остается конечной и, следовательно, эти бесконечно большие напряжения в момент коммутации можно считать равными и противоположными, т. е.

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \text{при } -0 < t < +0.$$

Интегрируя это равенство в пределах от $t = -0$ до $t = +0$, находим:

$$L_1 \int_{t=-0}^{t=+0} \frac{di_1}{dt} dt = -L_2 \int_{t=-0}^{t=+0} \frac{di_2}{dt} dt, \quad (**)$$

или

$$L_1 \int_{i_{1L}(-0)}^{i_{1L}(+0)} di_1 = -L_2 \int_{i_{2L}(-0)}^{i_{2L}(+0)} di_2,$$

т. е.

$$L_1 [i_{1L}(+0) - i_{1L}(-0)] = -L_2 [i_{2L}(+0) - i_{2L}(-0)],$$

или

$$L_1 \Delta i_1 = -L_2 \Delta i_2, \quad \text{или } \Delta \Psi_1 + \Delta \Psi_2 = 0.$$

Так как

$$i_{1L}(+0) = i_{2L}(+0) = i(+0) \quad \text{и} \quad i_{2L}(-0) = 0,$$

то

$$(L_1 + L_2) i(+0) = L_1 i_{1L}(-0).$$

Из последнего равенства, а также из равенства $\Delta \Psi_1 + \Delta \Psi_2 = 0$ видно, что в процессе коммутации осталась неизменной сумма потокоцеплений с обеими катушками.

Найдя из последнего выражения ток $i(+0)$:

$$i(+0) = i_{1L}(-0) \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{U}{r_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2},$$

определяем постоянную A из выражения (*):

$$\frac{U}{r_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{U}{r_1 + r_2} + A.$$

Таким образом,

$$i = i' + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{r_1 + r_2} + \left(\frac{U}{r_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} \right) e^{-\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} t}.$$

Предположение, что коммутация происходит за бесконечно малый промежуток времени ($\Delta t \rightarrow 0$), привело к появлению бесконечно больших напряжений на катушках, т. е. эти напряжения приняты вид *импульсов* бесконечно большой амплитуды, длящихся бесконечно малый промежуток времени ($\Delta t \rightarrow 0$) (рис. 9-27). Однако интегралы (***) этих импульсов за время коммутации имеют конечные значения и равны приращениям потокосцеплений в катушках $\Delta\Psi_1$ и $\Delta\Psi_2$.

Обратим внимание, что энергия, запасенная в магнитном поле первой катушки до коммутации

$$W_m(-0) = \frac{L_1}{2} [i_{1L}(-0)]^2 = \frac{L_1}{2} \left(\frac{U}{r_1}\right)^2,$$

больше энергии, запасенной в магнитных полях обеих катушек после коммутации:

$$\begin{aligned} W_m(+0) &= \frac{L_1 + L_2}{2} [i(+0)]^2 = \\ &= \frac{L_1}{2} \left(\frac{U}{r_1}\right)^2 \frac{L_1}{L_1 + L_2}. \end{aligned}$$

Разность этих энергий расходуется на необратимые процессы во время коммутации, хотя длительность коммутации бесконечно мала. Это возможно, так как на участках цепи развиваются бесконечно большие мощности.

Такие результаты явились итогом предельной идеализации явления. В действительности сопротивление ключа не может меняться скачком от нуля до бесконечности, так как большие напряжения между контактами ключа вызовут между ними электрическую искру или электрическую дугу. Кроме того, всякая катушка обладает распределенной емкостью между ее витками, так же как имеется емкость между расходящимися контактами ключа; поэтому процесс коммутации совершается в конечный промежуток времени Δt , в течение которого завершается быстро протекающий переходный процесс от момента начала до момента конца коммутации. Этот переходный процесс, в зависимости от соотношений параметров, может быть аperiодическим или колебательным с очень высокой частотой, и разность энергии $W_m(-0) - W_m(+0)$ расходуется в сопротивлениях цепи, в частности, в сопротивлениях между контактами ключа, или на излучение при весьма высокой частоте. Этот процесс,

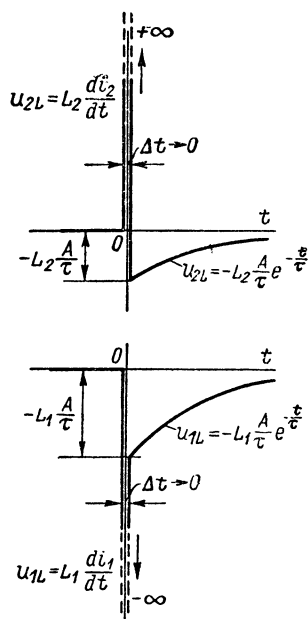


Рис. 9-27.

проходящий за время Δt , при вышеуказанной идеализации мы не рассматриваем. Но если его рассмотреть, то будут справедливы сформулированные в § 9-3 физические условия коммутации — неизменность токов в катушках и напряжений на конденсаторах, а также неизменность энергий, запасенных в катушках и конденсаторах.

Интересно отметить, что, соблюдая условие $L_1/r_1 = L_2/r_2$, мы получим $A = 0$, т. е. новое установившееся значение постоянного тока получается сразу после коммутации. Это обстоятельство может быть использовано, если нам желательно в весьма короткий промежуток времени Δt изменить постоянный ток в катушке. Естественно, изоляция катушек должна выдерживать импульсы высокого напряжения.

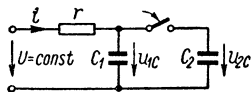


Рис. 9-28.

Рассмотрим процесс в цепи, изображенной на рис. 9-28 при замыкании ключа, т. е. процесс при скачкообразном изменении емкости от C_1 до $C_1 + C_2$, предполагая, что ветви с конденсаторами C_1 и C_2 не имеют индуктивностей и сопротивлений. Будем считать, что до замыкания ключа конденсатор C_1 был заряжен до напряжения U , а конденсатор C_2 не был заряжен.

Дифференциальное уравнение цепи после замыкания ключа примет вид

$$ri + u_c = U, \text{ или } r(C_1 + C_2) \frac{du_c}{dt} + u_c = U$$

и имеет решение:

$$u_c = u'_c + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (*)$$

где $u'_c = U$ и $\tau = r(C_1 + C_2)$.

Для определения A нельзя воспользоваться условием неизменности напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 в моменты $t = -0$ и $t = +0$, так как при $t = -0$ было $u_{1C}(-0) = U \neq 0$ и $u_{2C}(-0) = 0$, а при $t = +0$ $u_{1C}(+0) = u_{2C}(+0)$.

Следовательно, напряжения на конденсаторах в момент коммутации должны скачком измениться, что возможно только при появлении в ветвях C_1 и C_2 импульсов тока бесконечной амплитуды и бесконечно малой длительности. Так как суммарный ток i остается конечным, то эти импульсы равны по амплитуде и противоположны по знаку, т. е.

$$C_1 \frac{du_{1C}}{dt} = -C_2 \frac{du_{2C}}{dt} \text{ при } -0 < t < +0.$$

Интегрируя это равенство в пределах от $t = -0$ до $t = +0$, находим:

$$C_1 \int_{u_{1C}(-0)}^{u_{1C}(+0)} du_{1C} = -C_2 \int_{u_{2C}(-0)}^{u_{2C}(+0)} du_{2C},$$

т. е.

$$C_1 [u_{1C}(+0) - u_{1C}(-0)] = -C_2 [u_{2C}(+0) - u_{2C}(-0)],$$

или

$$C_1 \Delta u_{1C} = -C_2 \Delta u_{2C}, \text{ или } \Delta q_1 + \Delta q_2 = 0.$$

Так как $u_{1C}(+0) = u_{2C}(+0) = u_C(+0)$ и $u_{2C}(-0) = 0$, то

$$(C_1 + C_2) u_C(+0) = C_1 u_{1C}(-0).$$

Из последнего равенства, а также из равенства $\Delta q_1 + \Delta q_2 = 0$ видно, что в процессе коммутации *осталась неизменной сумма зарядов обоих конденсаторов*.

Найдя из последнего выражения напряжение $u_C(+0)$:

$$u_C(+0) = u_{1C}(-0) \frac{C_1}{C_1 + C_2} = U \frac{C_1}{C_1 + C_2},$$

определим постоянную A из выражения (*). Получим:

$$u_C = u_C' + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = U + U \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Легко убедиться, что энергия конденсатора C_1 до коммутации $W_{\text{с}}(-0) = \frac{C_1 U^2}{2}$ больше энергии, запасенной в обоих конденсаторах после коммутации

$$W_{\text{с}}(+0) = \frac{C_1 + C_2}{2} [u_C(+0)]^2 = \frac{C_1 U^2}{2} \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

В действительности физические процессы при коммутации происходят и в этой цепи за конечный промежуток времени и имеют характер, аналогичный рассмотренному в предыдущем примере.

9-11. Расчет переходных процессов в сложной цепи

Общую методику расчета переходных процессов в случае сложной электрической цепи рассмотрим на примерах цепей, представленных на рис. 9-29 и 9-30.

1) Применим метод контурных токов для цепи (рис. 9-29), образовавшейся после размыкания ключа. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} (r_1 + r_3) i_1 + (L_1 + L_3) \frac{di_1}{dt} + r_3 i_2 + L_3 \frac{di_2}{dt} &= e_1; \\ r_3 i_1 + L_3 \frac{di_1}{dt} + (r_2 + r_3) i_2 + L_3 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt + u_C(0) &= e_2. \end{aligned} \right\} (*)$$

Решим эту систему уравнений относительно контурного тока i_1 . Обозначим операцию дифференцирования буквой $D = \frac{d}{dt}$ и операцию интегрирования от 0 до t через $\frac{1}{D}$. Тогда, как известно из курса математики, в случае линейных уравнений можно, оперируя этим

символом как некоторой величиной, решить систему уравнений относительно одной неизвестной. Имеем:

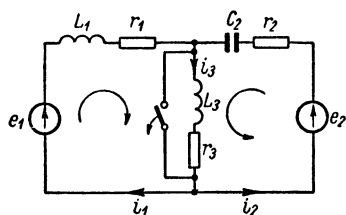


Рис. 9-29.

$$\begin{aligned} [r_1 + r_3 + (L_1 + L_3)D] i_1 + \\ + (r_3 + L_3D) i_2 &= e_1; \\ (r_3 + L_3D) i_1 + \\ + \left(r_2 + r_3 + L_3D + \frac{1}{C_2D} \right) i_2 &= \\ = e_2 - u_C(0). \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на $r_2 + r_3 + L_3D + \frac{1}{C_2D}$, а второе на $r_3 + L_3D$ и вычтем из первого второе. Получим:

$$\begin{aligned} [r_1 + r_3 + (L_1 + L_3)D] \left(r_2 + r_3 + L_3D + \frac{1}{C_2D} \right) i_1 - (r_3 + L_3D)^2 i_1 &= \\ = \left(r_2 + r_3 + L_3D + \frac{1}{C_2D} \right) e_1 - (r_3 + L_3D) [e_2 - u_C(0)], \end{aligned}$$

или, обозначая

$$\begin{aligned} L_1 L_3 &= a_3, \quad L_1(r_2 + r_3) + L_3(r_1 + r_2) = a_2, \\ (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) + \frac{L_1 + L_3}{C_2} &= a_1, \quad \frac{r_1 + r_3}{C_2} = a_0, \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} a_3 D^3 i_1 + a_2 D^2 i_1 + a_1 D i_1 + a_0 i_1 &= \\ = L_3 D^2 e_1 + (r_1 + r_3) D e_1 - L_3 D^2 [e_2 - u_C(0)] - r_3 D [e_2 - u_C(0)]. \end{aligned}$$

Имея в виду, что

$$D^3 i = \frac{d^3 i}{dt^3}, \quad D^2 i = \frac{d^2 i}{dt^2}, \quad D i = \frac{di}{dt} \quad \text{и} \quad D A = \frac{dA}{dt} = 0 \quad (A = \text{const}),$$

получим искомое дифференциальное уравнение относительно тока i_1 :

$$a_3 \frac{d^3 i_1}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + a_1 \frac{d i_1}{dt} + a_0 i_1 = b_2 \frac{d^2 e_1}{dt^2} + b_1 \frac{d e_1}{dt} + e_1 - \\ - c_2 \frac{d^2 e_3}{dt^2} - c_1 \frac{d e_3}{dt}.$$

Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения примет вид

$$a_3 \alpha^3 + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Данное уравнение имеет три корня α_1 , α_2 , α_3 и, соответственно, для преходящего тока i_1' можем написать:

$$i_1'' = A_{11} e^{\alpha_1 t} + A_{12} e^{\alpha_2 t} + A_{13} e^{\alpha_3 t}.$$

Так же, как в § 9-2, первый индекс у постоянных A_{ks} относится к искомому току, а второй к корням уравнения.

Следовательно, полное решение для тока i_1 будет:

$$i_1 = i_1' + A_{11} e^{\alpha_1 t} + A_{12} e^{\alpha_2 t} + A_{13} e^{\alpha_3 t}.$$

Как было отмечено в § 9-3, для определения произвольных постоянных A_{11} , A_{12} , A_{13} необходимо знать i_1 и его производные $d i_1 / dt$ и $d^2 i_1 / dt^2$ в момент времени $t = 0$, которые выражаются через величины токов в катушках и напряжений на конденсаторах до размыкания ключа: $i_{1L}(-0)$, $i_{3L}(-0)$ и $u_C(-0)$, а также через значение тока i_1' установившегося режима при $t = +0$.

Величины токов и напряжений в установившемся режиме определяются по методам, изложенным в пятой и восьмой главах, в зависимости от вида э. д. с. e_1 и e_2 . Величины $i_1(-0)$, $i_2(-0)$, $u_C(-0)$ будем считать заданными, так как их легко рассчитать для цепи с замкнутым ключом.

В момент коммутации остаются неизменными токи в индуктивных катушках. Поскольку $i_{1L} = i_1$, и $i_{3L} = i_2 + i_1$, то имеем: $i_1(+0) = i_{1L}(-0)$, $i_1(+0) + i_2(+0) = i_{3L}(0) = 0$ или $i_2(+0) = -i_1(+0)$. Для напряжения на конденсаторе получим $u_C(+0) = u_C(-0)$.

Заметим, что в отношении начальных условий здесь не возникает особенностей, отмеченных при рассмотрении второго примера в предыдущем параграфе. Хотя в данном случае также размыкается ключ, замыкавший ветвь с индуктивностью, но требование, чтобы после размыкания ключа токи в обеих катушках стали равными друг другу, отсутствует, так как есть путь для тока через вторую ветвь, в которой нет индуктивности и в которой ток может меняться скачком.

Для определения производных тока i_1 в этом случае проще всего поступить следующим образом. Вычитая второе уравнение (*) из

первого, получим уравнение согласно второму закону Кирхгофа по контуру, охватывающему оба источника э. д. с.:

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt - u_C(0) - r_2 i_2 = e_1 - e_2.$$

Отсюда определим $L_1 \frac{di_1}{dt}$ при $t = 0$.

$$L_1 \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0} = e_1(0) - e_2(0) - r_1 i_1(0) + u_C(0) + r_2 i_2(0).$$

Продифференцировав последнее уравнение, получим:

$$e_1' - e_2' = r_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - \frac{i_2}{C} + r_2 \frac{di_2}{dt}.$$

В этом уравнении в момент $t = 0$ неизвестны $\frac{d^2 i_1}{dt^2}$ и $\frac{di_2}{dt}$.

Определим $\left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0}$ из второго контурного уравнения (*):

$$\left(L_3 \frac{di_2}{dt} \right)_{t=0} = e_2(0) - r_3 [i_1(0) + i_2(0)] - i_2(0) r_2 - \left(L_3 \frac{di_1}{dt} \right)_{t=0} - u_C(0).$$

Подставляя $\left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0}$ в предыдущее выражение, получим значение второй производной тока i_1 при $t = 0$.

Таким образом, для определения постоянных имеем:

$$\begin{aligned} i_1(0) &= i_1'(0) + A_{11} + A_{12} + A_{13}, \\ \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0} &= \left(\frac{di_1'}{dt} \right)_{t=0} + \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13}, \\ \left(\frac{d^2 i_1}{dt^2} \right)_{t=0} &= \left(\frac{d^2 i_1'}{dt^2} \right)_{t=0} + \alpha_1^2 A_{11} + \alpha_2^2 A_{12} + \alpha_3^2 A_{13}, \end{aligned}$$

где величины, стоящие слева, уже определены. Решая совместно эти три уравнения, найдем постоянные A_{11} , A_{12} , A_{13} .

Для определения тока i_2 , решение которого можно записать в виде

$$i_2 = i_2' + A_{21} e^{\alpha_1 t} + A_{22} e^{\alpha_2 t} + A_{23} e^{\alpha_3 t},$$

можно произвести аналогичные расчеты, причем выражение для $\left(\frac{d^2 i_2}{dt^2} \right)_{t=0}$ легко определить по известной $\left(\frac{d^2 i_1}{dt^2} \right)_{t=0}$ и по остальным величинам, определенным выше для i_1 .

2) В качестве примера расчета цепи со взаимной индукцией рассмотрим схему цепи, представленную на рис. 9-30. Уравнения для этой цепи имеют вид

$$\begin{aligned} i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= u, \\ M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

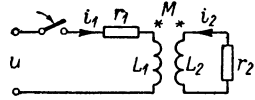


Рис. 9-30.

Обозначая $\frac{d}{dt} = D$, решим систему относительно i_1 . Получим:

$$(r_1 + L_1 D)(r_2 + L_2 D) i_1 - M^2 D^2 i_1 = (r_2 + L_2 D) u,$$

или

$$(L_1 L_2 - M^2) D^2 i_1 + (r_1 L_2 + r_2 L_1) D i_1 + r_1 r_2 i_1 = L_2 D u + r_2 u.$$

Учитывая, что $D^n i = \frac{d^n i}{dt^n}$, имеем:

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (r_1 L_2 + r_2 L_1) \frac{d i_1}{dt} + r_1 r_2 i_1 = r_2 u + L_2 \frac{d u}{dt}. \quad (**)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(L_1 L_2 - M^2) \alpha^2 + (r_1 L_2 + r_2 L_1) \alpha + r_1 r_2 = 0,$$

откуда для двух его корней α_1 и α_2 получаем:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{2 L_1 L_2 (1 - k^2)} \pm \sqrt{\left[\frac{r_1 L_2 + r_2 L_1}{2 (1 - k^2) L_1 L_2} \right]^2 - \frac{r_1 r_2}{L_1 L_2 (1 - k^2)}},$$

принимая во внимание, что $M^2 = k^2 L_1 L_2$.

Пусть включение производится при нулевых начальных условиях под действие постоянного напряжения $u = U = \text{const}$. Тогда из уравнения (**), полагая в нем все производные и токов и напряжений равными нулю, получим ток установившегося режима $i_1' = \frac{U}{r_1}$, что непосредственно вытекает также из первого уравнения.

Таким образом, для тока i_1 имеем выражение:

$$i_1 = i_1' + i_1'' = \frac{U}{r_1} + A_{11} e^{\alpha_1 t} + A_{12} e^{\alpha_2 t}.$$

Произвольные постоянные определим, имея в виду, что

$$i_1(+0) = i_1(-0) = 0, \quad i_2(+0) = i_2(-0) = 0.$$

Из второго уравнения для момента $t = 0$ находим:

$$\begin{aligned} r_2 i_2(0) = 0 \text{ и } M \left(\frac{d i_1}{d t} \right)_{t=0} &= -L_2 \left(\frac{d i_2}{d t} \right)_{t=0}, \text{ или } \left(\frac{d i_2}{d t} \right)_{t=0} = \\ &= -\frac{M}{L_2} \left(\frac{d i_1}{d t} \right)_{t=0}. \end{aligned}$$

Подставив последнее в уравнение для первого контура, найдем при $t = 0$:

$$\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right) \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = U, \text{ или } \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{U}{L_1(1-k^2)}.$$

Таким образом, при $t = 0$ имеем:

$$i_1(0) = 0 = \frac{U}{r} + A_{11} + A_{12},$$

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12},$$

откуда, определив A_{11} и A_{12} , для i_1 получим:

$$i_1 = \frac{U}{r_1} + \frac{U}{L_1(1-k^2)(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) + \frac{U}{r_1(\alpha_1 - \alpha_2)} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}).$$

Имея в виду, что $i_2' = 0$, получаем:

$$i_2 = A_{21} e^{\alpha_1 t} + A_{22} e^{\alpha_2 t}.$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$i_2(0) = 0, \quad \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{M}{L_2} \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{UM}{L_1 L_2 (1-k^2)}.$$

Следовательно,

$$0 = A_{21} + A_{22} \quad \text{и} \quad -\frac{UM}{L_1 L_2 (1-k^2)} = \alpha_1 A_{21} + \alpha_2 A_{22},$$

откуда

$$A_{21} = -A_{22} = -\frac{UM}{L_1 L_2 (1-k^2)(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$i_2 = -\frac{UM}{L_1 L_2 (1-k^2)(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}).$$

Зависимости i_1 и i_2 от времени приведены на рис. 9-31.

Как видно из выражения для производной тока i_1 , в первый момент времени ток i_1 растет быстрее по сравнению со случаем, когда вторичный контур разомкнут или когда $k = 0$. Поскольку производная тока i_2 знакопеременна, то убыстрение процесса нарастания тока i_1 происходит не все время. Спустя некоторый промежуток времени, когда производная тока i_2 меняет знак, наличие вторичного контура, наоборот, приводит к замедлению роста тока i_1 в последующие поздние моменты времени.

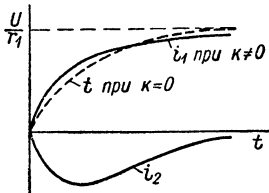


Рис. 9-31.

Для сравнения на рис. 9-31 приведена пунктиром зависимость $i_1(t)$ при отсутствии магнитной связи.

9-12. Расчет переходных процессов в сложных цепях с помощью вычислительных машин непрерывного действия

Приведенные в предыдущем параграфе примеры расчета переходных процессов показывают, что даже для цепи сравнительно простой конфигурации решение системы дифференциальных уравнений становится весьма трудоемким. В связи с этим широкое распространение получают различные способы, облегчающие процесс решения. Одним из них является использование электронных вычислительных машин непрерывного действия, где интегрирование, дифференцирование и суммирование производятся непосредственно при помощи специальных электрических цепей, о которых некоторые сведения мы приведем в § 13-6.

Для решения задачи расчета переходных процессов в сложных линейных (и нелинейных) цепях при помощи таких вычислительных машин удобно дифференциальные уравнения сложной цепи представить так, чтобы в них слева от знака равенства была записана производная неизвестной величины, а справа от знака равенства — алгебраическая сумма остальных величин, т. е. в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, a),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, a).$$

.....

В связи с этим уравнения цепи, составленные по первому и второму законам Кирхгофа, например, цепи, изображенной на рис. 9-29 (при обратных направлениях токов i_2 и i_3),

$$i_2 = i_1 + i_3, \quad r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 + u_{2C} = e_1 - e_2,$$

$$r_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + r_2 i_2 + u_{2C} = -e_2,$$

где $i_2 = C \frac{du_{2C}}{dt}$, следует записать в виде

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} (e_1 - e_2) - \frac{r_2}{L_1} i_2 - \frac{1}{L_1} u_{2C} - \frac{r_1}{L_1} i_1,$$

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L_3} e_2 - \frac{r_2}{L_3} i_2 - \frac{1}{L_3} u_{2C} - \frac{r_3}{L_3} i_3,$$

$$\frac{du_{2C}}{dt} = \frac{1}{C} i_2,$$

$$i_2 = i_1 + i_3.$$

На рис. 9-32 показаны отдельные блоки вычислительной машины, где происходят операции суммирования и интегрирования. Например, в блоке *A* производится умножение входных величин на соответствующие коэффициенты, образуются члены, стоящие справа от знака равенства первого уравнения, затем эти члены суммируются и интегрируются, в результате чего на выходе блока *A* мы получаем ток i_1 .

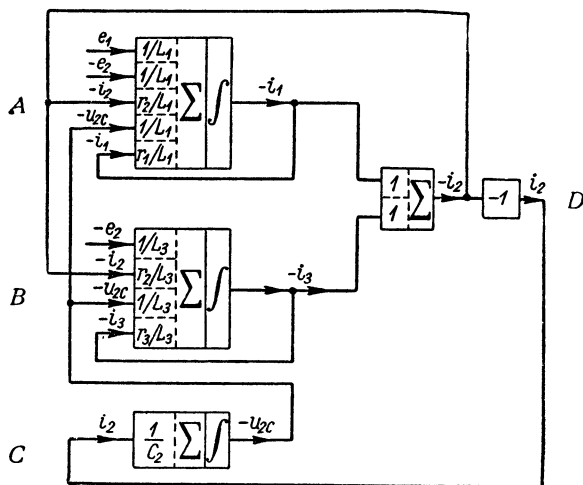


Рис. 9-32.

Соответственные операции выполняют блоки *B* и *C* для второго и третьего уравнений. В блоке *D* производится операция суммирования токов i_1 и i_3 в соответствии с последним уравнением.

Обратим внимание, что токи i_1 и i_3 , а также u_{2c} на выходе блоков *A*, *B* и *C* имеют отрицательный знак. Это объясняется тем, что входящие в состав блоков *A*, *B*, *C* усилители на выходе дают усиленную входную величину с обратным знаком. Начальные значения токов $i_1 (+0)$ и $i_3 (+0)$, а также начальное значение напряжения $u_{2c} (+0)$ в каждом интеграторе задаются отдельно при помощи специального входа для начальных значений.



РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

10-1. Операторное изображение функций, их производных и интегралов

В предыдущей главе был изложен классический метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях с постоянными параметрами. Такие процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Эти уравнения могут быть проинтегрированы также операторным методом, что показал в 1862 г. М. Ващенко-Захарченко.

Хевисайд применил этот метод в конце предыдущего столетия к расчету переходных процессов в электрических цепях. При этом Хевисайд, не ссылаясь на предыдущие математические работы в этой области, не приводил и математического обоснования метода. Существенный вклад в развитие операторного метода, а также его практических приложений в последующем был сделан рядом ученых, среди которых видное место принадлежит советским ученым: В. С. Игнатовскому, А. М. Эфросу, А. М. Данилевскому, М. Ю. Юрьеву, М. И. Конторовичу, А. И. Лурье, К. А. Кругу и др.

При использовании операторного метода действительные функции времени, называемые оригиналами, заменяют их операторными изображениями. Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью некоторого функционального преобразования. Это преобразование выбирается так, чтобы операции дифференцирования и интегрирования оригиналов заменялись алгебраическими операциями над их изображениями. В таком случае дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические уравнения для их изображений.

Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением устанавливается с помощью *интеграла Лапласа*:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

где $p = \sigma + j\eta$ — комплексное число. Таким образом, операторное изображение действительной функции времени является функцией комплексного числа p .

Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, функция $f(t)$ должна удовлетворять определенным условиям. Она должна удовлетворять условиям Дирихле, т. е. за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Кроме того, мы будем считать, что при $t > 0$ удовлетворяется условие $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$, где A и α — некоторые положительные числа. Иными словами, можно выбрать A и α так, чтобы модуль функции $f(t)$ возрастал медленнее, чем $Ae^{\alpha t}$. Все реальные токи и напряжения удовлетворяют этим условиям. Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, необходимо полагать $\sigma > \alpha$.

Комплексное число p называют оператором.

Условимся записывать *преобразование Лапласа* также в виде

$$F(p) = \mathcal{L} [f(t)].$$

Соответствие между оригиналом и изображением записывают условно в виде

$$F(p) \doteq f(t).$$

Заметим, что по определению преобразование Лапласа применимо начиная с момента $t = +0$. Далее, обозначая начальное значение функции и ее производных через $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, будем понимать под ними их значения при $t = +0$.

Существует обратное функциональное преобразование, дающее возможность определить оригинал по его изображению. Такое преобразование, носящее название *обратного преобразования Лапласа*, имеет вид

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p) e^{pt} dp = f(t), \text{ где } p = \sigma_0 + j\eta.$$

Обратное преобразование Лапласа кратко записывается в виде

$$\mathcal{L}^{-1} [F(p)] = f(t).$$

В электротехнической практике распространено также функциональное преобразование, называемое *преобразованием по Карсону*, имеющее вид

$$p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) = \Phi(p).$$

Достоинством преобразования по Карсону является одинаковость размерностей оригинала и изображения. Это видно из того, что произведение pt должно быть безразмерным. В случае же преобразования по Лапласу размерность изображения равна размерности оригинала, умноженной на размерность времени.

Достоинством преобразования по Лапласу является его соответствия с преобразованием Фурье, на котором основывается широко используемый в настоящее время частотный метод анализа цепей и который будет изложен в одиннадцатой главе. Исходя из последнего соображения, а также из того, что в значительной части современной литературы применяется преобразование по Лапласу, мы в дальнейшем будем также пользоваться этим преобразованием.

Получим изображение производной $\frac{d}{dt} [f(t)] = f'(t)$. Имеем:

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая что согласно наложенным на $f(t)$ условиям $[e^{-pt} f(t)]_{t=\infty} = 0$, получаем:

$$f'(t) \doteq \left[e^{-pt} f(t) \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0).$$

В частном случае при нулевом начальном условии, когда $f(0) = 0$, для изображения производной имеем:

$$f'(t) \doteq pF(p).$$

Изображение второй производной имеет вид:

$$f''(t) \doteq p [pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} \right].$$

Соответственно, для производной порядка n получаем:

$$f^n(t) \doteq p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \frac{f''(0)}{p^3} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right].$$

В частности, при нулевых начальных условиях, если при $t = 0$ сама функция $f(t)$ и все ее производные до $(n - 1)$ -ой включительно равны нулю, имеем:

$$f^n(t) \doteq p^n F(p).$$

Найдем теперь изображение интеграла $\psi(t) = \int_0^t f(t) dt$.

Используя определение изображения функции $\psi(t)$ с помощью интеграла Лапласа и интегрируя по частям, получаем:

$$\Psi(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-pt} dt = \left| -\psi(t) \frac{1}{p} e^{-pt} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \psi'(t) e^{-pt} dt.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как функция $\psi(t)$ должна удовлетворять условию $|e^{-pt}\psi(t)|_{t=\infty} = 0$, а при $t = 0$ будет

$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt = 0$. Второе слагаемое равно $\frac{1}{p} F(p)$, так как $\psi'(t) = f(t)$ и $f(t) \doteq F(p)$. Таким образом, изображение интеграла, взятого в пределах от 0 до t , будет:

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Итак мы убедились, что, изображая функции времени $f(t)$ с помощью интеграла Лапласа, мы операции дифференцирования и интегрирования этих функций заменяем алгебраическими операциями над изображениями этих функций.

В дифференциальных уравнениях электрической цепи с производной по времени мы чаще всего встречаемся в выражении для напряжения u_L на катушке $u_L = L \frac{di}{dt}$. Обозначая операторное изображение тока $i(t)$ в виде $I(p)$, получаем, согласно вышеизложенному, операторное изображение для $u_L(t)$:

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0).$$

С интегралом мы чаще всего встречаемся в выражении напряжения u_C на конденсаторе: $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0)$.

Изображение первого слагаемого, согласно изложенному, будет $\frac{I(p)}{pC}$. Второе слагаемое $u_C(0)$ является постоянной величиной и имеет изображение

$$\int_0^{\infty} u_C(0) e^{-pt} dt = \left| -\frac{u_C(0)}{p} e^{-pt} \right|_0^{\infty} = \frac{u_C(0)}{p}.$$

Следовательно, в общем случае при ненулевом начальном условии изображение напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ имеет вид

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Таким образом, при составлении уравнений цепи в операторной форме автоматически будут учитываться все физические начальные условия — значения токов в катушках и напряжения на конденсаторах при $t = 0$.

10-2. Примеры изображений функций

Изображение постоянной величины A имеет вид

$$\int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = \left| -\frac{A}{p} e^{-pt} \right|_0^{\infty} = \frac{A}{p},$$

т. е. $\mathcal{L}[A] = \frac{A}{p}$, или $A \doteq \frac{A}{p}$.

Пусть $f(t) = e^{\alpha t}$, тогда

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \left| -\frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}$$

и, следовательно,

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}.$$

Если $\alpha t = j(\omega t + \psi)$, то

$$e^{\alpha t} = e^{j\psi} e^{j\omega t} \doteq \frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}.$$

Следовательно,

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \doteq \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

На основе этих результатов можно составить следующую таблицу соответствия некоторых функций (оригиналов) и их изображений:

Оригинал	Изображение
A	$\frac{A}{p}$
$Ae^{\alpha t}$	$\frac{A}{p - \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \alpha} = \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$\text{sh } \alpha t = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{p + \alpha} \right) = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
$\text{ch } \alpha t = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \alpha} + \frac{1}{p + \alpha} \right) = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$	$\frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p + \delta}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$
$te^{-\delta t}$	$\frac{1}{(p + \delta)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$

В приведенной таблице даны соотношения между оригиналами и их изображениями при преобразовании Лапласа. При использовании преобразования Карсона следует умножать все изображения на p . В этом случае изображением постоянной величины будет сама постоянная величина. Обратим внимание на то, что кратные полюсы в выражении для $F(p)$ изображают функции, в которых время t входит множителем (последние два выражения в таблице).

Найдем изображение функции, смещенной во времени на величину x , при условии, что при $t < 0$ имеем $f(t) = 0$. Если $f(t) \doteq$

$\doteq F(p)$, то для изображения той же функции при $t' = t - x$ получим:

$$\begin{aligned} f(t-x) &\doteq \int_0^{\infty} f(t-x) e^{-pt} dt = e^{-px} \int_0^{\infty} f(t-x) e^{-pt} e^{px} dt = \\ &= e^{-px} \int_0^{\infty} f(t') e^{-pt'} dt' = e^{-px} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = e^{-px} F(p), \end{aligned}$$

т. е.

$$f(t-x) \doteq e^{-px} F(p).$$

Найдем оригинал, соответствующий смещению изображения в комплексной плоскости на комплексное число a .

Пусть

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \doteq f(t).$$

Тогда

$$F(p+a) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p+a)t} dt = \int_0^{\infty} [f(t) e^{-at}] e^{-pt} dt \doteq f(t) e^{-at},$$

т. е.

$$f(t) e^{-at} \doteq F(p+a).$$

Подробные таблицы соответствия оригиналов и изображений приведены в специальных справочниках (например, В. А. Диткин и П. И. Кузнецов «Справочник по операционному исчислению»).

10-3. Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи для действительных токов имеет вид

$$\sum i_k = 0.$$

Так как ток i_k изображается с помощью интеграла Лапласа, а интеграл суммы равен сумме интегралов от слагаемых этой суммы, то первый закон Кирхгофа в операторной форме записывается в виде

$$\sum I_k(p) = 0.$$

Соответственно, второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи:

$$\sum e_k = \sum u_k,$$

где e_k — сумма э. д. с. источников энергии в k -й ветви и u_k — напряжение на k -й ветви, записывается в операторной форме:

$$\sum E_k(p) = \sum U_k(p).$$

Естественно, что при составлении уравнений Кирхгофа в операторной форме необходимо задаться положительными направлениями всех токов и соблюдать все правила знаков, установленные ранее при составлении законов Кирхгофа для действительных функций времени. В общем случае для ветви, содержащей все три элемента (r , L , C), имеем:

$$u_k = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt + u_{Ck}(0),$$

поэтому, согласно § 10-1, с учетом ненулевых начальных условий получим:

$$U_k(p) = r_k I_k(p) + pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{I_k(p)}{pC_k} + \frac{u_{Ck}(0)}{p},$$

или

$$U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} = I_k(p) \left(r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} \right).$$

Величину

$$r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} = Z_k(p)$$

называют обобщенным сопротивлением ветви, или, иначе, операторным сопротивлением ветви.

Окончательно при этом операторная запись законов Кирхгофа примет вид

$$\sum I_k(p) = 0,$$

$$\sum E_k(p) = \sum \left[I_k(p) Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right].$$

Ток в k -й ветви и падение напряжения в этой ветви в операторной форме связаны соотношением:

$$I_k(p) = \frac{U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p}}{Z_k(p)},$$

которое представляет собою закон Ома, обобщенный на случай переходного процесса. В частном случае при нулевых начальных условиях, т. е. при $i_{Lk}(0) = 0$ и $u_{Ck}(0) = 0$, имеем:

$$I_k(p) = \frac{U_k(p)}{Z_k(p)} = \frac{U_k(p)}{r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k}}.$$

Заметим, что структуры записи операторного сопротивления ветви и комплексного сопротивления этой же ветви

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}$$

тождественны, и выражение для комплексного сопротивления Z_k можно получить через операторное сопротивление $Z_k(p)$ путем замены p на $j\omega$, т. е. $Z_k = Z_k(j\omega)$. В частности, полагая $p = 0$, получим сопротивление ветви постоянному току.

Сопоставляя выражения законов Кирхгофа в операторной форме с их выражением в комплексной форме:

$$\sum I_k = 0 \text{ и } \sum \dot{E}_k = \sum I_k Z_k,$$

где комплексы I_k , Z_k содержат частоту ω только с множителем j , мы видим, что при нулевых начальных условиях законы Кирхгофа в операторной форме одинаковы по виду с этими законами в комплексной форме. Поэтому при нулевых начальных условиях методы расчета любых сложных цепей при переходных процессах операторным методом аналогичны методам расчета установившихся режимов комплексным методом. В частности, при нулевых начальных условиях входное операторное сопротивление сколь угодно сложного пассивного двухполюсника можно получить из комплексного сопротивления этого двухполюсника заменой $j\omega$ на p .

В случае ненулевых начальных условий мы можем второй закон Кирхгофа для всех контуров записать в виде

$$\sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0) - \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p} = \sum I_k(p) Z_k(p).$$

Рассматривая члены $\sum L_k i_k(0)$ и $-\sum \frac{u_{Ck}(0)}{p}$ как э. д. с. добавочных источников энергии в контурах (рис. 10-1), мы можем с их учетом сохранить все те же общие методы расчета сложных цепей. В частности, можно воспользоваться методом наложения и рассчитать процесс в цепи сначала при нулевых начальных условиях, а затем наложить на него процесс, возникающий только под действием одних добавочных э. д. с., определяемых начальными токами в катушках и начальными напряжениями на конденсаторах.

Рассмотрим последовательное соединение нескольких участков цепи. Пусть цепь состоит из одного контура. В таком случае ток для всех участков этой цепи один и тот же. Применяя второй закон Кирхгофа в операторной форме, имеем:

$$\sum E_k(p) = I(p) \sum Z_k(p) - \sum L_k i_k(0) + \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p}.$$

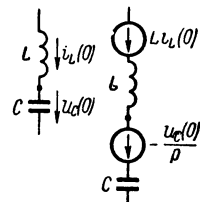


Рис. 10-1.

Величина $Z(p) = \sum Z_k(p)$ является операторным сопротивлением всей цепи. Таким образом, *при последовательном соединении участков цепи их операторные сопротивления складываются.*

Рассмотрим параллельное соединение двух ветвей. В этом случае напряжение на них общее. Пусть в каждой ветви последовательно соединены r , L и C . Имеем для каждой ветви:

$$U(p) = I_1(p) Z_1(p) - L_1 i_1(0) + \frac{u_{C1}(0)}{p}$$

и

$$U(p) = I_2(p) Z_2(p) - L_2 i_2(0) + \frac{u_{C2}(0)}{p},$$

где

$$Z_1(p) = r_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1} \quad \text{и} \quad Z_2(p) = r_2 + pL_2 + \frac{1}{pC_2}.$$

Суммарный ток в неразветвленной части цепи изображается:

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{U(p) + L_1 i_1(0) - \frac{u_{C1}(0)}{p}}{Z_1(p)} + \frac{U(p) + L_2 i_2(0) - \frac{u_{C2}(0)}{p}}{Z_2(p)}.$$

Отсюда мы видим, что *при ненулевых начальных условиях нельзя* представить $I(p)$ как произведение $U(p)$ на некоторый множитель $Y(p)$, имеющий смысл операторной проводимости. Однако *при нулевых начальных условиях это возможно*, так как при этом имеем:

$$I(p) = U(p) \left[\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right] = U(p) [Y_1(p) + Y_2(p)] = U(p) Y(p).$$

Величины $Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)}$, $Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)}$ и $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$ называют операторными проводимостями.

Таким образом, *при нулевых начальных условиях в случае параллельного соединения участков цепи их операторные проводимости складываются.*

10-4. Расчет переходных процессов в электрических цепях операторным методом

Рассмотрим сначала несколько простых примеров, исследованных ранее классическим методом.

При включении цепи (r, L) под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ имеем $U(p) = \frac{U}{p}$ и $Z(p) = pL + r$, а следовательно, при

нулевым начальном условии $i(0) = 0$ операторное изображение тока, согласно закону Ома, в операторной форме получает выражение:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{Up}{r + pL} = \frac{U}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + r/L} \right);$$

Пользуясь изображением функции e^{at} (§ 10-2), можем написать для искомого тока:

$$i(t) = \frac{U}{r} (1 - e^{-\frac{r}{L}t}).$$

В случае включения цепи (r, C) под действие постоянного напряжения при $u_C(0) = 0$ имеем:

$$I(p) = \frac{Up}{r + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{r} \frac{1}{p + \frac{1}{rC}}$$

и, соответственно,

$$i(t) = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

При включении цепи (r, L, C) под действие постоянного напряжения, при нулевых начальных условиях, получаем:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{Up}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U}{L} \frac{1}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}} = \\ &= \frac{U}{L} \frac{1}{\left(p + \frac{r}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} = \frac{U}{\omega'L} \frac{\omega'}{(p + \delta)^2 + \omega'^2}, \end{aligned}$$

где

$$\delta = \frac{r}{2L}, \quad \omega'^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \text{ и } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Используя таблицу в § 10-2, находим оригинал искомого тока:

$$i(t) = \frac{U}{\omega'L} e^{-\delta t} \sin \omega' t.$$

Достоинство операторного метода для расчета переходных процессов, заключающееся в алгебраизации дифференциальных уравнений цепи, особенно проявляется при расчете сложных цепей.

В предыдущем параграфе было отмечено, что, учитывая члены вида $L_k i_k(0)$ и $-\frac{u_{Ck}(0)}{p}$, как добавочные э. д. с., мы можем для расчета переходных процессов воспользоваться всеми методами

расчета сложных цепей, рассмотренными в пятой главе применительно к установившимся режимам. Если в цепи имеются индуктивно связанные ветви, то члены вида $M_{ks} \dot{i}_s(0)$ также следует рассматривать как некоторые добавочные источники э. д. с., и уравнение по второму закону Кирхгофа для некоторого контура, в котором действуют э. д. с. взаимной индукции, следует писать в виде

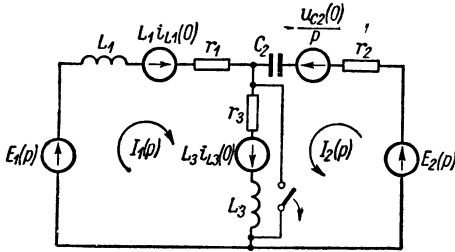


Рис. 10-2.

$$\sum E_k(p) + \sum L_k \dot{i}_k(0) + \sum M_{ks} \dot{i}_s(0) - \sum \frac{1}{p} u_{Ck}(0) = \sum Z_k(p) I_k(p) + \sum p M_{ks} I_s(p).$$

В качестве примера расчета сложной цепи рассмотрим переходный процесс в цепи,

приведенной на рис. 10-2, при размыкании ключа. Составим уравнения по методу контурных токов:

$$\begin{aligned} Z_{11}(p) I_1(p) + Z_{12}(p) I_2(p) &= E_{11}(p), \\ Z_{21}(p) I_1(p) + Z_{22}(p) I_2(p) &= E_{22}(p), \end{aligned}$$

где

$$Z_{11}(p) = r_1 + r_3 + p(L_1 + L_3); \quad Z_{22}(p) = r_2 + r_3 + \frac{1}{pC_2} + pL_3;$$

$$Z_{12} = Z_{21} = r_3 + pL_3; \quad E_{11}(p) = E_1(p) + L_1 \dot{i}_{1L}(0) + L_3 \dot{i}_{3L}(0);$$

$$E_{22}(p) = E_2(p) - \frac{u_{C2}(0)}{p} + L_3 \dot{i}_{3L}(0).$$

Решив систему уравнений, получим:

$$I_1(p) = \frac{Z_{22}(p)}{D(p)} E_{11}(p) + \frac{-Z_{12}(p)}{D(p)} E_{22}(p),$$

$$I_2(p) = \frac{-Z_{21}(p)}{D(p)} E_{11}(p) + \frac{Z_{11}(p)}{D(p)} E_{22}(p),$$

$$D(p) = Z_{11}(p)Z_{22}(p) - [Z_{12}(p)]^2.$$

Рассмотрим вид этих функций, когда $e_1 = E_0 = \text{const}$ и $e_2 = E_m \sin \omega t$. Соответственно:

$$E_1(p) = \frac{E_0}{p} \quad \text{и} \quad E_2(p) = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Подставляя значения $Z_{11}(p)$, $Z_{22}(p)$, $Z_{12}(p)$, а также $E_{11}(p)$ и $E_{22}(p)$ для тока $I_1(p)$, например, получим:

$$I_1(p) = \frac{E_0 G_1(p)}{p H_1(p)} - \frac{E_m \omega G_2(p)}{(p^2 + \omega^2) H_1(p)} + \frac{u_{C_2}(0) G_3(p)}{p H_1(p)} + \\ + \frac{L_1 i_{1L}(0) G_4(p)}{H_1(p)} + \frac{L_3 i_{3L}(0) G_5(p)}{H_1(p)} = \frac{G(p)}{p(p^2 + \omega^2) H_1(p)},$$

где

$$H_1(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = L_1 L_3 p^3 + [L_3(r_1 + r_2) + \\ + L_1(r_2 + r_3)] p^2 + [r_1(r_2 + r_3) + r_2 r_3 + \frac{L_1 + L_3}{C_2}] p + \frac{r_1 + r_3}{C_2};$$

$$G_1(p) = G_4(p) = p Z_{22}(p) = (r_2 + r_3) p + \frac{1}{C_2} + L_3 p^2;$$

$$G_2(p) = G_3(p) = p Z_{12}(p) = p(r_3 + p L_3);$$

$$G_5(p) = p Z_2(p) = r_2 p + \frac{1}{C_2}.$$

В полученном выражении $I_1(p)$ первые два члена определяют ток в переходном процессе при включении цепи под действие э. д. с. e_1 и e_2 . Последние три члена определяют ток переходного процесса, возникающего в цепи за счет ненулевых начальных значений токов в катушках L_1 и L_3 и напряжения на конденсаторе C_2 . Если до размыкания ключа ток в катушке L_3 отсутствовал, то $i_{3L}(0) = 0$ и член, содержащий этот ток, отсутствует. Из полученных выражений вытекает также возможность расчета переходного процесса наложением переходных процессов, рассчитанных отдельно от каждой э. д. с., начальных токов и напряжений.

Как видно из данного примера, операторное изображение тока представляет собою рациональную дробь, где и числитель и знаменатель являются полиномами оператора p . В следующем параграфе будет рассмотрен способ перехода от изображения к оригиналу, в котором используются некоторые свойства рациональных дробей. В некоторых случаях эти дроби можно привести к виду, приведенному в таблицах, в которых даны соответствующие им оригиналы. Однако в этих таблицах (например, В. А. Диткин и П. И. Кузнецов «Справочник по операторному исчислению») такие формулы приведены для полиномов $H_1(p)$ относительно низкого порядка.

10-5. Переход от изображений к оригиналу. Теорема разложения

Для нахождения оригинала представим изображение, полученное в виде рациональной дроби, простейшими слагаемыми, для которых известны оригиналы. С этой целью воспользуемся

теоремой разложения. Пусть имеется изображение в виде

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где $G(p)$ и $H(p)$ — полиномы от p . Здесь мы будем предполагать, что степень m полинома в числителе меньше степени n полинома в знаменателе ($m < n$). В дальнейшем, в двенадцатой главе, мы снимем это ограничение и увидим, что при $m \geq n$ появляются э. д. с., токи и напряжения, имеющие импульсный характер, т. е. принимающие бесконечно большие значения в течение бесконечно малых интервалов времени. Не рассматривая здесь таких импульсных функций, являющихся по сути дела результатом идеализации реальных э. д. с., токов и напряжений, мы будем полагать $m < n$.

Предположим, кроме того, что уравнение $H(p) = 0$ не имеет кратных корней, а также не имеет корней, равных корням уравнения $G(p) = 0$. При указанных условиях рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k},$$

где p_1, p_2, \dots, p_n — корни $H(p)$. Для определения коэффициентов A_k можно воспользоваться одним из многих приемов, известных из алгебры. Умножив обе части равенства на $(p - p_k)$ и положив $p = p_k$, получим справа A_k , а слева — неопределенность. Раскрывая эту неопределенность, получим:

$$A_k = \left| \frac{G(p)(p-p_k)}{H(p)} \right|_{p=p_k} = G(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p-p_k}{H(p)} = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_k}{p-p_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}.$$

Так как $\frac{A_k}{p-p_k} \doteq A_k e^{p_k t}$, то для искомой величины $x(t)$ имеем:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Это равенство и называют *теоремой разложения*.

В частном случае, когда один из корней полинома $H(p)$, пусть p_1 , равен нулю, то $e^{p_1 t} = 1$ и соответствующий член в разложении обращается в постоянную величину. Выделяя этот член, напишем:

$$X(p) \doteq x(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином $H(p)$ может иметь корень, лежащий в начале координат ($p_1 = 0$), когда в данной цепи имеются источники постоянной э. д. с. (или источники постоянного тока). Выделенный постоянный член представляет собой установившиеся ток или напряжение в цепи.

Если $H(p)$ имеет пару сопряженных чисто мнимых корней, лежащих на оси мнимых $p_1 = j\omega$, $p_2 = -j\omega$, то можно записать:

$$X(p) \doteq x(t) = \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином $H(p)$ может иметь пару чисто мнимых сопряженных корней в случае если рассматривается переходный процесс при наличии в цепи источников синусоидальных э. д. с. или источников синусоидальных токов. Два первых выделенных члена определяют синусоидальный ток или напряжение установившегося режима.

Для иллюстрации применения теоремы разложения рассмотрим некоторые примеры.

В качестве первого примера решим задачу о разряде конденсатора на цепь (r, L), рассмотренную ранее (§ 9-7), классическим методом. Пусть начальное напряжение конденсатора $u_C(0) = U_0$, а начальное значение тока в катушке $i(0) = 0$. Операторное выражение тока имеет вид

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U(p) + Li(0) - \frac{1}{p} u_C(0)}{Z(p)} = \frac{-U_0/p}{r + pL + \frac{1}{pC}} = \\ &= \frac{-U_0/L}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{-U_0/L}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}, \end{aligned}$$

так как $U(p) = 0$. Следовательно, в данном случае $G(p) = -U_0/L$ и $H(p) = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2$. Корни уравнения $H(p) = 0$ будут $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Так как

$$H'(p) = 2p + 2\delta, \text{ то } \frac{G(p)}{H'(p)} = \frac{-U_0/L}{2(p + \delta)}.$$

Пользуясь теоремой разложения, получаем:

$$i(t) = \frac{-U_0}{2L(p_1 + \delta)} e^{p_1 t} + \frac{-U_0}{2L(p_2 + \delta)} e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Пусть корни p_1 и p_2 равны друг другу: $p_1 = p_2 = -\delta$ и $\delta = \omega_0$, т. е. полином $H(p)$ имеет кратные корни. Предположив сначала, что $p_1 \neq p_2$, мы получим только что найденное решение, обращающееся

при $p_1 = p_2$ в неопределенность. Раскрывая эту неопределенность при $p_1 \rightarrow p_2$, получим, как это было сделано в § 9-7, искомое решение в виде

$$i = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

В более общем случае, когда один из корней, пусть p_1 , полинома $H(p)$ в степени n имеет кратность q , рациональную дробь можно разложить на простейшие в виде

$$\begin{aligned} \frac{G(p)}{H(p)} = \frac{G(p)}{(p-p_1)^q H_1(p)} = & \left[\frac{A_{11}}{(p-p_1)^q} + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^{q-1}} + \dots \right. \\ & \dots + \frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}} + \dots + \frac{A_{1q}}{p-p_1} \left. \right] + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \\ & + \frac{A_k}{p-p_k} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{1s} = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \frac{(p-p_1)^q G(p)}{H(p)} \right]_{p=p_1}, \\ A_k = \frac{G(p_k)}{H(p_k)} = \frac{G(p_k)}{(p_k-p_1)^q H_1'(p_k)}. \end{aligned}$$

Оригинал функции $\frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}}$ имеет вид

$$\frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}} \doteq \frac{A_{1s}}{(q-s)!} t^{(q-s)} e^{p_1 t}.$$

Оригинал же функции $\frac{A_k}{(p-p_k)}$ равен $A_k e^{p_k t}$.

Решим с помощью теоремы разложения задачу о включении цепи (r, L) под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ при условии $i(0) = 0$, рассмотренную ранее классическим методом (§ 9-4). Изображение тока в цепи получим, принимая во внимание, что $Z(p) = r + pL$, а изображение синусоидальной функции имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{2j} (U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} - U_m e^{-j\psi_u} e^{-j\omega t}) \doteq \frac{1}{2j} \left(\frac{\dot{U}_m}{p-j\omega} - \right. \\ \left. - \frac{\dot{U}_m^*}{p+j\omega} \right) = U(p). \end{aligned}$$

Операторное изображение тока в цепи определится из выражения:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{1}{2jL} \left[\frac{\dot{U}_m}{(p-j\omega) \left(p + \frac{r}{L} \right)} - \frac{\dot{U}_m^*}{(p+j\omega) \left(p + \frac{r}{L} \right)} \right].$$

Применив теорему разложения, получим:

$$I(p) = \frac{1}{2jL} \left[\frac{\dot{U}_m}{j\omega + \frac{r}{L}} \cdot \frac{1}{p - j\omega} + \frac{\dot{U}_m}{-j\omega - \frac{r}{L}} \cdot \frac{1}{p + \frac{r}{L}} - \frac{\dot{U}_m^*}{-j\omega + \frac{r}{L}} \cdot \frac{1}{p + j\omega} - \frac{\dot{U}_m^*}{j\omega - \frac{r}{L}} \cdot \frac{1}{p + \frac{r}{L}} \right] \doteq \frac{1}{2j} \left[\frac{\dot{U}_m}{r + j\omega L} e^{j\omega t} - \frac{\dot{U}_m}{r - j\omega L} e^{-j\omega t} - \frac{\dot{U}_m^*}{r + j\omega L} e^{-\frac{r}{L}t} - \frac{\dot{U}_m^*}{r - j\omega L} e^{-\frac{r}{L}t} \right].$$

Группируя первый член с третьим и второй с четвертым и имея в виду, что $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}$, получим:

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} [\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t}].$$

В качестве примера определения переходного тока в разветвленной цепи рассмотрим включение под постоянное напряжение U_0 цепи, приведенной на рис. 10-3, при нулевых начальных условиях. Операторное сопротивление такой цепи

$$Z(p) = pL + \frac{r}{pC} = \frac{p^2 rLC + pL + r}{1 + prC}.$$

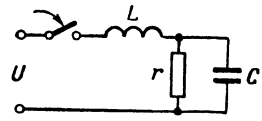


Рис. 10-3.

Изображение приложенного напряжения $U_0 \doteq \frac{U_0}{p}$.

Изображение тока представится в виде

$$I(p) = \frac{\frac{U_0}{p}}{Z(p)} = \frac{U_0(1 + prC)}{p(p^2 rLC + pL + r)} = \frac{\frac{U_0}{rLC}(1 + prC)}{p\left(p^2 + \frac{1}{rC}p + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{\frac{U_0}{rLC}(1 + prC)}{p(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)}.$$

Таким образом,

$$G(p) = \frac{U_0}{rLC}(1 + prC);$$

$$H(p) = p^3 + 2\delta p^2 + \omega_0^2 p; \quad H'(p) = 3p^2 + 4\delta p + \omega_0^2;$$

$$I(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3};$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad p_3 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$

$$A_1 = \frac{G(0)}{H'(0)} = \frac{U_0}{r}, \quad A_2 = \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} = \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + p_2 rC)}{p_2 \cdot 2(p_2 + \delta)},$$

$$A_3 = \frac{G(p_3)}{H'(p_3)} = \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + p_3 rC)}{p_3 \cdot 2(p_3 + \delta)}.$$

Тогда

$$i(t) = \frac{U_0}{r} + \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + p_2 rC)}{p_2 \cdot 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{p_2 t} - \frac{\frac{U_0}{rLC} (1 + p_3 rC)}{p_3 \cdot 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{p_3 t}.$$

Аналогичным образом можно определить токи в остальных ветвях.

В заключение найдем оригинал изображения тока, полученного в предыдущем параграфе для цепи, приведенной на рис. 10-2, в виде

$$I(p) = \frac{G(p)}{p(p^2 + \omega_0^2)H_1(p)} = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где $H_1(p) = Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = A(p - p_4)(p - p_5)(p - p_6)$.

Для определения оригинала данной функции при помощи теоремы разложения необходимо прежде всего найти корни знаменателя рациональной дроби. В данном случае знаменатель $H(p)$ имеет шесть корней: $p_1 = 0$, $p_2 = j\omega$, $p_3 = -j\omega$, p_4 , p_5 , p_6 . Корни p_4 , p_5 и p_6 можно найти из уравнения третьей степени методами, известными из курса математики. Оригиналы искомого тока запишется в виде

$$i(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \\ + \frac{G(p_4)}{H'(p_4)} e^{p_4 t} + \frac{G(p_5)}{H'(p_5)} e^{p_5 t} + \frac{G(p_6)}{H'(p_6)} e^{p_6 t}.$$

В этом выражении первый член определяет составляющую тока, постоянную во времени, второй и третий сопряженные члены определяют составляющую тока, изменяющуюся по синусоидальному закону. Эти три члена определяют установившийся режим в цепи. Последние три члена характеризуют затухающие составляющие тока. Они могут быть аperiодическими, если корни p_4 , p_5 и p_6 вещественны, или колебательными, если два корня — комплексные сопряженные. Эти три последние члена определяют переходящий (свободный) ток в цепи. Как видно из приведенных примеров, пользуясь операторным методом, мы получаем полное решение, содержащее как установившуюся, так и переходящую составляющие переходного процесса с учетом всех начальных условий.

10-6. Свойства корней характеристического уравнения

Рассмотрим любую сколь угодно сложную пассивную цепь, т. е. цепь, в которой отсутствуют источники энергии. В такой цепи может происходить только затухающий во времени преходящий (свободный) процесс, определяемый запасами энергии в магнитных и электрических полях в начальный момент времени. При использовании классического метода ток в любой k -й ветви в этом случае находится в результате решения однородного дифференциального уравнения.

Свойства корней α_i характеристического уравнения, соответствующего этому однородному дифференциальному уравнению, мы и рассмотрим в настоящем параграфе.

При использовании операторного метода сказанное относится к тем корням p_i полинома $H(p)$, которые определяют преходящий (свободный) процесс. Полином $H(p)$ можно записать в виде произведения $H(p) = N(p)H_1(p)$, где корни уравнения $N(p) = 0$ определяются видом действующей в цепи э. д. с. и дают установившийся режим. Корни же уравнения $H_1(p) = 0$ характеризуют преходящий (свободный) процесс. Все это хорошо видно из примеров, приведенных в предыдущем параграфе.

Корни p_i уравнения $H_i(p) = 0$ совпадают с корнями α_i характеристического уравнения, которое используется в классическом методе ($p_i = \alpha_i$).

Первое свойство этих корней для пассивной электрической цепи заключается в том, что вещественные части всех корней должны быть отрицательными:

$$\operatorname{Re}(\alpha_i) < 0.$$

Это свойство является прямым следствием того, что процесс должен быть затухающим.

Вторым свойством является то обстоятельство, что все комплексные корни должны быть попарно сопряженными, так как решения уравнения, определяющие действительные функции времени [ток $i(t)$, напряжение $u(t)$], должны быть вещественными.

Третье свойство заключается в том, что чисто мнимые корни $\alpha_i = j\omega_i$ и $\alpha_i^* = -j\omega_i$ должны быть простыми. Действительно, если бы такие корни имели каждый кратность $m > 1$, то соответствующее им решение имело бы вид

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_{m-1} t^{m-1}) \sin \omega_i t.$$

При $m > 1$ мы получили бы колебания с нарастающей до бесконечности амплитудой, чего не может быть, так как на рассматриваемую цепь не воздействуют источники энергии и первоначальный

запас энергии в магнитных и электрических полях цепи не может возрастать.

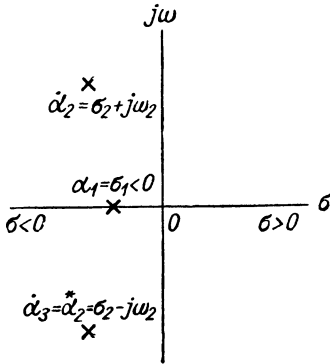


Рис. 10-4.

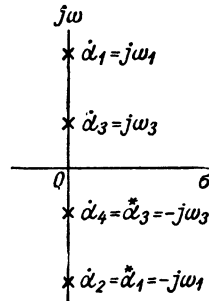


Рис. 10-5.

На рис. 10-4 показано расположение вещественных и сопряженных комплексных корней для реальной цепи, содержащей катушки, конденсаторы и сопротивления.

Чисто мнимые корни могут иметь место только для цепей без потерь. На рис. 10-5 показано расположение сопряженных корней на мнимой оси для этого идеализированного случая.



**СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ —
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
ФУРЬЕ. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ
ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ЧАСТОТНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК**

**11-1. Представление непериодических
функций времени с помощью интеграла
Фурье**

Наряду с рассмотренными выше классическим и операторным методами анализа переходных процессов может быть применен метод, в котором используются выражения токов и напряжений, являющихся функциями времени, с помощью интеграла Фурье. Сущность этого метода заключается в представлении непериодических функций в виде суммы бесконечного множества синусоидальных функций с бесконечно малыми амплитудами и с частотами, имеющими все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Соответственно этот метод может быть назван методом частотных характеристик, или короче, частотным методом. Как будет видно из дальнейшего, такое разложение непериодических функций имеет много общего с разложением периодических несинусоидальных функций в ряд Фурье. Смысл такого разложения по сути дела тот же, что и при анализе процессов в линейных цепях, находящихся под действием периодического несинусоидального напряжения. Осуществляя такое разложение непериодического напряжения на синусоидальные составляющие, мы получаем возможность, пользуясь хорошо известными приемами расчета токов в цепи при синусоидальных напряжениях, найти токи в цепи от действия отдельных составляющих напряжения, а затем получить результирующий ток, пользуясь методом наложения.

Представление непериодических функций времени в виде интеграла Фурье можно получить исходя из уже известного нам

разложения периодических функций в ряд Фурье, представленного в комплексной форме (§ 8-7):

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega_1 t} F(jq\omega_1), \\ F(jq\omega_1) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt. \end{aligned} \right\} (*)$$

В отличие от того, что было в § 8-7, здесь угловая частота первой гармоники обозначена ω_1 , т. е. снабжена индексом 1. Это необходимо, чтобы отличить ее от непрерывно изменяющейся частоты ω , о которой дальше будет идти речь.

Два последних выражения можно рассматривать как взаимно обратные преобразования, устанавливающие соответствие между $f(t)$ и $F(jq\omega_1)$. Функция $F(jq\omega_1)$ представляет собой дискретный спектр функции $f(t)$.

Предположим теперь, что $f(t)$ — непериодическая функция. Чтобы получить ее выражение, пригодное для любого значения t , на основании вышеприведенных выражений (*) будем рассматривать данную непериодическую функцию $f(t)$ как периодическую с бесконечно большим периодом.

При беспредельном возрастании T разность $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_1$ между угловыми частотами любых двух смежных гармоник, равная угловой частоте ω_1 первой гармоники, будет стремиться к нулю. Соответственно, дискретное множество значений частот перейдет в непрерывно изменяющуюся частоту ω .

Переписав первое выражение (*) в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega_1 t} F(jq\omega_1) \Delta\omega$$

и устремляя $\Delta\omega$ к нулю, получим:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega, \quad (**)$$

т. е. ряд Фурье переходит при этом в интеграл Фурье.

При этом функция $F(j\omega)$ определится на основании второго выражения (*) в виде

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (***)$$

Соотношение (***) называют прямым преобразованием Фурье, позволяющим найти по заданной функции $f(t)$ ей соответствующую $F(j\omega)$.

Соотношение (**) называют обратным преобразованием Фурье, дающим возможность по известной функции $F(j\omega)$ найти $f(t)$.

Если рассматривать включение электрической цепи в момент $t = 0$ под действие э. д. с. $e(t) = f(t)$, то имеем условие $f(t) = 0$ при $t < 0$, а следовательно, соотношение (***) принимает в этом случае вид

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

и называется при этом односторонним прямым преобразованием Фурье.

Следует сделать существенную оговорку, что прямое преобразование Фурье имеет смысл, если интеграл в его левой части имеет определенное конечное значение. Для этого недостаточно, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла условиям Дирихле. В дополнение к ним является достаточным, чтобы $f(t)$ была абсолютно интегрируема в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. чтобы существовал интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

Это, как правило, означает, что $f(t)$ должна стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$ и при $t \rightarrow -\infty$.

11-2. Частотные характеристики

Функция $F(j\omega) = F(\omega)e^{i\alpha(\omega)}$ называется спектральной, или частотной, характеристикой функции $f(t)$, так как она представляет собой непрерывный спектр функции $f(t)$.

Обозначения $F(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ показывают, что модуль F и аргумент α величины $F(j\omega)$ являются функциями угловой частоты ω .

Соотношение (**) показывает, что непериодическая функция, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, может быть представлена как сумма бесконечно большого числа гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами $\frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega$ и с частотами, занимающими весь диапазон от $-\infty$ до $+\infty$.

Величина $F(\omega)$, характеризующая зависимость амплитуды от частоты, называется амплитудно-частотной характеристикой. Величина $\alpha(\omega)$, характеризующая зависимость

начальной фазы $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ от частоты, называется фазо-частотной характеристикой.

Так как спектральная характеристика

$$F(j\omega) = \frac{\frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{j\alpha(\omega)} d\omega}{d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)}$$

представляет деленную на j комплексную амплитуду гармонической составляющей, отнесенную к единице изменения частоты $f = \frac{\omega}{2\pi}$, то ее называют также спектральной плотностью функции $f(t)$.

Представим частотную характеристику в виде

$$F(j\omega) = F(\omega) e^{j\alpha(\omega)} = F_1(\omega) + jF_2(\omega).$$

При этом величина $F_1(\omega)$ называется вещественной частотной характеристикой, а величина $F_2(\omega)$ — мнимой частотной характеристикой.

Замечая, что $F(j\omega)$ и $F(-j\omega)$ являются сопряженными комплексными величинами, можем написать для их модулей и фаз:

$$F(\omega) = F(-\omega), \quad \alpha(\omega) = -\alpha(-\omega).$$

Следовательно, $F(\omega)$ является четной функцией ω , а $\alpha(\omega)$ — нечетной функцией. Поэтому, представив подынтегральную величину в выражении (***) в виде

$$e^{j\omega t} F(j\omega) = F(\omega) \cos(\omega t + \alpha) + jF(\omega) \sin(\omega t + \alpha),$$

будем иметь:

$$e^{j\omega t} F(j\omega) + e^{-j\omega t} F(-j\omega) = 2F(\omega) \cos(\omega t + \alpha),$$

и, следовательно, выражение (***) можно переписать в форме

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos[\omega t + \alpha(\omega)] d\omega,$$

представляющей собой *интеграл Фурье* (обратное преобразование Фурье) в *тригонометрической форме*. Последнее выражение со всей ясностью показывает, что непериодическую функцию, удовлетворяющую отмеченным выше условиям, можно рассматривать как сумму бесконечного множества гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами $\frac{1}{\pi} F(\omega) d\omega$ и начальными фазами $\psi(\omega) = \frac{\pi}{2} + \alpha(\omega)$. То, что амплитуды в этом случае оказались в два раза

больше, чем при рассмотрении выражения (**), есть результат того, что в последнем выражении ω изменяется от 0 до $+\infty$, а не от $-\infty$ до $+\infty$, и соответственно гармоники с частотами ω и $-\omega$, содержащиеся в выражении (**), просуммированы в последнем выражении.

Нетрудно заметить, что

$$[F(\omega)]^2 = F(j\omega)F(-j\omega)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)F(-j\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi [f(t)]^2 dt, \end{aligned}$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega.$$

Последнее равенство выражает собою *теорему Релея*, а также называется *равенством Парсеваля*.

В частном случае, когда $f(t) = e$ представляет собой э. д. с., воздействующую на цепь только с активными сопротивлениями,

$g \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ равно энергии, выделяемой в цепи, причем g есть эк-

вивалентная проводимость всей цепи. Равенство Парсеваля показывает, что в этом случае эта энергия может быть вычислена по известной амплитудно-частотной характеристике э. д. с.

11-3. Получение частотных характеристик заданной функции времени

Сопоставляя прямое одностороннее преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

с преобразованием по Лапласу

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

мы видим, что первое есть частный случай второго при $p = j\omega$. Иными словами, одностороннее преобразование Фурье получается

из преобразования по Лапласу предельным переходом, когда в последнем вещественная часть комплексной переменной p стремится к нулю.

Мы можем благодаря этому не производить интегрирования для вычисления $F(j\omega)$, а, воспользовавшись готовыми таблицами для $F(p)$ [или для $\Phi(p) = pF(p)$], имеющимися в справочниках, заменить в выражениях $F(p)$ величину p на $j\omega$.

Рассмотрим сначала примеры для функций $f(t)$, для которых возможно прямое преобразование Фурье.

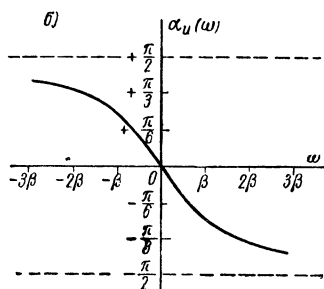
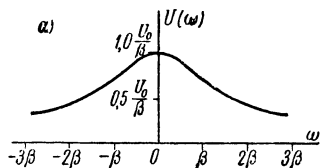


Рис. 11-1.

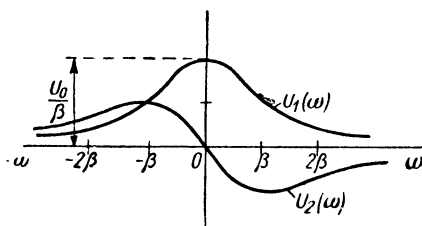


Рис. 11-2.

Пусть напряжение изменяется во времени по закону $u(t) = U_0 e^{-\delta t}$. Согласно таблице в § 10-2 имеем:

$$U_0 e^{-\delta t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{U_0}{\delta + p} = F(p),$$

и, следовательно, частотная характеристика функции $U_0 e^{-\delta t}$ имеет вид

$$F(j\omega) = U(j\omega) = \frac{U_0}{\delta + j\omega} = \frac{U_0}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\delta}},$$

т. е.

$$F(\omega) = U(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} \quad \text{и} \quad \alpha(\omega) = \alpha_u(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\delta}.$$

Обозначение $U(\omega)$ и индекс u у α означают, что эти величины относятся к напряжению. Величины, относящиеся к току, будем обозначать соответственно $I(\omega)$ и $\alpha_i(\omega)$.

На рис. 11-1 изображены амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики функции $u(t) = U_0 e^{-\delta t}$. На рис. 11-2 изображены

соответственно вещественная частотная и мнимая частотная характеристики, которые определяются формулами:

$$U(j\omega) = \frac{U_0}{\delta + j\omega} = \frac{U_0(\delta - j\omega)}{\delta^2 + \omega^2} = \frac{U_0\delta}{\delta^2 + \omega^2} - j \frac{U_0\omega}{\delta^2 + \omega^2} = U_1(\omega) + jU_2(\omega).$$

В качестве другого примера возьмем функцию

$$u(t) = U_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t \stackrel{\cdot}{=} \frac{U_0 \omega_0}{(\rho + \delta)^2 + \omega_0^2}.$$

Следовательно, частотная характеристика для этой функции имеет вид

$$F(j\omega) = U(j\omega) = \frac{U_0 \omega_0}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2};$$

$$U(\omega) = \frac{U_0 \omega_0}{\sqrt{(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}};$$

$$\alpha_u(\omega) = - \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}.$$

На рис. 11-3 показаны частотные характеристики этой функции при $\delta = 0,5\omega_0$.

Получим в виде третьего примера частотную характеристику прямоугольного импульса напряжения (рис. 11-4) прямым интегрированием согласно выражению (***) в § 11-1. Имеем $f(t) = u(t) = U_0$ при $-a \leq t \leq a$ и $f(t) = u(t) = 0$ при $|t| > a$. Получаем:

$$U(j\omega) = \int_{-a}^{+a} U_0 e^{-j\omega t} dt = \frac{U_0}{-j\omega} (e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}) = 2U_0 \frac{\sin a\omega}{\omega},$$

т. е.

$$U(\omega) = 2U_0 \left| \frac{\sin a\omega}{\omega} \right|.$$

На рис. 11-5 приведена амплитудно-частотная характеристика этой функции. Величина $\alpha_u(\omega)$ изменяется скачком на π при каждом изменении знака величины $\frac{\sin a\omega}{\omega}$.

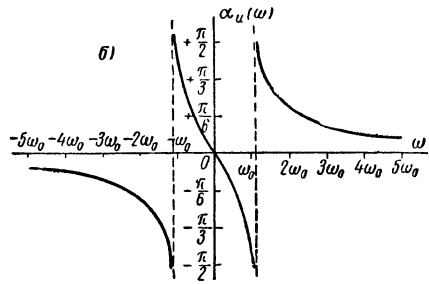
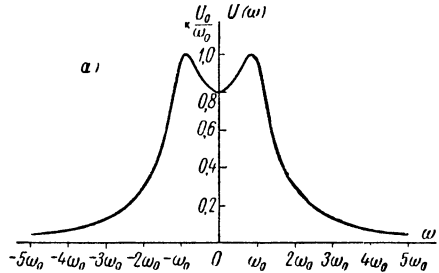


Рис. 11-3.

Рассмотрим еще получение частотных характеристик для имеющих важное значение в теории электрических цепей функций $f(t) = U_0 = \text{const}$ и $f(t) = U_0 \sin \omega_0 t$, для которых непосредственное применение прямого преобразования Фурье невозможно, так как интеграл в этом преобразовании для них не имеет определенного конечного значения. В этом случае может быть использован следующий прием: умножим эти функции на $e^{-\delta t}$, где $\delta > 0$. Частотные характеристики функции $U_0 e^{-\delta t}$ и $U_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$ получены в приведенных выше примерах.

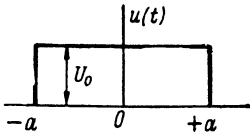


Рис. 11-4.

Переходя к пределу, когда $\delta \rightarrow 0$, получим искомые частотные характеристики:

$$u(t) = U_0 \doteq \frac{U_0}{j\omega},$$

$$u(t) = U_0 \sin \omega_0 t \doteq \frac{U_0 \omega_0}{(j\omega)^2 + \omega_0^2} = \frac{U_0 \omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2}.$$

Разложение непериодических э. д. с. в непрерывный спектр синусоидальных составляющих находит широкое применение в им-

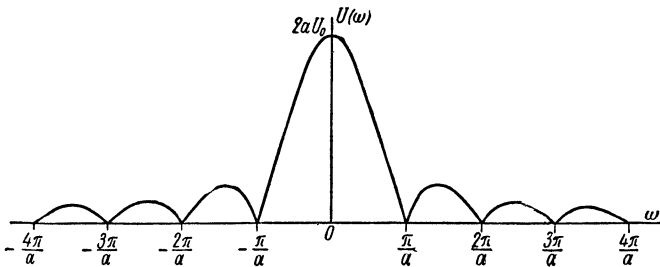


Рис. 11-5.

пульсной технике, в радиотехнике, в технике автоматического регулирования, так как, располагая таким спектром и зная зависимость параметров цепи от частоты, можно определить характер воздействия такой э. д. с. на рассматриваемую цепь.

11-4. Расчет переходных процессов при помощи частотных характеристик

Метод частотных характеристик для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях заключается в следующем.

Пусть цепь включается в момент $t = 0$ под действие напряжения $u(t)$ при нулевых начальных условиях, причем функция $u(t)$

удовлетворяет условиям, при которых интеграл Фурье существует. Используя прямое одностороннее преобразование Фурье

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt,$$

находим частотную характеристику $U(j\omega)$.

Зная комплексное сопротивление цепи $Z(j\omega)$ как функцию частоты, можем получить частотную характеристику тока в цепи:

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = I(\omega) e^{j\alpha_i(\omega)},$$

причем

$$Z(j\omega) = z(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega).$$

Искомый переходный ток находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

или с помощью того же преобразования в тригонометрической форме:

$$i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} I(\omega) \cos[\omega t + \alpha_i(\omega)] d\omega.$$

Сам по себе этот путь расчета не представляет каких-либо существенных преимуществ по сравнению с изложенным в предыдущих параграфах операторным методом. Существенное преимущество метода интеграла Фурье обнаруживается при нахождении тока $i(t)$ по заданному напряжению $u(t)$, когда мы имеем практически осуществленную сложную линейную электрическую цепь или вообще какое-либо сложное устройство с линейными электрическими элементами и располагаем возможностью снять экспериментально зависимость входного комплексного сопротивления цепи от частоты, т. е. получить экспериментально зависимости $z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, или, соответственно, $r(\omega)$ и $x(\omega)$.

Вычислив с помощью прямого преобразования Фурье спектральную характеристику $U(j\omega) = U(\omega) e^{j\alpha_u(\omega)}$ заданной функции $u(t)$ и пользуясь опытными данными для $z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, можно определить спектральную характеристику тока:

$$I(\omega) = \frac{U(\omega)}{z(\omega)}, \quad \alpha_i(\omega) = \alpha_u(\omega) - \varphi(\omega).$$

Искомый ток $i(t)$ можно тогда определить из последнего интегрального выражения, выполняя интегрирование хотя бы тем или иным приближенным методом.

Из этого же выражения можно установить связь между вещественной частотной $I_1(\omega)$ и мнимой частотной $I_2(\omega)$ характеристиками. Так как

$$I(j\omega) = I(\omega) e^{j\alpha_i(\omega)} = I \cos \alpha_i + jI \sin \alpha_i = I_1(\omega) + jI_2(\omega),$$

то

$$i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I(\omega) \cos[\omega t + \alpha_i(\omega)] d\omega = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [I_1(\omega) \cos \omega t - I_2(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Принимая во внимание, что при $t < 0$ мы имеем $i(t) = 0$, подставим в только что написанное выражение $i(t)$ значение $t = -t$:

$$0 = \int_0^{\infty} [I_1(\omega) \cos \omega t + I_2(\omega) \sin \omega t] d\omega,$$

или

$$\int_0^{\infty} I_1(\omega) \cos \omega t d\omega = - \int_0^{\infty} I_2(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

что и выражает связь между вещественной $I_1(\omega)$ и мнимой $I_2(\omega)$ частотными характеристиками.

Заметим, что эта связь имеет место для частотных характеристик тех функций $i(t)$, для которых справедливо прямое преобразование Фурье.

Используя полученное соотношение для тока $i(t)$, имеем:

$$i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I_1(\omega) \cos \omega t d\omega = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I_2(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

т. е. можем определить функцию $i(t)$ либо по вещественной частотной, либо по мнимой частотной характеристике.

Так как между вещественной и мнимой составляющими частотной характеристики $I(j\omega)$ существует связь, то соответственно в тех же случаях есть связь и между амплитудно-частотными и фазо-частотными характеристиками.

Если в соответствии со сказанным существует связь между $U(\omega)$ и $\alpha_u(\omega)$, а также между $I(\omega)$ и $\alpha_i(\omega)$, то должна быть связь и между $Z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ или, соответственно, между $r(\omega)$ и $x(\omega)$. Для ряда систем оказывается возможной и разработана методика определения $\varphi(\omega)$ по $z(\omega)$. В таком случае достаточно снять экспериментально только характеристику $z(\omega)$, что значительно проще экспериментального получения характеристики $\varphi(\omega)$.

Так как экспериментальная зависимость $z(\omega)$ может быть получена только при изменении частоты от нуля до определенного значения ω' , то необходимо быть уверенным, что мы не допускаем заметной ошибки, вычисляя $i(t)$ по формуле обратного преобразования Фурье в этом ограниченном диапазоне вместо всего диапазона $0 < \omega < \infty$. Некоторой оценкой достаточности верхнего предела частоты ω' в случае экспериментального получения частотных характеристик может служить условие, чтобы модули $y(\omega) = \frac{1}{z(\omega)}$ при этой частоте ω' приближались к нулю, при дополнительном условии, что на основе каких-либо соображений можно быть уверенным, что с дальнейшим увеличением ω они не будут вновь возрастать.

Наконец заметим, что указанные приемы расчета переходных процессов пригодны для нулевых начальных условий. Это видно хотя бы из того, что соотношение $I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)}$ соответствует соотношению $I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}$, справедливому только при нулевых начальных условиях (§ 10-3). При ненулевых начальных условиях можно воспользоваться так же, как в случае операторного метода, методом наложения, рассчитав процесс при нулевых начальных условиях и наложив на него процессы, которые получаются только от действия одних начальных напряжений на конденсаторах и токов в катушках.

11-5. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа.

Понятие о комплексной частоте

В § 11-3 были сопоставлены преобразование по Лапласу $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ с прямым односторонним преобразованием Фурье

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \text{ откуда видно, что второе есть частный случай}$$

первого при $p = j\omega$. В конце § 11-1 было отмечено, что преобразование Фурье возможно для ограниченного класса функций $f(t)$. Было указано, что достаточным условием для этого является абсолютная интегрируемость функции $f(t)$.

Преобразование по Лапласу является более общим, так как p рассматривается как комплексная величина, имеющая положительную вещественную часть, достаточно большую, чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение для весьма широкого класса функций $f(t)$, практически охватывающих все функции, с которыми

мы встречаемся в теории электрических цепей. Соответствующие условия, накладываемые на вещественную часть величины p , были сформулированы в начале § 10-1.

Можно обобщить преобразование Фурье так, что оно станет эквивалентно преобразованию Лапласа по широте охвата класса функций $f(t)$, если ввести понятие комплексной частоты $\omega = c + j\omega$, содержащей положительную вещественную часть c , на которую накладываются те же самые требования, что и на вещественную часть σ оператора p . Такое обобщенное преобразование Фурье имеет вид

$$F(c + j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(c+j\omega)t} dt.$$

Соответственно обратное преобразование Фурье в обобщенной форме, если заменить в формуле (***) § 11-1 всюду в выражении под знаком интеграла величину $j\omega$ на величину $\omega = c + j\omega$, принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(c + j\omega) e^{(c+j\omega)t} d(c + j\omega).$$

Путь интегрирования в комплексной плоскости должен быть избран так, чтобы вещественная часть комплексной частоты была не меньше той, которая обеспечивает сходимость прямого обобщенного преобразования Фурье. В частности, можно интегрировать по прямой, отстоящей справа от оси мнимых на необходимую величину $c > 0$. С этим и связан выбор пределов интегрирования от $c - j\infty$ до $c + j\infty$.

Прямое преобразование Лапласа совпадает с обобщенным прямым преобразованием Фурье при замене p на ω . Поэтому, пользуясь обратным преобразованием Фурье в обобщенной форме, мы можем записать обратное преобразование Лапласа, дающее возможность вычислить оригинал $f(t)$ по его операторному изображению $F(p)$ в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp = \mathcal{L}^{-1}[F(p)].$$

Обозначение $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ часто применяют для краткой записи этого преобразования. Последняя формула носит также название формулы Римана—Меллина.



РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНЫХ Э. Д. С. И Э. Д. С. ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

12-1. Понятие об импульсных э. д. с. и импульсных системах

Большой класс радиотехнических и вообще электротехнических задач связан с исследованием процессов в электрических цепях, протекающих под воздействием кратковременных внешних возмущений, длительность которых сравнима с длительностью переходных процессов. Такие возмущения и процессы назовем **импульсными**. Импульсными системами называют устройства, в которых формируются и действуют импульсные э. д. с. и токи.

Передача и преобразование сигналов при помощи импульсов находит широкое применение для передачи информации, так как при этом влияние помех оказывается наименьшим. Благодаря кратковременности импульсного процесса появляется возможность получить импульсы весьма большой мощности, во многие сотни раз превышающей возможную мощность соответствующего устройства при непрерывной его работе. Весьма широко используется импульсный метод в автоматике и телемеханике, в радиоэлектронике и т. д. Для исследования импульсных процессов применимы все изложенные в предыдущих главах методы анализа переходных процессов. При определенных формах импульсов и характере изменения интервалов между ними, зависящих от целей, для которых применяются импульсные системы, возможны те или иные специализированные методы анализа процессов в импульсных системах. Применяются импульсы разнообразной формы, например, прямоугольные (рис. 12-1, а), трапецеидальные (рис. 12-1, б), треугольные (рис. 12-1, в), экспоненциальные (рис. 12-1, г), радиоимпульсы, т. е. импульсы с высокочастотными колебаниями (рис. 12-1, д) и др. Последовательность

импульсов характеризуется временем T_p их повторения, длительностью $T_{\text{инт}}$ интервала (паузы) между ними и длительностью $t_{\text{имп}}$ самого импульса (рис. 12-2).

В зависимости от величин $t_{\text{имп}}$, $T_{\text{инт}}$, T_p , закона изменения этих величин и длительности переходного процесса могут быть применены различные методы анализа. При каждом воздействии импульса э. д. с. в цепи происходит переходный процесс. По истечении времени $t_{\text{имп}}$ воздействие импульса заканчивается и в цепи начинается другой переходный процесс, связанный с рассеиванием энергии,

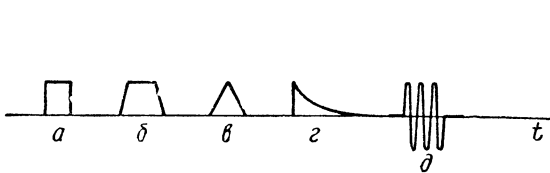


Рис. 12-1.

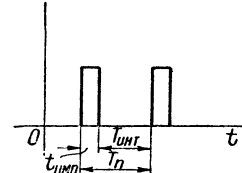


Рис. 12-2.

накопленной за время $t_{\text{имп}}$ в электрических и магнитных полях конденсаторов и катушек. Если длительность этого переходного процесса намного меньше длительности паузы $T_{\text{инт}}$, то к моменту воздействия следующего импульса тока и напряжения в цепи будут равны нулю, и поэтому для каждого импульса начальные условия являются нулевыми. Поэтому переходный процесс можно рассчитать для каждого импульса в отдельности. Если формы импульсов повторяются, то при этом расчет достаточно произвести для одного импульса. Когда длительность переходного процесса оказывается больше $T_{\text{инт}}$, переходный процесс в следующем импульсе будет зависеть от переходного процесса в предыдущие моменты времени. Для анализа процессов в таких системах должны быть применены специальные методы. Одним из них в случае следования импульсов друг за другом через равные промежутки времени является метод, основанный на дискретном преобразовании Лапласа.

12-2. Переходные и импульсные характеристики электрической цепи и расчет цепи при воздействии импульсной э. д. с.

Включение цепи под действие источника постоянной э. д. с. E с помощью ключа k при нулевых начальных условиях (рис. 12-3, а) можно рассмотреть как действие в этой цепи э. д. с. $E(t) = E \cdot 1(t)$, имеющей временную зависимость, показанную на рис. 12-3, б при отсутствии ключа. Условимся функции такого вида называть с к а ч к о о б р а з н ы м и ф у н к ц и я м и. Функция $1(t)$ является

так называемой единичной функцией, имеющей значения:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Смещенную вправо на промежуток времени τ функцию (рис. 12-4) можно записать в виде $1(t - \tau)$. Эта функция равна нулю при $t < \tau$ и равна единице при $t \geq \tau$.

Возникающие в линейной цепи токи и напряжения прямо пропорциональны приложенной к цепи скачкообразной э. д. с. Поэтому имеет место равенство

$$x(t) = E(t) \cdot h(t),$$

где $x(t)$ — искомая величина, т. е. ток или напряжение на

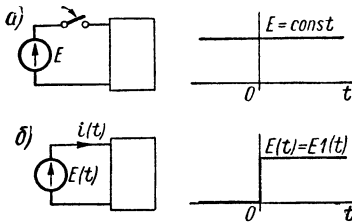


Рис. 12-3.

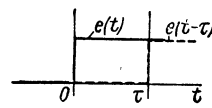


Рис. 12-4.

некотором участке цепи в переходном процессе. В дальнейшем для определенности будем под $x(t)$ понимать ток $i(t)$ на входе цепи (рис. 12-3, б); $h(t)$ — функция времени, называемая переходной характеристикой цепи.

Если искомой величиной $x(t)$ является ток $i(t)$ на входе цепи, то переходную характеристику $h(t)$, имеющую при этом размерность проводимости, называют переходной проводимостью цепи и обозначают $Y(t)$. Функцию $x(t)$ можно определить, рассчитав классическим или операторным методом ток $i(t)$ при включении данной цепи под действие постоянного напряжения $U = \text{const}$, и тогда $Y(t) = \frac{i(t)}{U}$. Например, для цепи с последовательно включенными r и L имеем $Y(t) = \frac{1}{r} (1 - e^{-\frac{r}{L}t})$ (§ 9-4), а для цепи с последовательно соединенными r и C имеем $Y(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{rc}}$ (§ 9-5).

Если к цепи приложена скачкообразная э. д. с., то имеем:

$$i(t) = E \cdot 1(t) \cdot Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ EY(t) & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Перейдем к рассмотрению другой функции, называемой импульсной.

При рассмотрении в § 9-10 переходных процессов в цепи, в которой происходит скачкообразное изменение индуктивности или емкости, было указано, что в определенных условиях возникают напряжения и токи бесконечно большой величины и бесконечно малой длительности ($\Delta t \rightarrow 0$). Такие токи и напряжения, имеющие импульсный характер, могут быть описаны с помощью импульсной функции $K \delta(t)$, где K — вещественное число, а $\delta(t)$ является единичной импульсной функцией, определяемой следующим образом: $\delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$ (т. е. $\delta(t) = 0$ при $t < 0$ и при $t > 0$),

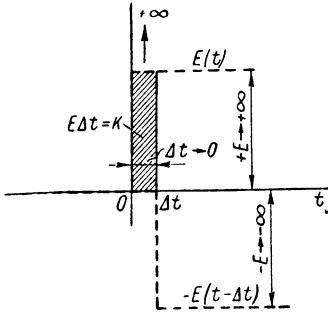


Рис. 12-5.

причем $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.

Из этого определения видно, что можно написать $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ и, следовательно, единичную импульсную функцию можно рассматривать как производную единичной скачкообразной функции $\delta(t) = \lim_{t=\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t)}{\Delta t}$.

Если единичная импульсная функция имеет значение $\delta(t) = \infty$ в момент $t = \tau$, то ее можно записать в виде $\delta(t - \tau)$.

Как видно из определения, площадь единичной импульсной функции равна единице.

При воздействии на электрическую цепь импульсной э. д. с. следует различать два этапа возникающего в цепи переходного процесса. В первом этапе за время действия импульсной э. д. с. ($\Delta t \rightarrow 0$) в электрические поля конденсаторов и магнитные поля катушек поступает некоторая конечная энергия, которая затем, во втором этапе, после завершения действия импульсной э. д. с. рассеивается в цепи.

Импульсную э. д. с. можно представить как сумму двух скачкообразных э. д. с., имеющих бесконечно большие значения, противоположные по знаку и смещенные во времени на $\Delta t \rightarrow 0$ так, что $E\Delta t = K = \text{const}$ (рис. 12-5).

В первом этапе (от $t = 0$ до $t = \Delta t \rightarrow 0$) ток возникает под действием одной положительной скачкообразной э. д. с. Получим для него выражение, учитывая, что $E\Delta t = K$ и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t)}{\Delta t} = \delta(t)$. Имеем:

$$\begin{aligned} i(t) &= E(t) Y(t) = \lim_{t=\Delta t \rightarrow 0} E 1(t) Y(t) \frac{\Delta t}{\Delta t} = \\ &= E\Delta t \lim_{t=\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t)}{\Delta t} Y(t) = KY(0) \lim_{t=\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t)}{\Delta t} = KY(0) \delta(t). \end{aligned}$$

Для уяснения смысла полученного выражения применим его к случаю, когда импульсная э. д. с. действует в цепи (r, L) рис. 12-6.

Для этой цепи, как только что было сказано, $Y(t) = \frac{1}{r}(1 - e^{-\frac{r}{L}t})$, и, следовательно, $Y(0) = 0$. Так как $\delta(t)$ при $t = 0$ равна бесконечности, то получаем неопределенность. Записав выражение $E\Delta t \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1(t)}{\Delta t} Y(t)$ для $i(t)$ в виде $i(t) = K \lim_{t \rightarrow 0} 1(t) \frac{Y(t)}{\Delta t} = K \lim_{t \rightarrow 0} 1(t) \frac{Y(t)}{t}$, учитывая, что $1(t) = 1$ при $t \rightarrow 0$, и раскрывая неопределенность, получим:

$$i(t) = i(0) = K \left[\frac{Y'(t)}{1} \right]_{t=0} = \frac{K}{L}.$$

Этот ток под действием импульса э. д. с. устанавливается скачком, и соответственно устанавливается скачком потокосцепление от $\Psi = 0$ до $\Psi(0) = Li(0) = K$. Такое скачкообразное изменение потока и тока в катушке оказалось возможным в результате действия бесконечно большой э. д. с. в бесконечно малый промежуток времени, что полностью соответствует изложенному в § 9-10.

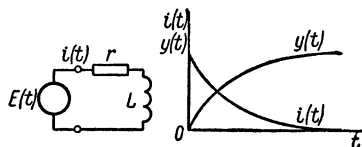


Рис. 12-6.

Таким образом, на первом этапе скачкообразно происходит накопление энергии в полях цепи, в данном случае в магнитном поле катушки. Накопленная энергия рассеивается в сопротивлениях цепи в переходном процессе, происходящем на втором этапе. Этот процесс начинается после действия второй отрицательной скачкообразной э. д. с. (рис. 12-5). Соответственно реакцию цепи, в данном случае ток $i(t)$, можно представить как сумму реакций на обе скачкообразные э. д. с. — положительную ($+E$) и отрицательную ($-E$). При этом необходимо учесть, что переходную проводимость следует определять как функцию промежутка времени, отсчитываемого от момента действия скачкообразной э.д. с. до рассматриваемого момента времени t . Следовательно,

$$\begin{aligned} i(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [EY(t) - EY(t - \Delta t)] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\Delta t \left[\frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t} \right] = KY'(t), \end{aligned}$$

где величина $K = E\Delta t = \text{const}$ равна площади импульсной функции, а $Y'(t)$ — производная переходной проводимости цепи.

Для рассмотренного выше примера (рис. 12-6) имеем $i(t) = \frac{K}{L} e^{-\frac{r}{L}t} = i(0) e^{-\frac{r}{L}t}$, что соответствует решению, полученному в

§ 9-4 для случая замыкания цепи (r, L) накоротко при начальном токе $I = i(0)$.

Величину $Y'(t)$, в общем случае $h'(t)$, обозначают $h_\delta(t)$ и называют импульсной характеристикой цепи, определяющей процессы в цепи после завершения действия импульса.

Обратим внимание на интересный факт, что импульсная характеристика $Y'(t)$, описывающая процесс после действия импульса, является всегда производной по времени от переходной характеристики $Y(t)$, описывающей процесс после действия скачкообразной э. д. с. Это легко понять, исходя из простых соображений. Ток $i(t)$ после действия импульса представляет собою переходящий (свободный) ток $i''(t)$ в цепи, существующий при отсутствии э. д. с. и являющийся решением уравнения с нулевой правой частью. Ток $i(t)$ после действия скачкообразной э. д. с. является решением того же уравнения с постоянной правой частью. Дифференцируя последнее уравнение, получим уравнение для производной по времени от этого тока с нулевой правой частью, т. е. точно такое же уравнение, как для тока после действия импульсной э. д. с. Таким образом, производная по времени тока после действия скачкообразной э. д. с. имеет точно такой же закон изменения во времени, как и ток после действия импульсной э. д. с. Они отличаются друг от друга только множителями E или K . Процесс после действия скачкообразной э. д. с. определяется величиной этого скачка E , а процесс после действия импульса определяется площадью импульса K .

В случае импульса э. д. с. в рассмотренном примере в цепи с катушкой, как мы видели, величина $K = E\Delta t = \Delta\Psi$ определяет поток, образующийся в катушке во время действия импульса. В случае действия импульса источника тока I в цепи с конденсатором соответственно будем иметь $K = I\Delta t = \Delta q$, т. е. величина K определяет заряд, образующийся в конденсаторе во время действия импульса. Поэтому величина K и определяет начальные условия для переходного тока после действия импульса.

Получим операторное изображение единичной скачкообразной функции и единичной импульсной функции. Так как единичная скачкообразная функция во всем интервале $0 \leq t \leq +\infty$ есть постоянная величина, равная единице, то ее операторное изображение, согласно сказанному в § 10-2, будет:

$$1(t) \doteq \frac{1}{p}.$$

Единичная импульсная функция является производной единичной скачкообразной функции $\delta(t) = \frac{d[1(t)]}{dt}$. При определении ее операторного изображения необходимо учесть, что она не равна нулю только в точке $t = 0$, т. е. в интервале от $t = -0$ до $t = +0$.

Соответственно, чтобы учесть толчок на систему со стороны импульсной функции при определении ее изображения, необходимо взять нижний предел интеграла Лапласа $t = -0$, т. е.

$$\delta(t) \doteq \int_{-0}^{\infty} \frac{d[1(t)]}{dt} e^{-pt} dt = \left| 1(t) e^{-pt} \right|_0^{\infty} + p \int_{-0}^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = p \frac{1}{p} = 1.$$

Действительно, по определению $1(t) = 0$ при $t < 0$, т. е. $1(-0) = 0$, и, следовательно, первое слагаемое равно нулю как при верхнем, так и при нижнем пределах. Интеграл же во втором слагаемом равен $\frac{1}{p}$ как операторное изображение единичной функции.

Таким образом, имеем операторное изображение единичной импульсной функции

$$\delta(t) \doteq 1.$$

В случае не единичной импульсной функции, равной $A\delta(t)$, ее операторное изображение равно A .

12-3. Расчет цепи при воздействии э. д. с. произвольной формы — интеграл Дюамеля

Пусть на зажимах цепи, обладающей переходной проводимостью $Y(t)$, действует напряжение $u(t)$ [или э. д. с. $e(t)$] произвольной формы (рис. 12-7). Цепь в общем случае может иметь сколь угодно сложную конфигурацию. Она является пассивным двухполюсником. Ток $i(t)$ на входе цепи, возникающий под действием напряжения $u(t)$, можно определить следующим образом: заменим действительную кривую $u(t)$ приближенно ступенчатой с интервалами по оси t , равными Δx (рис. 12-7). Ток в момент t можно рассматривать как возникающий под действием серии скачкообразных напряжений, следующих друг за другом через промежутки Δx в интервале от нуля до t . Первый скачок равен $u(0)$ в момент $t = 0$. Последующие скачки равны $\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x$. Составляющая тока, вызванная отдельным скачком напряжения, действующим в момент x , равна $\Delta u Y(t-x)$. Переходную проводимость нужно рассматривать как функцию аргумента $t-x$, так как от момента x возникновения

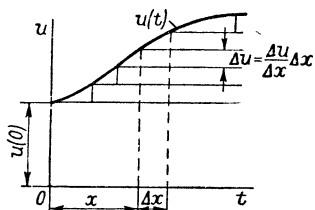


Рис. 12-7.

данного скачка напряжения до момента t отсчета значения тока прошло время $t - x$. Весь ток $i(t)$ является суммой составляющих тока, вызванных отдельными скачками напряжения, т. е.

$$i(t) \approx u(0) Y(t) + \sum_{x=0}^{x=t} Y(t-x) \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x.$$

При уменьшении интервалов Δx до бесконечно малых интервалов dx ступенчатая кривая напряжения перейдет в заданную кривую

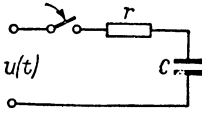


Рис. 12-8.

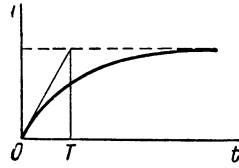


Рис. 12-9

$u(t)$, и, соответственно, мы получим точное выражение для искомого тока $i(t)$:

$$i(t) = u(0) Y(t) + \int_0^t Y(t-x) u'(x) dx, \quad (*)$$

где

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=x}.$$

Полученное выражение для $i(t)$ носит название интеграла Дюамеля, позволяющего решить задачу о включении цепи под действие напряжения $u(t)$ произвольной формы, причем $Y(t)$ определяется в итоге решения более простой задачи включения той же цепи под действие постоянного напряжения.

В виде примера рассмотрим включение изображенной на рис. 12-8 цепи (r, C) под действие напряжения $u = U(1 - e^{-\frac{t}{T}})$. На рис. 12-9 показана кривая изменения напряжения u на зажимах цепи. Постоянная T определяет скорость нарастания этого напряжения. В частности, при $T = 0$ имеем ранее рассмотренный случай включения этой цепи под постоянное напряжение $U = \text{const}$.

Имеем:

$$u(0) = 0, \quad u'(t) = \frac{U}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{и} \quad u'(x) = \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}.$$

Для данной цепи, согласно найденному в § 9-5 решению при рассмотрении включения ее под постоянное напряжение, переходная проводимость имеет выражение:

$$Y(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{и} \quad Y(t-x) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t-x}{\tau}},$$

где $\tau = rC$ — постоянная времени цепи.

Пользуясь интегралом Дюамеля, находим:

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t \frac{1}{r} e^{-\frac{t-x}{\tau}} \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}} dx = \frac{U}{rT} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right)x} dx = \\ &= \frac{U}{r} \frac{\tau}{T-\tau} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \end{aligned}$$

Потери энергии, выделяемой в виде тепла за время заряда конденсатора, равны:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\infty} i^2 r dt = \frac{U^2}{r} \frac{\tau^2}{(T-\tau)^2} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{2t}{T}} - 2e^{-\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau}\right)t} + e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) dt = \\ &= \frac{U^2}{r} \left(\frac{\tau}{T-\tau} \right)^2 \left(\frac{T}{2} - 2\frac{\tau T}{\tau+T} + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{U^2}{2r} \frac{\tau^2}{\tau+T} = \frac{U^2 C}{2} \frac{\tau}{\tau+T}. \end{aligned}$$

Отсюда находим отношение этих потерь к энергии, запасаемой в конденсаторе:

$$a = \frac{Q}{CU^2/2} = \frac{1}{1+T/\tau},$$

и коэффициент полезного действия заряда конденсатора

$$\eta = \frac{CU^2/2}{CU^2/2+Q} = \frac{1}{1+a}.$$

В приведенной таблице даны значения величин a и η в функции T/τ .

Отсюда мы видим, что η при включении конденсатора под постоянное напряжение получается только 50%, независимо от величины r . Чем меньше r , тем быстрее совершается заряд, но вместе с тем возрастает ток заряда, так что энергия, выделяемая в сопротивлении, оказывается не зависящей от r . Однако, снижая скорость повышения приложенного напряжения, можно повысить величину η , и при бесконечно медленном увеличении напряжения коэффициент полезного действия получается равным 100% при любом конечном значении r .

T/τ	a	η
0	1	0,5
1	0,5	0,67
2	0,33	0,75
4	0,20	0,833
∞	0	1

Если интеграл в выражении (*) взять по частям, то нетрудно получить другое выражение для тока $i(t)$, а именно:

$$i(t) = Y(0) u(t) + \int_{x=0}^{x=t} Y'(t-x) u(x) dx.$$

Подынтегральное выражение в формуле (*) содержит переходную проводимость $Y(t-x)$ цепи, а подынтегральное выражение в последней формуле содержит импульсную проводимость $Y'(t)$ той же цепи.

12-4. О случайных процессах в электрических цепях

Нередко процессы в электрических цепях носят случайный характер, т. е. случайный характер имеют мгновенные значения э. д. с., токов и напряжений. Такие э. д. с., токи и напряжения не могут быть описаны при помощи рассмотренных выше определенных функций. Мгновенные значения этих э. д. с., токов и напряжений в тот или иной момент времени можно определить лишь с той или иной вероятностью. Например, при передаче по проводам телеграфных импульсов или колебаний, модуляция которых осуществляется для воспроизведения речи или изображений, наперед неизвестны ни величина, ни длительность этих импульсов, ни амплитуда и фаза модулированных колебаний. Точно так же токи и напряжения при переходных процессах, возникающие в энергетических системах при наличии многочисленных приемников, включения и отключения которых могут иметь место в любые моменты времени, не могут быть наперед определенно указаны вследствие невозможности однозначного предсказания очередности этих коммутаций.

При наличии усилителей с весьма большими коэффициентами усиления необходимо принимать во внимание так называемый тепловой шум сопротивлений цепи и дробовой эффект в лампах. В проводниках электроны находятся в тепловом хаотическом движении. Существует некоторая вероятность, что на фоне общего хаотического движения определенное количество электронов в тот или иной момент времени будет иметь направленное в одну сторону движение, которое, действуя как ток в участке с сопротивлением, приведет к появлению разности потенциалов на концах этого участка. Значение этого напряжения и его знак являются случайными величинами. Частотный спектр этого теплового шума вследствие чрезвычайно большого количества электронов и их хаотического движения является равномерным до весьма высоких частот.

Электронный ток в лампах состоит из движения отдельных электронов, испускаемых катодом и доходящих до анода. Несмотря на

то, что средний анодный ток может быть величиной постоянной, в зависимости от количества одновременно достигших анода электронов, анодный ток будет меняться во времени. Причем эти изменения будут носить случайный характер. Этот эффект носит название дробового эффекта.

Во всех перечисленных и аналогичных им случаях можно говорить лишь о вероятности того или иного процесса, той или иной величины э. д. с., тока и напряжения.

Расчет случайных процессов в электрических цепях связан с проблемой определения вероятностных характеристик источников возмущений в цепи, например, действующих в цепи э. д. с. или изменений параметров цепи, и с проблемой определения вероятностных характеристик токов и напряжений, возникающих в цепи под воздействием этих возмущений.

Первая проблема решается при помощи статистических исследований свойств источников возмущений, т. е. путем сбора и обработки соответствующих статистических данных.

Для отыскания вероятностных характеристик искомых токов и напряжений существует ряд разработанных методов. Рассмотрение этих методов представляет собой специальную задачу. Отметим здесь только, что при этом может быть использован ряд известных нам понятий, например, понятие об импульсной переходной функции, о комплексной передаточной функции, о среднеквадратичном значении функции и т. д. Отдельные понятия видоизменяются в соответствии со спецификой задачи.

Вероятностные и статистические методы имеют существенное значение во многих областях электротехники, в частности, в области передачи сигналов, в области автоматического регулирования и т. д.



АНАЛИЗ ОБЩИХ СВОЙСТВ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

13-1. Различные виды уравнений четырепольюсника

Для любой сложной цепи, имеющей два входных зажима, ранее было дано общее наименование двухпольюсника. Двухпольюсник был назван пассивным, если внутри нет источников энергии, и активным, если в нем содержатся источники энергии. Двухпольюсник обобщенно характеризовался одним параметром — входным сопротивлением или, соответственно, входной проводимостью.

Многие электротехнические устройства, служащие для передачи энергии или сигналов, имеют два входных и два выходных зажима, причем их внутренняя электрическая цепь может быть весьма сложной. Такие устройства носят наименование ч е т ы р е х п о л ю с н и к о в — п а с с и в н ы х, если внутри них отсутствуют источники энергии, и а к т и в н ы х, если внутри них содержатся источники энергии.

В настоящей главе мы будем рассматривать пассивные четырехпольюсники, так как активный четырехпольюсник может быть заменен эквивалентным ему пассивным и вынесенными за зажимы последнего эквивалентными э. д. с., что будет показано в § 13-7. Параметры всех элементов четырехпольюсника будем полагать постоянными.

Отметим, что линейный пассивный двухпольюсник, а также линейный пассивный четырехпольюсник, в общем случае могут содержать внутри себя источники энергии, но с обязательным условием, что действие их взаимно компенсируется внутри двухпольюсника или, соответственно, четырехпольюсника таким образом, что напряжение на входных и в случае четырехпольюсника также на выходных разомкнутых зажимах равны нулю.

Как сейчас будет показано, пассивный четырехпольюсник может быть обобщенно охарактеризован тремя независимыми параметрами, которые могут быть определены расчетом, если известно внутреннее

строение четырехполюсника, а также экспериментально. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника имеет особое существенное значение, когда внутреннее строение четырехполюсника неизвестно.

Примерами пассивных четырехполюсников являются трансформатор, электрический фильтр, мостовая цепь, схемы которых приведены на рис. 13-1. Они имеют два входных ($1, 1'$) и два выходных ($2, 2'$) зажима.

В дальнейшем мы будем рассматривать свойства четырехполюсников при установившихся синусоидальных процессах.

Исследование периодических несинусоидальных процессов в четырехполюсниках может быть сведено с помощью разложения в дискретный ряд Фурье к рассмотрению синусоидальных процессов для отдельных гармонических составляющих.

Исследование переходных процессов в четырехполюсниках при нулевых начальных условиях также сводится с помощью интеграла Фурье к рассмотрению синусоидальных процессов. Исследование переходных процессов с помощью операторного метода формально аналогично исследованию при синусоидальных процессах с заменой оператора p на величину $j\omega$. Все сказанное дает основание ограничиться рассмотрением свойств четырехполюсника с помощью комплексного метода.

Установим зависимости, связывающие между собой входные и выходные напряжения и токи: U_1, U_2, I_1, I_2 (рис. 13-2).

Положительные направления напряжений и токов выберем, как показано на рис. 13-2. При этом положительное направление потока энергии на входных зажимах $1, 1'$ будет к четырехполюснику, а на выходных зажимах $2, 2'$ от четырехполюсника, что показано стрелками с хвостовым оперением. Такой выбор положительных направлений целесообразен, когда четырехполюсник рассматривается как передаточное устройство.

Пусть реальная схема четырехполюсника содержит n независимых контуров. В качестве первого выберем контур, включающий в себя источник энергии на входных зажимах $1, 1'$. В качестве второго выберем контур, включающий в себя приемник, присоединенный к выходным зажимам $2, 2'$. Не интересуясь падением напряжения в источнике энергии, мы будем рассматривать напряжение

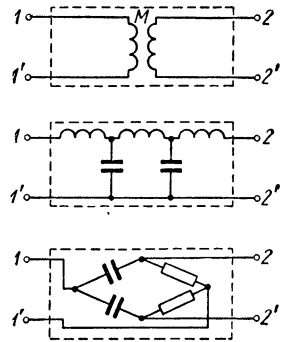


Рис. 13-1.

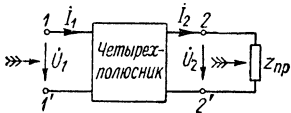


Рис. 13-2.

\dot{U}_1 на входных зажимах четырехполюсника как вызывающее токи в цепи.

Составим уравнения по методу контурных токов. При этом все собственные и общие сопротивления внутри четырехполюсника будем снабжать дополнительно штрихом ($'$), так как далее величинами Z_{11} , Z_{22} , Z_{12} и Z_{21} без штрихов будут обозначены параметры четырехполюсника. Заметим, кроме того, что собственное сопротивление второго контура является суммой $Z'_{22} + Z_{np}$, где Z'_{22} — часть этого сопротивления, содержащаяся внутри четырехполюсника, а Z_{np} — сопротивление приемника, расположенного вне четырехполюсника. Имеем уравнения:

$$\begin{aligned} Z'_{11}i_1 + Z'_{12}i_2 + Z'_{13}i_3 + \dots + Z'_{1n}i_n &= \dot{U}_1, \\ Z'_{21}i_1 + (Z'_{22} + Z_{np})i_2 + Z'_{23}i_3 + \dots + Z'_{2n}i_n &= 0, \\ Z'_{31}i_1 + Z'_{32}i_2 + Z'_{33}i_3 + \dots + Z'_{3n}i_n &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Так как $Z_{np}i_2 = \dot{U}_2$, где \dot{U}_2 — напряжение на выходных зажимах четырехполюсника, то, перенеся величину \dot{U}_2 в правую часть второго уравнения, приведем систему уравнений к виду:

$$\begin{aligned} Z'_{11}i_1 + Z'_{12}i_2 + Z'_{13}i_3 + \dots + Z'_{1n}i_n &= \dot{U}_1, \\ Z'_{21}i_1 + Z'_{22}i_2 + Z'_{23}i_3 + \dots + Z'_{2n}i_n &= -\dot{U}_2, \\ Z'_{31}i_1 + Z'_{32}i_2 + Z'_{33}i_3 + \dots + Z'_{3n}i_n &= 0. \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Пользуясь решением этих уравнений, приведенным в § 5-11, и учитывая, что правые части всех уравнений, кроме первых двух, равны нулю, получим выражения для входного i_1 и выходного i_2 токов через входное \dot{U}_1 и выходное \dot{U}_2 напряжения:

$$i_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U}_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{U}_2, \quad i_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{U}_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{U}_2.$$

Отношения $\frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, $\frac{\Delta_{22}}{\Delta}$, $\frac{\Delta_{12}}{\Delta}$ и $\frac{\Delta_{21}}{\Delta}$, имеющие размерность проводимости, обозначим соответственно:

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = Y_{11}, \quad -\frac{\Delta_{22}}{\Delta} = Y_{22}, \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = Y_{12} \quad \text{и} \quad -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = Y_{21}.$$

Тогда уравнения четырехполюсника, записанные через Y -параметры, принимают вид

$$i_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \quad i_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2.$$

Для линейной пассивной цепи $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ и поэтому $Y_{12} = -Y_{21}$.

Решив полученную систему уравнений относительно напряжений \dot{U}_1 и \dot{U}_2 , получим уравнения четырехполюсника, записанные через Z -параметры, имеющие размерность сопротивления:

$$\dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2, \quad \dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2,$$

где

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}, \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}, \quad Z_{12} = \frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}},$$

$$Z_{21} = \frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}};$$

при этом $Z_{12} = -Z_{21}$.

Наиболее распространенной формой записи уравнений четырехполюсника является такая, при которой входные величины \dot{U}_1 и \dot{I}_1 выражаются через выходные \dot{U}_2 и \dot{I}_2 . Решая систему уравнений четырехполюсника, записанную через Z -параметры, относительно \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , получаем:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

где

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}, \quad B = -\frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}},$$

$$C = \frac{1}{Z_{21}}, \quad D = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}.$$

Заметим, что A и D имеют нулевую размерность, B имеет размерность сопротивления, C — размерность проводимости.

Легко убедиться, учитывая соотношение $Z_{12} = -Z_{21}$, что между параметрами A , B , C и D четырехполюсника имеет место связь:

$$AD - BC = 1.$$

Наличие этой связи, так же как и связи $Y_{12} = -Y_{21}$ и $Z_{12} = -Z_{21}$, показывает, что при любой форме записи уравнений четырехполюсника независимыми являются только три параметра.

Если поменять местами входные и выходные зажимы четырехполюсника рис. 13-2, то получим схему, изображенную на рис. 13-3. Из сопоставления рис. 13-2 и 13-3 видим, что это соответствует замене \dot{U}_1 на \dot{U}_2 , \dot{U}_2 на \dot{U}_1 , \dot{I}_1 на $-\dot{I}_2$ и \dot{I}_2 на $-\dot{I}_1$. Произведя такую замену в уравнениях четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

соответствующих схеме рис. 13-2, и учитывая, что $AD - BC = 1$, получим уравнения четырехполюсника, соответственно схеме рис. 13-3 в виде

$$\dot{U}_1 = D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2.$$

Таким образом, если поменять местами вход и выход четырехполюсника, то в уравнениях меняются местами параметры A и D .

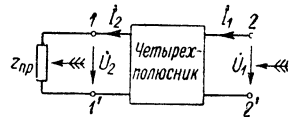


Рис. 13-3.

Симметричным называют четырехполюсник, свойства которого одинаковы со стороны обеих пар зажимов. Очевидно, при этом $A = D$.

Выше были получены соотношения $Y_{12} = -Y_{21}$ и $Z_{12} = -Z_{21}$ для уравнений четырехполюсника в системах Y -параметров и Z -параметров. Изменение порядка индексов у величин Y_{12} и Z_{12} приводит к изменению знака величины вследствие того, что положительное направление потока энергии принято на входных зажимах к четырехполюснику, а на выходных от четырехполюсника (рис. 13-2). С учетом этого принцип взаимности не нарушается.



Рис. 13-4.

Если положительное направление тока, а соответственно, и потока энергии на выходных зажимах изменить на противоположное, т. е. принять положительное направление энергии на входных и выходных зажимах одинаковым по отношению к четырехполюснику (рис. 13-4), то следует изменить знак тока i_2 во всех уравнениях. Чтобы уравнения четырехполюсника остались неизменными, т. е. сохранился знак «плюс» перед всеми его членами, необходимо изменить знаки следующих коэффициентов: Y_{21} , Y_{22} , Z_{12} , Z_{22} , B и D . При этом будем иметь $Y_{12} = Y_{21}$, $Z_{12} = Z_{21}$ и $AD - BC = -1$.

Выбор положительных направлений согласно рис. 13-2 целесообразен, как было отмечено, при рассмотрении четырехполюсника как устройства для передачи энергии или сигнала от первичных (входных) ко вторичным (выходным) зажимам. Выбор положительных направлений согласно рис. 13-4 целесообразен, когда четырехполюсник рассматривается просто как часть сложной электрической цепи.

13-2. Эквивалентные схемы четырехполюсника

Так как пассивный четырехполюсник характеризуется только тремя независимыми параметрами, то простейшая схема замещения

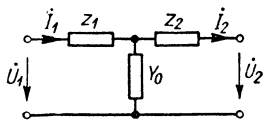


Рис. 13-5.

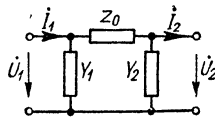


Рис. 13-6.

четырёхполюсника должна содержать три элемента. На рис. 13-5 изображена так называемая Т-образная эквивалентная схема четырёхполюсника. На рис. 13-6 приведена П-образная эквивалентная схема.

Выразим \dot{U}_1 и \dot{I}_1 через \dot{U}_2 и \dot{I}_2 для T-образной эквивалентной схемы и сопоставим эти выражения с уравнениями четырехполюсника, записанными в системе A-параметров:

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + (Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2) Y_0,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (1 + Z_1 Y_0) \dot{U}_2 + (Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0) \dot{I}_2 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= Y_0 \dot{U}_2 + (1 + Z_2 Y_0) \dot{I}_2 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем связь между параметрами четырехполюсника и его эквивалентной T-образной схемы:

$$A = 1 + Z_1 Y_0, \quad B = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0, \quad C = Y_0, \quad D = 1 + Z_2 Y_0$$

и

$$Y_0 = C, \quad Z_1 = \frac{A-1}{C}, \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}.$$

Аналогично для П-образной эквивалентной схемы:

$$\dot{U}_1 = Z_0 (\dot{I}_2 + Y_2 \dot{U}_2) + \dot{U}_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_1 = Y_1 \dot{U}_1 + Y_2 \dot{U}_2 + \dot{I}_2,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (1 + Y_2 Z_0) \dot{U}_2 + Z_0 \dot{I}_2 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= (Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z_0) \dot{U}_2 + (1 + Y_1 Z_0) \dot{I}_2 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем связь между параметрами четырехполюсника и его П-образной эквивалентной схемы:

$$A = 1 + Y_2 Z_0, \quad B = Z_0, \quad C = Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z_0, \quad D = 1 + Y_1 Z_0$$

и

$$Z_0 = B, \quad Y_1 = \frac{D-1}{B}, \quad Y_2 = \frac{A-1}{B}.$$

Для симметричного четырехполюсника $A = D$ и, соответственно, в эквивалентных схемах $Z_1 = Z_2$ и $Y_1 = Y_2$.

13-3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника

Для экспериментального определения параметров четырехполюсников нет необходимости производить измерения при номинальных напряжениях и токах. Достаточно произвести измерения при холостом ходе, когда $Z_{np} = \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$, и при коротком замыкании на вторичных зажимах, когда $Z_{np} = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$. Такая возможность имеет особо большое значение для измерения параметров

мощных устройств, так как мощность в опытах холостого хода и короткого замыкания значительно меньше мощности в номинальном режиме. При холостом ходе и коротком замыкании подводимая к первичным зажимам мощность идет только на покрытие потерь внутри четырехполюсника. При номинальном режиме она значительно больше, так как происходит передача энергии во вторичную цепь к приемнику.

Будем снабжать величины в первичной цепи дополнительными индексами: при холостом ходе индексом «0», при коротком замыкании индексом «к». Пусть во вторичной цепи при холостом ходе напряжение \dot{U}_2 , а при коротком замыкании ток \dot{I}_2 будут номинальными. Имеем:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \dot{U}_{10} &= A\dot{U}_2, & \dot{I}_{10} &= C\dot{U}_2, \\ \dot{U}_{1к} &= B\dot{I}_2, & \dot{I}_{1к} &= D\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Налагая эти режимы друг на друга, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1к} &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_1, \\ \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1к} &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_1. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для определения величин \dot{U}_1 , \dot{I}_1 , которые будут иметь место при номинальном режиме, достаточно произвести опыты холостого хода и короткого замыкания при номинальных \dot{U}_2 и \dot{I}_2 .

В случае линейных четырехполюсников соблюдение последнего, т. е. установление номинальных \dot{U}_2 и \dot{I}_2 , не обязательно, так как может быть выполнен пропорциональный пересчет.

Из выражений (*) имеем:

$$Z_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = \frac{B}{D}, \quad Y_{10} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{10}} = \frac{C}{A}.$$

Для симметричного четырехполюсника измерения сопротивления короткого замыкания $Z_{1к}$ и проводимости холостого хода Y_{10} со стороны первичных зажимов достаточно, так как имеют место связи $AD - BC = 1$ и $A = D$.

В случае несимметричного четырехполюсника, когда $A \neq D$, необходимо еще выполнить дополнительный опыт, произведя измерение со стороны вторичных зажимов либо при холостом ходе, т. е. при разомкнутых первичных зажимах, либо при коротком замыкании первичных зажимов. Так как перестановка местами входа и выхода приводит к перестановке местами параметров A и D , то получим:

$$Z_{2к} = \frac{B}{A}, \quad Y_{20} = \frac{C}{D}.$$

Из уравнений четырехполюсника, записанных для Z -параметров или Y -параметров, видно, что имеют место следующие соотношения:

$$Z_{10} = \frac{1}{Y_{10}} = Z_{11}, \quad Z_{20} = \frac{1}{Y_{20}} = Z_{22}, \quad Z_{1к} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}},$$

$$Y_{1к} = \frac{1}{Z_{1к}} = Y_{11}, \quad Y_{2к} = \frac{1}{Z_{2к}} = Y_{22}, \quad Y_{10} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}}.$$

Все приведенные соотношения относятся к комплексным коэффициентам уравнений четырехполюсника. Произведя опыты при различных частотах, можно получить экспериментально частотные характеристики параметров четырехполюсника, которые могут быть использованы для расчета переходных процессов с помощью интеграла Фурье.

13.4. Соединения четырехполюсников и матричная запись уравнений четырехполюсника

Уравнения четырехполюсника, записанные через Y -параметры, в матричной форме имеют вид

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{U}},$$

соответственно, через Z -параметры

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{Z}}\dot{\mathbf{i}},$$

и через A -параметры

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Матричная запись уравнений оказывается целесообразной при анализе различных соединений четырехполюсников.

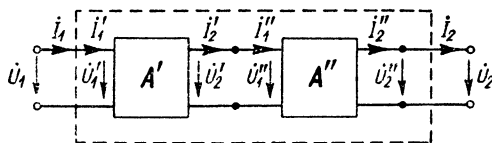


Рис. 13-7.

Рассмотрим так называемое каскадное соединение двух четырехполюсников (рис. 13-7). Эти два четырехполюсника, взятые вместе, можно рассматривать как один эквивалентный

четырёхполюсник, обведенный на рис. 13-7 пунктиром, с величинами \dot{U}_1, \dot{I}_1 на входе и \dot{U}_2, \dot{I}_2 на выходе. В данном случае $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1$, $\dot{I}_1 = \dot{I}'_1$, $\dot{U}_2 = \dot{U}''_2$ и $\dot{I}_2 = \dot{I}''_2$. Задача заключается в определении параметров эквивалентного четырёхполюсника через известные параметры первого и второго четырёхполюсников.

Равенства $\dot{U}'_2 = \dot{U}''_1$ и $\dot{I}'_2 = \dot{I}''_1$, имеющие место на стыке двух четырёхполюсников, определяют выбор целесообразной системы уравнений.

В матричной форме имеем:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}''_2 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix}.$$

При этом лучше всего использовать запись уравнений через A -параметры:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A', B' \\ C', D' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A'', B'' \\ C'', D'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}''_2 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix}.$$

Используя эти соотношения, получим:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A', B' \\ C', D' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A', B' \\ C', D' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} A', B' \\ C', D' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A'', B'' \\ C'', D'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}''_2 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix} = \|A\| \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица A -параметров двух каскадно соединенных четырёхполюсников равна произведению матриц A -параметров отдельных четырёхполюсников. Произведя эту операцию, получаем:

$$\|A\| = \|A'\| \|A''\| = \begin{vmatrix} A'A'' + B'C'', & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'', & C'B'' + D'D'' \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим в качестве другого примера так называемое *параллельное соединение* двух четырёхполюсников (рис. 13-8). При таком соединении имеют место равенства $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 = \dot{U}''_1$ и $\dot{U}_2 = \dot{U}'_2 = \dot{U}''_2$, или в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix}.$$

Поэтому в качестве подходящей системы уравнений следует выбрать ту, в которой токи выражаются через напряжения, т. е. систему Y -параметров. Имеем:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y'_{11}, Y'_{12} \\ Y'_{21}, Y'_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y''_{11}, Y''_{12} \\ Y''_{21}, Y''_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix}.$$

Так как $i_1 = i'_1 + i''_1$, $i_2 = i'_2 + i''_2$, то

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y'_{11}, Y'_{12} \\ Y'_{21}, Y'_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y''_{11}, Y''_{12} \\ Y''_{21}, Y''_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix}.$$

Имея в виду равенство матриц напряжений, получаем:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} &= \left[\begin{vmatrix} Y'_{11}, Y'_{12} \\ Y'_{21}, Y'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y''_{11}, Y''_{12} \\ Y''_{21}, Y''_{22} \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} Y'_{11} + Y''_{11}, Y'_{12} + Y''_{12} \\ Y'_{21} + Y''_{21}, Y'_{22} + Y''_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, при параллельном соединении четырехполюсников матрица Y -параметров есть сумма матриц Y -параметров отдельных четырехполюсников.

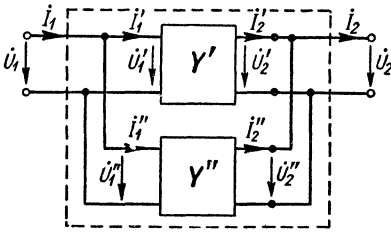


Рис. 13-8.

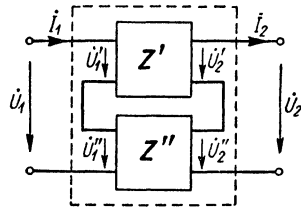


Рис. 13-9.

В заключение рассмотрим так называемое *последовательное соединение* двух четырехполюсников (рис. 13-9). При таком соединении имеем:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2 \quad \text{и} \quad i_1 = i'_1 = i''_1, \quad i_2 = i'_2 = i''_2.$$

При этом целесообразно воспользоваться уравнениями четырехполюсника, записанными через Z -параметры:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z'_{11}, Z'_{12} \\ Z'_{21}, Z'_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z''_{11}, Z''_{12} \\ Z''_{21}, Z''_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{vmatrix}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z'_{11}, Z'_{12} \\ Z'_{21}, Z'_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Z''_{11}, Z''_{12} \\ Z''_{21}, Z''_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} Z'_{11} + Z''_{11}, Z'_{12} + Z''_{12} \\ Z'_{21} + Z''_{21}, Z'_{22} + Z''_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, при последовательном соединении двух четырехполюсников матрица Z -параметров эквивалентного четырехполюсника равна сумме матриц Z -параметров отдельных четырехполюсников.

13-5. Передаточные функции четырехполюсников

Часто возникает задача нахождения тока $i_2(t)$ или напряжения $u_2(t)$ в некотором (втором) участке сложной цепи, возникающего под воздействием заданного тока $i_1(t)$ или напряжения $u_1(t)$ в другом (первом) участке цепи. Обозначив $i_1(t)$ или $u_1(t)$ через $x_1(t)$, а $i_2(t)$ или $u_2(t)$ через $x_2(t)$, введем понятие передаточной функции и $K(p)$ от первого ко второму участку цепи из соотношения:

$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)},$$

где $X_1(p)$ и $X_2(p)$ — операторные изображения $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Выделяя эти два участка из общей цепи и имея в виду, что воздействие возмущения $x_1(t)$ от первого участка ко второму передается через всю остальную пассивную цепь, мы можем рассматривать эту остальную цепь как четырехполюсник, и тогда передаточная функция определится параметрами этого четырехполюсника. При этом $x_1(t)$ окажется функцией, определяющей возмущение на входе четырехполюсника (на стороне зажимов $1-1'$), а $x_2(t)$ — функцией, определяемой реакцией на это возмущение на выходе четырехполюсника (на стороне зажимов $2-2'$).

Если рассматриваемые функции удовлетворяют требованиям, при которых возможно преобразование Фурье, то, заменяя p на $j\omega$, получим:

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\alpha(\omega)} = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)}.$$

Если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обе являются токами или обе являются напряжениями, то передаточная функция представляет собой безразмерную величину. Такой случай мы имеем, например, если $x_1(t) = u_1(t)$ и $x_2(t) = u_2(t)$ суть напряжения на входе и на выходе четырехполюсника.

Если $x_1(t) = u_1(t)$, а $x_2(t) = i_2(t)$, то $K(p)$ представляет собой обобщенную (операторную) взаимную проводимость между рассматриваемыми участками цепи, а $K(j\omega)$ — ее частотную характеристику. Наоборот, если $x_1(t) = i_1(t)$, а $x_2(t) = u_2(t)$, то $K(p)$ — обобщенное (операторное) взаимное сопротивление и $K(j\omega)$ — его частотная характеристика.

Рассмотрим передаточную функцию четырехполюсника в случае, когда на входе задано напряжение U_1 , а на выходе включен приемник с сопротивлением $Z_{\text{пр}}$. Имеем:

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z_{1\text{вх}}(p)},$$

где $Z_{1\text{вх}}(p)$ — операторное сопротивление на входе четырехполюсника, зависящее от параметров четырехполюсника и сопротивления приемника.

Напишем уравнение четырехполюсника через Z -параметры в операторной форме:

$$U_1(p) = Z_{11}(p) I_1(p) + Z_{12}(p) I_2(p),$$

$$U_2(p) = Z_{21}(p) I_1(p) + Z_{22}(p) I_2(p).$$

Подставляя в эти уравнения выражения для тока $I_2(p) = \frac{U_2(p)}{Z_{\text{пр}}(p)}$ и исключая из них $I_1(p)$, получим:

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{21}(p) Z_{\text{пр}}(p)}{Z_{11}(p) Z_{\text{пр}}(p) - Z_{11}(p) Z_{22}(p) + Z_{12}^*(p) Z_{21}(p)}.$$

В частном случае, когда сопротивление приемника равно бесконечности (холостой ход), получаем:

$$K(p) = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)}.$$

Такое же значение для $K(p)$ можно принять в важных практических случаях, когда сопротивление приемника, подключаемого к четырехполюснику, очень велико, например, если выходные зажимы четырехполюсника подключаются к сетке и катоду электронной лампы.

В случае, если на входе четырехполюсника задан ток $I_1(p)$, а не напряжение, то из второго уравнения четырехполюсника $U_2(p) = Z_{21}(p) I_1(p) + Z_{22}(p) I_2(p)$ и из соотношения $I_2(p) = \frac{U_2(p)}{Z_{\text{пр}}(p)}$ получаем:

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)} = \frac{Z_{21}(p) Z_{\text{пр}}(p)}{Z_{\text{пр}}(p) - Z_{22}(p)}$$

и при $Z_{\text{пр}} = \infty$ (холостой ход) имеем:

$$K(p) = Z_{21}(p).$$

Рассмотрим вопрос о расположении в комплексной плоскости полюсов и нулей передаточной функции, т. е. значений комплексной величины p (комплексной частоты), при которых передаточная функция обращается в ∞ или в 0. Для определенности будем

рассматривать передаточную функцию как отношение напряжений на выходе и входе четырехполюсника при холостом ходе, т. е. величину $K(p) = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)}$.

Рассуждения легче вести в отношении свойств входных сопротивлений Z_{10} и Z_{20} при холостом ходе, определенных со стороны первичных и вторичных зажимов, и сопротивления $Z_{1к}$, при коротком замыкании во вторичной цепи, как имеющих определенный физический смысл. Поэтому выразим величины $Z_{21}(p)$ и $Z_{11}(p)$ через эти входные сопротивления, представленные в операторной форме.

В § 13-3 были приведены соотношения:

$$Z_{10}(p) = Z_{11}(p), \quad Z_{20}(p) = Z_{22}(p), \quad Z_{1к}(p) = Z_{11}(p) - \frac{Z_{12}(p)Z_{21}(p)}{Z_{22}(p)}.$$

Отсюда получаем:

$$Z_{21}(p) = \sqrt{Z_{20}(p) [Z_{10}(p) - Z_{1к}(p)]} \quad \text{и} \quad Z_{11}(p) = Z_{10}(p).$$

Величины $Z_{10}(p)$, $Z_{20}(p)$, $Z_{1к}(p)$ имеют и полюсы и нули только в левой полуплоскости комплексной переменной p . Их нули находятся только слева от оси мнимых. Это вытекает из следующих соображений: закон Ома в операторной форме, например при подаче напряжения на первичные зажимы при холостом ходе, имеет вид

$$I_{10}(p) = \frac{U_{10}(p)}{Z_{10}(p)} = Y_{10}(p) U_{10}(p).$$

Если $u_{10}(t)$ есть импульс напряжения с площадью A , то его операторное изображение $U_{10}(p) = A$. В этом случае полюсы $Y_{10}(p)$, т. е. нули $Z_{10}(p)$ являются одновременно и полюсами $I_{10}(p)$.

В § 10-6 было показано, что полюсы операторного изображения преходящей составляющей тока для пассивных электрических цепей могут лежать только в левой полуплоскости, так как вещественная часть корней характеристического уравнения должна быть отрицательной, ибо процесс должен быть затухающим. В данном случае после воздействия импульса весь ток и будет только преходящим. Из этих рассуждений вытекает, что *все нули величины $Z_{10}(p)$, а следовательно, и полюсы $Y_{10}(p)$ лежат в левой полуплоскости*. То же самое относится к величинам $Z_{20}(p)$ и $Z_{1к}(p)$.

Рассматривая закон Ома в форме

$$U_{10}(p) = \frac{I_{10}(p)}{Y_{10}(p)} = Z_{10}(p) I_{10}(p)$$

и проводя аналогичные рассуждения по отношению к импульсу тока, приходим к выводу, что *все полюсы $Z_{10}(p)$ и, соответственно, нули $Y_{10}(p)$ также лежат в левой полуплоскости*.

Рассмотрим положение полюсов передаточной функции $K(p)$. Они определяются полюсами числителя $Z_{21}(p) = \sqrt{Z_{20}(p) [Z_{10}(p) - Z_{1к}(p)]}$ и нулями знаменателя $Z_{11}(p) = Z_{10}(p)$. И те и другие лежат только в левой полуплоскости, что следует из только что проведенных рассуждений о расположении полюсов и нулей входных сопротивлений. Таким образом, мы приходим к важному положению, что *все полюсы передаточной функции пассивного четырехполюсника лежат в левой полуплоскости.*

Рассмотрим положение нулей передаточной функции $K(p)$. Они определяются нулями $Z_{21}(p)$ и полюсами знаменателя. Последние лежат только в левой полуплоскости, однако в отношении нулей $Z_{21}(p)$ такое заключение сделать нельзя. Под корнем входит

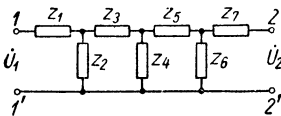


Рис. 13-10.

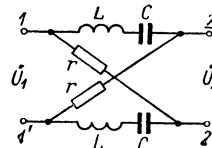


Рис. 13-11.

разность $[Z_{10}(p) - Z_{1к}(p)]$, которая может содержать нули как в левой, так и в правой полуплоскости, в чем мы убедимся сейчас на примерах. В таком случае *нули передаточной функции пассивного четырехполюсника могут лежать и в левой и в правой полуплоскости.*

Рассмотрим схему цепи, изображенную на рис. 13-10, называемую иногда *лестничной*. Ноль передаточной функции, т. е. нулевое значение $U_2(p)$ при конечном $U_1(p)$, как видно из схемы, может быть либо когда величины $Z_2(p)$, или $Z_4(p)$, или $Z_6(p)$ равны нулю, т. е. имеют нуль, либо когда величины $Z_1(p)$, или $Z_3(p)$, или $Z_5(p)$, или $Z_7(p)$ равны бесконечности, т. е. имеют полюс. Но и нули и полюсы всех этих величин лежат в левой полуплоскости, а следовательно, и все нули передаточной функции цепи также лежат в левой полуплоскости.

Рассмотрим теперь схему цепи, изображенную на рис. 13-11, иногда называемую *скрещенной*, или *мостовой*.

Как нетрудно заметить, при холостом ходе эта цепь состоит из двух параллельно включенных ветвей r, L, C , а следовательно,

$$Z_{10}(p) = \frac{1}{2} \left(r + pL + \frac{1}{pC} \right).$$

В силу симметрии $Z_{20}(p) = Z_{10}(p)$. При коротком замыкании зажимов 2—2' оказываются последовательно включенными два одинаковых контура, каждый из которых состоит из параллельно включенных ветви (L, C) и ветви r , т. е.

$$Z_{1к} = 2 \frac{r \left(pL + \frac{1}{pC} \right)}{r + pL + \frac{1}{pC}}.$$

Используя эти выражения, получим

$$Z_{11}(p) = Z_{10}(p) = \frac{1}{2} \left(r + pL + \frac{1}{pC} \right) \text{ и } Z_{21}(p) = \\ = \sqrt{Z_{20}(p) [Z_{10}(p) - Z_{1к}(p)]} = \frac{1}{2} \left(r - pL - \frac{1}{pC} \right)$$

и, следовательно,

$$K(p) = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)} = \frac{r - pL - \frac{1}{pC}}{r + pL + \frac{1}{pC}} = -\frac{p^2 - 2\delta p + \omega_0^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2},$$

где $\delta = \frac{r}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Полюсы $K(p)$ расположены в точках $p_{1,3} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, т. е. оба в левой полуплоскости.

Нули $K(p)$ расположены в точках $p_{2,4} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, т. е. в правой полуплоскости.

Четырехполюсники, все нули передаточной функции которых расположены в левой полуплоскости, называются м и н и м а л ь н о - ф а з о в ы м и. Примером их является цепь, схема которой приведена на рис. 13-10.

Четырехполюсники, имеющие нули также и в правой полуплоскости, называются н е м и н и м а л ь н о - ф а з о в ы м и. Примером их является цепь, изображенная на рис. 13-11. Эта цепь обладает интересными и важными свойствами. Пусть $\omega_0 > \delta$, т. е. $p_{1,3} = -\delta \pm j\omega'$ и $p_{2,4} = \delta \pm j\omega'$, где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Тогда

$$K(p) = -\frac{(p - p_2)(p - p_4)}{(p - p_1)(p - p_3)}.$$

Для перехода от этого выражения к частотной характеристике передаточной функции следует положить $p = j\omega$. Получаем:

$$K(j\omega) = \frac{(j\omega - p_2)(j\omega - p_4)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_3)}.$$

Комплексам, стоящим в скобках в числителе и знаменателе, соответствуют векторы, начинающиеся в точках p_1, p_2, p_3, p_4 и кончающиеся в переменной точке $p = j\omega$ на оси мнимых (рис. 13-12).

Из рисунка легко видеть, что модуль $K(\omega) = 1$ и остается неизменным при изменении частоты от нуля до бесконечности. Аргумент комплекса $K(j\omega)$ равен сумме аргументов множителей числителя, за вычетом суммы аргументов множителей знаменателя, т. е. $(\alpha_2 + \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_3) = 2\pi - 2(\alpha_1 + \alpha_3)$.

При изменении частоты от 0 до ∞ аргумент передаточной функции изменяется от 2π до 0, так как $(\alpha_1 + \alpha_3)$ изменяется от 0 до π .

Независимость модуля $K(\omega)$ от частоты и является ценным свойством этой цепи. Включая каскадно эту цепь к некоторому четырехполюснику, мы получаем возможность изменять фазо-частотную характеристику последнего, не изменяя его амплитудно-частотной характеристики.

Из сказанного видно, что для цепи, изображенной на рис. 13-11, отсутствует зависимость между фазо-частотной и амплитудно-частотной характеристиками передаточной функции, так как фаза изменяется, а амплитуда остается неизменной при изменении частоты. Отсутствие такой связи характерно для неминимально-фазовых четырехполюсников. Такая связь существует только для минимально-фазовых четырехполюсников, что облегчает, как было отмечено в § 11-4, снятие частотных характеристик экспериментальным путем.

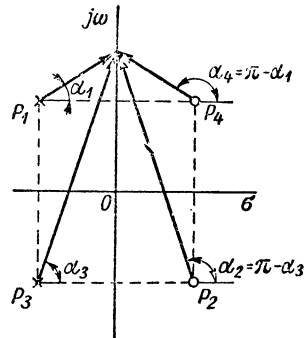


Рис. 13-12.

13-6. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

Весьма важной является возможность создания четырехполюсников, напряжение на выходе которых представляет собой производную или интеграл напряжения на входе. Такие четырехполюсники, получившие наименование дифференцирующих и интегрирующих цепей, находят широкое применение в измерительной технике, в системах автоматики и в устройствах для интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим простейшие дифференцирующие и интегрирующие цепи. Попутно составим для них выражения передаточных функций в качестве конкретных примеров к материалу предыдущего параграфа.

Простейшие дифференцирующие цепи изображены на рис. 13-13. Будем предполагать, что сопротивление приемника на выходе цепи столь велико, что ток i_2 весьма мал по сравнению с током i_1 , т. е. будем полагать $i_2 = 0$.

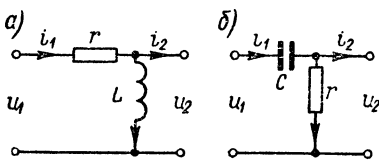


Рис. 13-13.

Для цепи рис. 13-13, а в этом случае при нулевых начальных условиях имеем:

$$U_2(p) = pLI_1(p) = \frac{pL}{r + pL} U_1(p).$$

Следовательно, передаточная функция рассматриваемого четырехполюсника, определяемая как отношение изображений выходного и входного напряжений, имеет вид

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{pL}{r + pL}.$$

Если L/r достаточно мало по сравнению с интервалом времени, в течение которого $u_1(t)$ заметно изменяется, то приближенно можно положить:

$$I_1(p) \approx \frac{U_1(p)}{r}, \quad U_2(p) \approx \frac{L}{r} pU_1(p), \quad K(p) \approx \frac{L}{r} p.$$

Но при нулевых начальных условиях $pU_1(p) \doteq \frac{d}{dt}u_1(t)$. Следовательно,

$$u_2(t) \approx \frac{L}{r} \frac{d}{dt} u_1(t).$$

Таким образом, рассмотренная цепь осуществляет дифференцирование входного напряжения.

Для цепи рис. 13-13, б при нулевых начальных условиях аналогично имеем:

$$U_2(p) = rI_1(p) = \frac{r}{r + \frac{1}{pC}} U_1(p), \quad K(p) = \frac{r}{r + \frac{1}{pC}}.$$

Если rC достаточно мало по сравнению с интервалом времени заметного изменения $u_1(t)$, то приближенно можно принять:

$$I_1(p) \approx pCU_1(p), \quad U_2(p) \approx rCpU_1(p), \quad K(p) \approx rCp.$$

Следовательно,

$$u_2(t) \approx rC \frac{d}{dt} u_1(t),$$

т. е. такая цепь также осуществляет дифференцирование входного напряжения.

Простейшие интегрирующие цепи изображены на рис. 13-14. Будем также предполагать, что i_2 столь мал по сравнению с i_1 , что можно положить $i_2 = 0$. Кроме того, начальные условия будем полагать нулевыми.

Для цепи рис. 13-14, а имеем:

$$U_2(p) = \frac{r}{r + pL} U_1(p), \quad K(p) = \frac{r}{r + pL},$$

а для цепи рис. 13-14, б имеем соответственно:

$$U_2(p) = \frac{\frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}} U_1(p), \quad K(p) = \frac{\frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}}.$$

Если для цепи рис. 13-14, а величина L/r и соответственно для цепи рис. 13-14, б величина rC превышают интервалы изменения напряжения $u_1(t)$ между его максимальными и минимальными значениями, в течение которых $u_1(t)$ изменяется монотонно или остается постоянным, то приближенно можно положить для цепи рис. 13-14, а

$$U_2(p) \approx \frac{r}{L} \frac{1}{p} U_1(p), \quad K(p) \approx \frac{r}{pL}$$

и для цепи рис. 13-14, б:

$$U_2(p) \approx \frac{1}{rC} \frac{1}{p} U_1(p), \quad K(p) \approx \frac{1}{prC}.$$

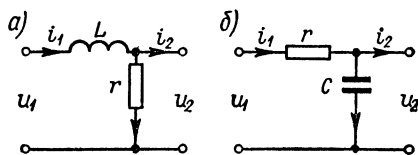


Рис. 13-14.

Но $\frac{1}{p} U_1(p) \doteq \int_0^t u_1(t) dt$. Следовательно, для этих двух цепей имеем соответственно:

$$u_2(t) \approx \frac{r}{L} \int_0^t u_1(t) dt \quad \text{и} \quad u_2(t) \approx \frac{1}{rC} \int_0^t u_1(t) dt.$$

Таким образом, рассмотренные цепи осуществляют интегрирование входного напряжения.

Нетрудно видеть, что указанные выше условия, наложенные на соотношения между параметрами простейших дифференцирующих и интегрирующих цепей, приводят к тому, что напряжения u_2 на выходе получаются значительно меньше напряжений u_1 на входе. Этот недостаток можно избежать, увеличивая напряжение u_2 с помощью усилителя, включаемого между выходом цепи и приемником, или применяя более сложные дифференцирующие и интегрирующие цепи, содержащие усилители и обратные связи.

Из вышеизложенного следует, что осуществление дифференцирующих и интегрирующих цепей возможно путем комбинирования участка с сопротивлением r как с катушкой индуктивности L , так и с конденсатором емкости C . На практике предпочтение отдается

последнему варианту, так как конденсаторы легче осуществить с малыми потерями. В катушках же отрицательное влияние оказывает не только активное сопротивление обмотки, но и междувитковая емкость.

13-7. Обратные связи

Пусть некоторое устройство, назовем его основным, представляющее собой четырехполюсник (рис. 13-15), имеет на выходных зажимах напряжение $u_2(t)$ при напряжении на входных зажимах $u_1(t)$. Его передаточная функция имеет вид

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}.$$

Подведем напряжение u_2 на вход так называемого устройства обратной связи, которое, вообще говоря, является также некоторым четырехполюсником. Напряжение на выходе устройства обратной связи пусть будет $u_1''(t)$ (рис. 13-15). Соответственно, это устройство характеризуется передаточной функцией

$$W(p) = \frac{U_1''(p)}{U_2(p)}.$$

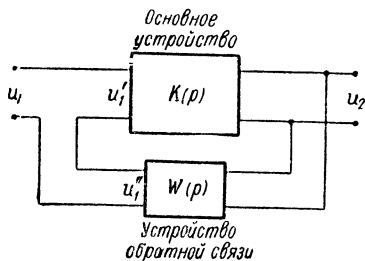


Рис. 13-15.

Введем напряжение u_1'' в первичную цепь так, чтобы оно добавлялось к напряжению u_1 на входе

всей системы. Тогда напряжение u_1' на входе основного устройства будет равно:

$$u_1' = u_1 + u_1''.$$

Записывая это уравнение для изображений, имеем:

$$U_1'(p) = U_1(p) + U_1''(p),$$

или

$$\frac{U_2(p)}{K(p)} = U_1(p) + W(p)U_2(p),$$

откуда находим:

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K(p)}{1 - W(p)K(p)} = K'(p).$$

Величина $K'(p)$ является передаточной функцией всей рассматриваемой системы с учетом действия обратной связи, т. е. с учетом обратного дополнительного воздействия выходного напряжения

u_2 через устройство обратной связи на входные зажимы основного устройства.

Пусть, например, основное устройство представляет собой усилитель с линейной характеристикой, не изменяющий фазу напряжения и имеющий коэффициент усиления k . Он является активным четырехполюсником, так как содержит источник энергии. Напряжения u_2 и u_1' связаны в этом случае простым соотношением $u_2 = ku_1'$ и, соответственно, $K(p) = k$, причем k — вещественное число.

Пусть устройство обратной связи является простым делителем напряжения из активных сопротивлений (рис. 13-16). Тогда

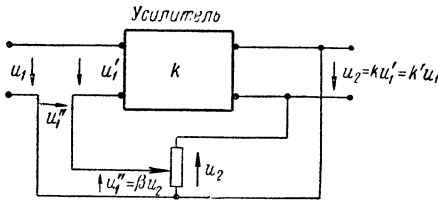


Рис. 13-16.

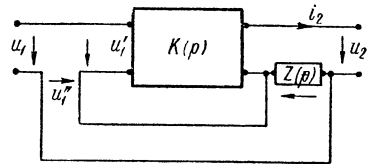


Рис. 13-17.

$u_1'' = \beta u_2$ и, соответственно, $W_-(p) = \beta$, где β — вещественное число.

В этом случае имеем:

$$K'(p) = \frac{k}{1 - \beta k} = k'.$$

Величина k' представляет собой коэффициент усиления всей системы с учетом воздействия обратной связи.

Если $\beta > 0$, то $k' > k$. В этом случае напряжение обратной связи u_1'' имеет ту же фазу, что и входное напряжение u_1 . Обратная связь увеличивает напряжение u_1' на входе усилителя, что и приводит к увеличению коэффициента усиления k' всей системы по сравнению с коэффициентом усиления k самого усилителя.

Такая обратная связь называется *положительной*.

Если $\beta < 0$, что легко осуществить переключением приводов, идущих к делителю или от делителя напряжения, то $k' < k$, т. е. происходит уменьшение коэффициента усиления, так как при этом u_1'' и u_1 сдвинуты по фазе на угол π . Такая обратная связь называется *отрицательной*.

В общем случае, когда основное устройство и устройство обратной связи представляют собой более сложные устройства, имеющие сложные выражения для их передаточных функций $K(p)$ и $W(p)$, все же можно говорить о положительной обратной связи, когда она способствует увеличению выходного напряжения, и об

отрицательной обратной связи, когда она способствует снижению этого напряжения.

В частности, при положительной обратной связи, как будет показано на примере лампового генератора (§ 4-6, ч. III), возможно нарастание собственных колебаний системы, раз возникших вследствие какого-либо первоначального толчка. Наоборот, отрицательная обратная связь способствует подавлению таких колебаний.

Обратная связь, изображенная на рис. 13-16, является так называемой обратной связью по напряжению, так как дополнительное напряжение u_1'' в первичной цепи определяется выходным напряжением u_2 . На рис. 13-17 показана так называемая обратная связь по току, при которой напряжение u_1'' определяется падением напряжения в участке с небольшим сопротивлением, включенным последовательно во вторичную цепь, т. е. определяется током i_2 во вторичной цепи, проходящим по этому участку. Обозначим операторное сопротивление этого участка через $Z(p)$.

Определяя для этого случая передаточную функцию основного устройства как отношение изображений выходного тока и входного напряжения:

$$K(p) = \frac{I_2(p)}{U_1'(p)},$$

будем иметь для этого случая:

$$U_1'(p) = U_1(p) + U_1''(p) = U_1(p) + Z(p) I_2(p),$$

или

$$\frac{I_2(p)}{K(p)} = U_1(p) + Z(p) I_2(p),$$

т. е.

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K(p)}{1 - Z(p) K(p)} = K'(p).$$

Величина $K'(p)$ представляет собой передаточную функцию всей системы с учетом воздействия обратной связи. Заметим, что в этом случае $K(p)$ и $K'(p)$ имеют размерность проводимости, тогда как в случае, относящемся к рис. 13-16, они были безразмерны.

13-8. Активный четырехполюсник

Активным называют четырехполюсник, содержащий внутри себя источники электрической энергии, причем действие этих источников не компенсируется взаимно внутри четырехполюсника. Это значит, что при отключении четырехполюсника от внешних цепей на одной или на обеих парах его разомкнутых зажимов возникает напряжение, обусловленное наличием источников энергии внутри четырехполюсника. Пусть э. д. с. источников не зависят от токов

в них. Пользуясь принципом наложения, нетрудно привести такой активный четырехполюсник с любым числом внутренних источников энергии к пассивному четырехполюснику с двумя дополнительными источниками э. д. с. во входной и в выходной цепях.

Пусть при отключении активного четырехполюсника, содержащего внутри себя э. д. с. E_k ($k = 1, 2, \dots, n$), на его зажимах появ-

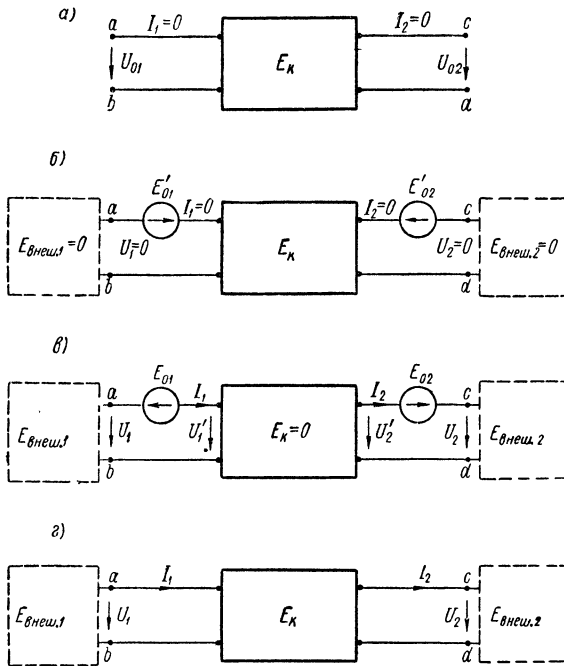


Рис. 13-18.

ляются напряжения U_{01} и U_{02} (рис. 13-18, а). При этом $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$. Тот же результат получим, если замкнем накоротко все источники э. д. с. во *внешних* цепях, сохранив сопротивления этих цепей и этих источников и введем дополнительно источники э. д. с. $E'_{01} = -U_{01}$ и $E'_{02} = -U_{02}$, как показано на рис. 13-18, б. Внешние цепи с их источниками на рис. 13-18, б показаны пунктирными прямоугольниками.

Замкнем теперь накоротко все источники э. д. с. *внутри* четырехполюсника, сохранив их внутренние сопротивления, т. е. положим $E_k = 0$. Пусть теперь действуют все источники э. д. с. во *внешних* цепях и, кроме того, перед зажимами четырехполюсника в первичной

и во вторичной цепях введены дополнительные источники э. д. с. $\dot{E}_{01} = -\dot{E}'_{01} = \dot{U}_{01}$ и $\dot{E}_{02} = -\dot{E}'_{02} = \dot{U}_{02}$ (рис. 13-18, в).

Осуществляя наложение токов, э. д. с. и напряжений в случаях, изображенных на рис. 13-18, б и в, получаем действительную цепь, в которой действуют все источники э. д. с. как во внешних цепях, так и внутри активного четырехполюсника (рис. 13-18, г), и в которой нет никаких дополнительных источников э. д. с. Следовательно, токи I_1 и I_2 , так же как и напряжения U_1 и U_2 в случае, изображенном на рис. 13-18, г, и являются токами в действительных условиях.

Таким образом, активный четырехполюсник с источниками энергии, э. д. с. которых не зависят от токов в них, может быть заменен пассивным четырехполюсником, получающимся из данного активного четырехполюсника путем закорачивания в нем всех источников э. д. с. с сохранением их внутренних сопротивлений, с введенными в первичную и во вторичную цепь дополнительными источниками, э. д. с. которых равны напряжениям на разомкнутых зажимах данного активного четырехполюсника.

Если параметры эквивалентного пассивного четырехполюсника при Z -форме уравнений обозначить через Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} и Z_{22} , то, учитывая, что напряжения на его зажимах (рис. 13-18, в) равны:

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}_1 - \dot{E}_{01} \quad \text{и} \quad \dot{U}'_2 = \dot{U}_2 - \dot{E}_{02},$$

получаем для активного четырехполюсника уравнения:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dot{E}_{01}, \quad \dot{U}_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dot{E}_{02}.$$

В дальнейшем при исследовании полупроводниковых триодов мы увидим, что иногда приходится рассматривать активные четырехполюсники, в которых дополнительные э. д. с. зависят от тока.

13-9. Круговая векторная диаграмма четырехполюсника

Будем рассматривать случай, когда напряжение на входе четырехполюсника изменяется во времени по синусоидальному закону с определенной частотой. При этом токи и напряжения на входе и на выходе четырехполюсника могут быть изображены на диаграмме векторами. Если сопротивление $Z_{np} = ze^{j\varphi_{np}}$ приемника, включенное к выходным зажимам четырехполюсника, изменяется по определенному закону, то при постоянстве действующего значения некоторого одного напряжения или тока будут определенным образом изменяться по величине и фазе остальные напряжения и токи, и концы их изображающих векторов будут описывать на диаграмме некоторые кривые при условии, что начала векторов совмещены с началом координат. Эти кривые мы будем называть г е о

метрическими местами векторов напряжений и токов. В значительном числе практически важных случаев эти геометрические места оказываются прямыми линиями и окружностями, и, соответственно, такие диаграммы носят название к р у г о в ы х д и а г р а м м.

Ценность этих диаграмм состоит в том, что они дают возможность наглядно представить весь диапазон возможных изменений интересующих нас величин. Уравнения четырехполюсника в системе А-параметров имеют вид

$$U_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \quad I_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \quad (*)$$

Будем искать геометрические места векторов токов \dot{I}_2 и \dot{I}_1 и вектора напряжения \dot{U}_2 при условии постоянства напряжения U_1 , вектор которого направим вдоль оси вещественных $U_1 = U_1 = \text{const}$. Пусть изменяется от 0 до ∞ только модуль z комплексного сопротивления $Z_{\text{пр}} = ze^{j\varphi_{\text{пр}}}$, а его аргумент $\varphi_{\text{пр}}$ остается неизменным ($\varphi_{\text{пр}} = \text{const}$).

Из первого уравнения (*) имеем:

$$U_1 = \dot{I}_2(B + AZ_{\text{пр}}), \quad \text{где } Z_{\text{пр}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}.$$

Таким образом,

$$\dot{I}_2 = \frac{U_1}{B + AZ_{\text{пр}}} = \frac{U_1}{B + Aze^{j\varphi_{\text{пр}}}} = \frac{U_1}{B + A'z}.$$

Покажем, что геометрическим местом вектора тока \dot{I}_2 является окружность.

Найдем сначала геометрическое место вектора \overline{OV} , изображаемого комплексом $V = B + zA'$. Заметим, что размерность V является размерностью сопротивления. Комплексные параметры четырехполюсника представим в показательной форме:

$$A = ae^{j\alpha}, \quad B = be^{j\beta}, \quad C = ce^{j\gamma}, \quad D = de^{j\delta}.$$

Вектор \overline{OV} является геометрической суммой постоянного вектора \overline{OB} , изображаемого комплексом $B = be^{j\beta}$, и переменного по длине вектора BV , изображаемого комплексом (рис. 13-19)

$$zA' = zAe^{j\varphi_{\text{пр}}} = zae^{j(\alpha + \varphi_{\text{пр}})} = zae^{j\alpha'},$$

и, следовательно, геометрическим местом вектора \overline{OV} является прямая.

При изменении z от 0 до ∞ конец вектора \overline{OV} скользит по этой прямой от точки B вверх до бесконечности. Часть этой прямой

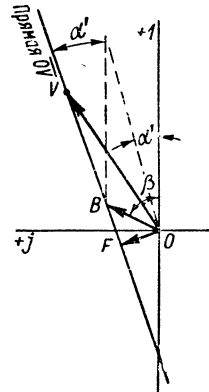


Рис. 13-19.

от точки B и вниз до бесконечности определяет геометрическое место концов вектора \overline{OV} для случая, когда приемник работает в генераторном режиме, так как угол сдвига между напряжением U_2 и током I_2 при этом равен $(\varphi_{\text{пр}} + \pi)$ и, следовательно, мощность P_2 отрицательна:

$$P_2 = U_2 I_2 \cos(\varphi_{\text{пр}} + \pi) = -U_2 I_2 \cos \varphi_{\text{пр}} < 0.$$

Опустим на эту прямую перпендикуляр из начала координат. Вектор \overline{OF} является минимальным значением по модулю переменного вектора \overline{OV} . Выразим вектор \overline{OB} через вектор \overline{OF} . Так как $\overline{OB} = \overline{OF} + \overline{FB}$, то

$$B = OF e^{j(\alpha' + \frac{\pi}{2})} + FB e^{j\alpha'} = jOF e^{j\alpha'} + FB e^{j\alpha'}$$

и, следовательно,

$$V = B + zA' = jOF e^{j\alpha'} + (FB + az) e^{j\alpha'} = jOF e^{j\alpha'} + \nu e^{j\alpha'},$$

где первый член представляет собой постоянный комплекс, изображающий вектор \overline{OF} , а второй член является переменным, причем в общем случае $-\infty < \nu < +\infty$, и изображает переменный вектор \overline{FV} .

Найдем теперь геометрическое место вектора тока \bar{I}_2 , изображаемого комплексом

$$I_2 = \frac{U_1}{V} = \frac{U_1}{B + Z_{\text{пр}A}} = \frac{U_1}{B + zA'} = e^{-j\alpha'} \frac{U_1}{\nu + jOF}.$$

При $\nu = 0$ модуль этой величины имеет максимальное значение, равное $OG = \frac{U_1}{OF}$, причем

$$I_2 = \frac{U_1}{jOF} e^{-j\alpha'} = OG e^{-j(\alpha' + \frac{\pi}{2})}.$$

На рис. 13-20 изображен вектор OG , соответствующий комплексу I_2 при $\nu = 0$. Вектор $\overline{MG} = \overline{OG} - \bar{I}_2$ изображается комплексом

$$\frac{U_1}{jOF} e^{-j\alpha'} - \frac{U_1}{jOF + \nu} e^{-j\alpha'} = \frac{\nu}{jOF} \frac{U_1}{jOF + \nu} e^{-j\alpha'} = -j \frac{\nu}{OF} I_2.$$

Следовательно, векторы $\bar{I}_2 = \overline{OM}$ и \overline{MG} взаимно перпендикулярны, угол OMG прямой, и вектор $\bar{I}_2 = \overline{OM}$ описывает своим концом окружность, имеющую диаметром отрезок OG . Операцию $I_2 = \frac{U_1}{V}$ можно рассматривать, как обращение прямой \overline{OV} . Следовательно, геометрическим местом, обратным прямой, не проходящей через начало координат, является окружность, проходящая через

начало координат. Диаметр OG окружности равен U_1/OF . Направление вектора \overline{OG} является зеркальным отображением направления \overline{OF} в оси вещественных.

Из рис. 13-19 видно, что $OF = OB \sin(\beta - \alpha')$, и, следовательно,

$$OG = \frac{U_1}{OF} = \frac{U_1}{b \sin(\beta - \alpha')}$$

Перейдем к построению геометрического места вектора тока \bar{I}_1 . Из второго уравнения (*) имеем:

$$I_1 = \frac{CU_1}{A} + \left(-\frac{CB}{A} + D\right) I_2 = \frac{CU_1}{A} + \frac{1}{A} I_2 = \frac{CU_1}{A} + \frac{1}{A} \frac{U_1}{B + zA'} \quad (**)$$

Здесь учтено, что для пассивного четырехполюсника существует связь $AD - BC = 1$.

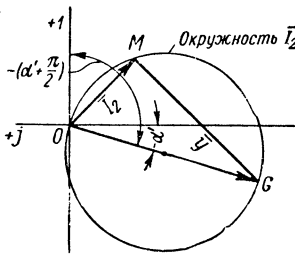


Рис. 13-20.

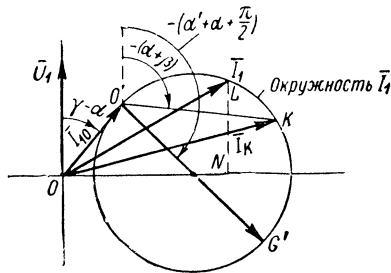


Рис. 13-21.

Комплексному числу $\frac{1}{A} I_2$ соответствует окружность, получаемая поворотом окружности тока \bar{I}_2 , изображенной на рис. 13-20, на угол $(-\alpha)$ и умножением ее диаметра на $\frac{1}{a}$. Для получения геометрического места вектора тока \bar{I}_1 необходимо добавить вектор $\overline{OO'}$, соответствующий комплексному числу $\frac{CU_1}{A} = \frac{cU_1}{a} e^{j(\gamma - \alpha)}$, т. е. сместить всю окружность на расстояние от начала координат, определяемое этим вектором. Окружность тока \bar{I}_1 показана на рис. 13-21. Ее диаметр $O'G'$ определяется комплексом

$$\frac{U_1}{ab \sin(\beta - \alpha')} e^{-j(\alpha' + \alpha + \frac{\pi}{2})} \quad (***)$$

Геометрическое место вектора \bar{U}_2 нетрудно получить, если заметить, что согласно первому уравнению (*) комплекс U_2 выражается в виде

$$U_2 = \frac{U_1}{A} - \frac{B}{A} I_2 = \frac{U_1}{A} - \frac{B}{A} \frac{U_1}{B + zA'}$$

Следовательно, геометрическим местом вектора \bar{U}_2 является также окружность, которая получается суммированием постоянного вектора, соответствующего комплексу U_1/A , и переменного вектора, геометрическим местом которого является окружность, определяемая комплексом $(-\frac{B}{A}I_2)$.

При холостом ходе $z = \infty, I_2 = 0$ и второе слагаемое в выражении для I_1 равно нулю. Следовательно, ток I_1 при холостом ходе равен $I_{10} = U_1 \frac{C}{A}$ и изображается вектором $\overline{OO'}$. При коротком замыкании $z = 0$, выражение для тока I_1 принимает вид $I_{1к} = U_1 (\frac{C}{A} + \frac{1}{AB})$, и, соответственно, вектор тока короткого замыкания равен $\bar{I}_{1к} = \overline{OO'} + \overline{O'K}$, причем вектор $\overline{O'K}$ составляет с осью вещественных угол $(-\alpha - \beta)$.

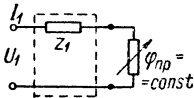


Рис. 13-22.

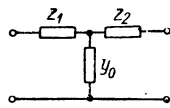


Рис. 13-23.

При изменении z от ∞ до 0 конец вектора тока \bar{I}_1 описывает дугу окружности $O'nK$. Эта дуга окружности соответствует потреблению энергии приемником ($P_2 > 0$). Остальная часть

окружности (дуга KmO') соответствует генераторному режиму приемника ($P_2 < 0$).

Для построения диаграммы необходимо выбрать масштабы тока m_i , напряжения m_u и сопротивления m_z .

Рассмотрим некоторые примеры, относящиеся к наиболее важным случаям.

Пусть по линии передачи (рис. 13-22), обладающей сопротивлением $Z_1 = r_1 + jx_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$, передается энергия к приемнику с сопротивлением $Z_{np} = z e^{j\varphi_{np}}$, для которого $\varphi_{np} = \text{const}$, а z изменяется. Определим геометрическое место вектора тока \bar{I}_1 при $U_1 = U_1 = \text{const}$.

Рассматривая линию передачи как четырехполюсник (часть, обведенная на рис. 13-22 пунктиром) и сопоставляя этот четырехполюсник с общей Т-образной эквивалентной схемой замещения четырехполюсника (рис. 13-23), замечаем, что в данном случае в эквивалентной схеме $Y_0 = 0$ и $Z_2 = 0$. Используя выражения постоянных A, B и C четырехполюсника через параметры Т-образной эквивалентной схемы (§ 13-2), получаем:

$$A = 1 + Z_1 Y_0 = 1, \quad B = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0 = Z_1, \\ C = Y_0 = 0.$$

Уравнение (**) в данном случае приобретает вид

$$I_1 = \frac{U_1}{B + zA} = \frac{U_1}{B + Z_{np}A} = \frac{U_1}{Z_1 + Z_{np}}$$

что можно было бы написать для рассматриваемой простой цепи непосредственно на основе закона Ома.

Длина вектора $\overline{OO'}$ равна нулю, т. е. точка O' совпадает с началом координат O , так как $I_{10} = U_1 \frac{C}{A} = 0$.

Кроме того, имеем:

$$a = 1, \alpha = 0, b = z_1, \beta = \varphi_1, \alpha' = \varphi_{np}.$$

Следовательно, диаметр круга тока равен:

$$OG = \frac{U_1}{z_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_{np})},$$

и вектор \overline{OG} составляет с осью вещественных угол $-(\varphi_{np} + \frac{\pi}{2})$, а вектор тока короткого замыкания составляет с этой осью угол $(-\varphi_1)$. Круговая диаграмма для этого случая приведена на рис. 13-24. При изменении Z_{np} от ∞ до 0 конец вектора тока $\overline{I_1}$ скользит по дуге OnK окружности тока от точки O до точки K . Часть KmO окружности соответствует генераторному режиму приемника.



Рис. 13-24.

Рассмотрим еще случай, когда остается неизменной реактивная проводимость приемника $b_{np} = \text{const}$, а активная проводимость g_{np} приемника изменяется от нуля (холостой ход) до бесконечности (короткое замыкание). Введем величину b_{np} в четырехполюсник, обведенный пунктиром на рис. 13-25. Параметры Т-образной эквивалентной схемы такого четырехполюсника равны $Z_1, Y_0 = -jb_{np}, Z_2 = 0$ и, следовательно,

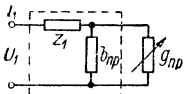


Рис. 13-25.

$$A = 1 + Z_1 Y_0 = 1 - jZ_1 b_{np},$$

$$B = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0 = Z_1,$$

$$C = Y_0 = -jb_{np}.$$

Ток холостого хода, определяющий вектор $\overline{OO'}$ (рис. 13-21), теперь равен:

$$I_{10} = U_1 \frac{C}{A} = -U_1 \frac{jb_{np}}{1 - jz_1 b_{np}}$$

и

$$\overline{OO'} = I_{10}.$$

Диаметр $\overline{O'G'}$ окружности тока определяется по приведенной выше общей формуле (**), если учесть, что ветвь b_{np} мы отнесли

к четырехполюснику и в приемнике осталась только активная проводимость $g_{\text{пр}}$, а следовательно, в этой формуле следует принять $\varphi_{\text{пр}} = 0$, т. е. $\alpha' = \alpha + \varphi_{\text{пр}} = \alpha$. Согласно формуле (***)

$$O'G' = \frac{U_1}{|1 - jZ_1 b_{\text{пр}}| z_1 \sin(\varphi_1 - \alpha)},$$

и направление вектора $\overline{O'G'}$ составляет с осью вещественных угол $(-2\alpha - \frac{\pi}{2})$, где α — аргумент комплекса $A = 1 - jZ_1 b_{\text{пр}}$.

Для определения конца вектора тока короткого замыкания $I_{1\text{к}}$ достаточно провести из точки O' (рис. 13-21) прямую под углом $(-\alpha - \beta) = (-\alpha - \varphi_1)$ к оси вещественных. Точка K пересечения этой прямой с окружностью тока и является концом вектора тока $\bar{I}_{1\text{к}}$.

Диаграмма для этого случая соответствует диаграмме, изображенной на рис. 13-21 для общего случая, причем конкретные значения величин определяются по полученным для этого частного случая формулам. Положение конца вектора тока для того или иного конкретного значения модуля z на диаграмме для случая $\varphi_{\text{пр}} = \text{const}$ (рис. 13-24) или величины $z = \frac{1}{g_{\text{пр}}}$ на диаграмме для случая $b_{\text{пр}} = \text{const}$ (рис. 13-21) определяется по формуле (**).



ЦЕПНЫЕ СХЕМЫ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ

14-1. Характеристические параметры четырёхполюсника

В технических устройствах источник сигналов или энергии иногда соединяют через цепь, состоящую из ряда четырёхполюсников, соединённых каскадно, т. е. входные зажимы каждого последующего четырёхполюсника соединяют с выходными зажимами предыдущего (рис. 14-1). Схемы таких цепей называют *цепными* и *схемами*, а отдельные четырёхполюсники — *звеньями* и этой цепной схемы. Всю цепную схему также можно рассматривать как

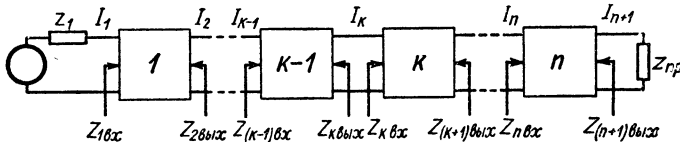


Рис. 14-1.

четырёхполюсник, причем его параметры можно или определить экспериментально указанным в § 13-3 способом, или вычислить по параметрам звеньев, из которых состоит цепная схема, как это показано в § 13-4.

Условимся напряжения и токи между звеньями снабжать индексом, соответствующим номеру последующего звена (рис. 14-1).

Назовем входным сопротивлением k -го звена $Z_{kвх}$ и выходным сопротивлением $k - 1$ звена $Z_{kвых}$, определяемые следующим образом. Разорвем цепь между звеньями $k - 1$ и k , замкнем накоротко источник э. д. с., сохранив в схеме его сопротивление Z_1 , и определим отдельно сопротивления для обеих частей цепной схемы со стороны разрыва, которые и будут равны соответственно $Z_{kвх}$ и $Z_{kвых}$. Обратим внимание, что при такой индексации входное сопротивление любого звена, а также ток и напряжение на входе

звена имеют индекс, соответствующий номеру звена, выходное же сопротивление, а также ток и напряжение на выходе звена имеют индекс, на единицу превышающий номер звена.

Во многих случаях осуществляют так называемое согласование в цепной схеме. *Согласованием звеньев цепной схемы* с сопротивлением источника э. д. с., звеньев между собою и звеньев с сопротивлением нагрузки называют случай, когда одновременно имеют место следующие условия: входное сопротивление $Z_{1\text{вх}}$ на зажимах первого звена оказывается равным сопротивлению Z_1 источника; для любых соседних звеньев входное сопротивление $Z_{k\text{вх}}$ последующего k -го звена равно выходному сопротивлению $Z_{k\text{вых}}$ предыдущего $(k - 1)$ -го звена и выходное сопротивление $Z_{(k+1)\text{вых}}$ последнего n -го звена равно сопротивлению $Z_{\text{пр}}$ приемника (рис. 14-1). При соблюдении этих условий сопротивления $Z_{k\text{вх}}$ и $Z_{(k+1)\text{вых}}$ называют входным и выходным характеристическими сопротивлениями k -го звена (четырёхполюсника), входящего в данную цепную схему, а соединение всех четырёхполюсников цепной схемы при соблюдении указанных условий называют *характеристически согласанным соединением*.

Так как при согласовании $Z_{k\text{вых}} = Z_{k\text{вх}}$, то при этом можно опускать индексы, указывающие выход и вход, и писать просто Z_k . Характеристические сопротивления принято отмечать дополнительным индексом c . Соответственно, характеристические сопротивления k -го четырёхполюсника обозначаются — на входе Z_{kc} и на выходе $Z_{(k+1)c}$.

В дальнейшем, поскольку рассматриваемые свойства будут справедливы для любого k -го четырёхполюсника, с целью упрощения индексации мы будем для первого четырёхполюсника полагать $k = 1$ и $k + 1 = 2$.

Рассматривая отдельно первый четырёхполюсник, при условии согласования, мы должны полагать его замкнутым на сопротивление нагрузки Z_{2c} . Пользуясь системой A -параметров четырёхполюсника и учитывая, что $\dot{U}_2 = Z_{2c}i_2$, можем написать:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_1\dot{U}_2 + B_1i_2 = (A_1Z_{2c} + B_1)i_2, \\ i_1 &= C_1\dot{U}_2 + D_1i_2 = (C_1Z_{2c} + D_1)i_2.\end{aligned}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$Z_{1c} = \frac{\dot{U}_1}{i_1} = \frac{A_1Z_{2c} + B_1}{C_1Z_{2c} + D_1}.$$

В § 13-1 было сказано, что для четырёхполюсника со стороны выходных зажимов уравнения остаются теми же самыми, и только A и D меняются местами. Учитывая это, а также то, что нагрузоч-

ное сопротивление теперь будет $Z_1 = Z_{1c}$, для выходного сопротивления первого четырехполюсника получаем формулу:

$$Z_{2c} = \frac{D_1 Z_{1c} + B_1}{C_1 Z_{1c} + A_1}.$$

Решив совместно два последних уравнения, получим:

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_1 B_1}{C_1 D_1}}, \quad Z_{2c} = \sqrt{\frac{D_1 B_1}{C_1 A_1}}.$$

Для симметричного четырехполюсника имеем $Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c = \sqrt{\frac{B_1}{C_1}}$. В этом случае характеристическое сопротивление называют повторным сопротивлением, так как, нагружая четырехполюсник на сопротивление Z_c , на входе четырехполюсника будем иметь такое же сопротивление Z_c . Полученные два параметра Z_{1c} и Z_{2c} недостаточны для описания свойств четырехполюсника, так как в общем случае четырехполюсник характеризуется тремя независимыми параметрами. Необходимо ввести еще один параметр, связывающий процессы на входе и выходе.

Определим третий характеристический параметр из соотношения:

$$g_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 I_1}{\dot{U}_2 I_2}.$$

Величину g называют мерой передачи четырехполюсника. В системе A -параметров, определив отношения \dot{U}_1/\dot{U}_2 и I_1/I_2 через характеристические сопротивления, путем простых преобразований можно получить:

$$g_1 = \frac{1}{2} \ln \left[\left(A_1 + \sqrt{\frac{B_1 C_1 A_1}{D_1}} \right) \left(D_1 + \sqrt{\frac{B_1 C_1 D_1}{A_1}} \right) \right] = \ln (\sqrt{A_1 D_1} + \sqrt{B_1 C_1}).$$

Для симметричных четырехполюсников вследствие равенства $A = D$ при наличии согласования имеют место соотношения: $\dot{U}_1/I_1 = Z_c = \dot{U}_2/I_2$ и

$$g_1 = \ln (A_1 + \sqrt{B_1 C_1}).$$

Поэтому $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^{g_1}$,

$$g_1 = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} e^{j(\psi_{u_1} - \psi_{u_2})} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{u_1} - \psi_{u_2}) = \alpha + j\beta.$$

Величина $\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2}$ показывает, насколько изменяется при переходе через четырехполюсник по модулю напряжение (или ток),

и носит название коэффициента затухания, так как $\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2}{I_1} = e^{-\alpha}$. Величина $\beta = \psi_{u1} - \psi_{u2}$ указывает, насколько изменится фаза напряжения (или тока), и носит название коэффициента фазы. Безразмерные величины α и β измеряются, соответственно: α в *неперах* и β в *радианах*. Если $\alpha = 1$ непер, то это означает, что напряжение U_2 меньше напряжения U_1 в $e = 2,718$ раза.

На практике такая единица затухания часто оказывается слишком большой, и поэтому используется еще одна единица измерения затухания, называемая *децибелл* (1 *дб*). При этом надо писать: $\alpha = 20 \lg \frac{U_1}{U_2}$. Если $\alpha = 1$ дб, то $\frac{U_1}{U_2} = 10^{\frac{1}{20}} \approx 1,12$.

Очевидно, имеет место равенство:

$$1 \text{ непер} = 8,086 \text{ дб}, \quad 1 \text{ дб} = 0,115 \text{ непер}.$$

Так как $e^{g_1} = \sqrt{A_1 D_1 + B_1 C_1}$ и $A_1 D_1 - B_1 C_1 = 1$, то легко заметить, что $e^{-g_1} = \sqrt{A_1 D_1 - B_1 C_1}$. Для гиперболических синуса и косинуса от аргумента g_1 найдем:

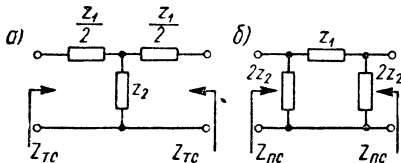


Рис. 14-2.

$$\operatorname{ch} g_1 = \frac{1}{2} (e^{g_1} + e^{-g_1}) = \sqrt{A_1 D_1},$$

$$\operatorname{sh} g_1 = \frac{1}{2} (e^{g_1} - e^{-g_1}) = \sqrt{B_1 C_1},$$

$$\operatorname{cth} g_1 = \sqrt{\frac{A_1 D_1}{B_1 C_1}}.$$

Выразим A -параметры четырехполюсника через характеристические. Не приводя эти достаточно простые выкладки, можно записать:

$$A_1 = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \operatorname{ch} g_1, \quad B_1 = \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} \operatorname{sh} g_1,$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}} \operatorname{sh} g_1, \quad D_1 = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \operatorname{ch} g_1.$$

В частности, уравнения симметричного четырехполюсника в системе A -параметров можно записать в виде

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} g_1 + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{sh} g_1, \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh} g_1}{Z_c} + \dot{I}_2 \operatorname{ch} g_1.$$

Наиболее простые выражения для характеристических сопротивлений можно получить, если выразить их через параметры холостого

хода и короткого замыкания. Учитывая, что $\frac{A_1}{C_1} = Z_{10}$, $\frac{B_1}{D_1} = Z_{1к}$, $\frac{D_1}{C_1} = Z_{20}$ и $\frac{B_1}{A_1} = Z_{2к}$, имеем:

$$Z_{1с} = \sqrt{Z_{10} Z_{1к}}, \quad Z_{2с} = \sqrt{Z_{20} Z_{2к}},$$

$$\operatorname{th} g_1 = \sqrt{\frac{Z_{1к}}{Z_{10}}} = \sqrt{\frac{Z_{2к}}{Z_{20}}}, \quad \operatorname{sh} g_1 = \sqrt{\frac{Z_{1к}}{Z_{10} - Z_{1к}}}.$$

Замещая симметричное звено эквивалентной Т- или П-образной схемой, введем для параметров этих схем обозначения, показанные на рис. 14-2, отличающиеся от ранее принятых, но более удобные для цепных схем и фильтров. При этом характеристические параметры запишутся через параметры схем замещения в виде для Т-схемы:

$$Z_c = Z_{сТ} = \sqrt{Z_1 Z_2 (1 + Z_1/4Z_2)}, \quad \operatorname{th} g_1 = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2 + Z_1^2/4}}{Z_1/2 + Z_2};$$

для П-схемы:

$$Z_c = Z_{сП} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1 + Z_1/4Z_2}}, \quad \operatorname{th} g_1 = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2 + Z_1^2/4}}{Z_1/2 + Z_2}.$$

14-2. Передаточные функции согласованных цепных схем

В предыдущем параграфе мы дали определение цепных схем как последовательности каскадно соединенных четырехполюсников. При наличии характеристического согласования легко определить передаточные функции по напряжению и по току, если имеются характеристические параметры отдельных звеньев. Из определения меры передачи при характеристическом согласовании (рис. 14-1) для входящего в каскад k -го четырехполюсника имеем:

$$\frac{\dot{U}_k \dot{I}_k}{\dot{U}_{k+1} \dot{I}_{k+1}} = e^{2g_k}, \quad \dot{U}_k = I_k Z_{кс}, \quad \dot{U}_{k+1} = I_{k+1} Z_{k+1,с},$$

и, следовательно, передаточные функции по напряжению и току k -го звена будучт:

$$K_U^{(k)} = \frac{\dot{U}_{k+1}}{\dot{U}_k} = \sqrt{\frac{Z_{кс}}{Z_{k+1,с}}} e^{-g_k},$$

$$K_I^{(k)} = \frac{\dot{I}_{k+1}}{\dot{I}_k} = \sqrt{\frac{Z_{k+1,с}}{Z_{кс}}} e^{-g_k}.$$

Передаточные функции всей цепной схемы будут:

$$K_U = \frac{\dot{U}_n}{\dot{U}_1} = K_U^{(1)} K_U^{(2)} \dots K_U^{(n)} = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{n+1,c}}} e^{-\sum_{k=1}^n g_k},$$

$$K_I = \frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_1} = K_I^{(1)} K_I^{(2)} \dots K_I^{(n)} = \sqrt{\frac{Z_{n+1,c}}{Z_{1c}}} e^{-\sum_{k=1}^n g_k}.$$

В случае *однородной цепной схемы*, составленной из одинаковых симметричных звеньев, имеем:

$$K_U = K_I = e^{-ng_1},$$

так как при этом $Z_{n+1,c} = Z_{1c}$ и $g_1 = g_2 = \dots = g_n$.

14-3. Электрические фильтры

Четырехполюсники, частотные характеристики передаточных функций которых имеют резко выраженную избирательность для отдельных частот или полос частот, называют частотными электрическими фильтрами, или просто электрическими фильтрами. Правильно сконструированный фильтр должен пропускать к приемнику сигналы практически без изменения его амплитуды в некотором диапазоне частот, называемом *полосой пропускания*, или *зоной прозрачности*, и не пропускать сигналы, частоты которых лежат вне полосы пропускания, т. е. лежат в так называемой *полосе задерживания*. По виду полосы пропускания различают: *фильтры нижних частот*, полоса пропускания которых лежит в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_c$, *фильтры верхних частот*, полоса пропускания которых лежит в диапазоне от $\omega = \omega_c$ до $\omega = \infty$, *полосовые фильтры*, полоса пропускания которых лежит в диапазоне от $\omega = \omega_1$ до $\omega = \omega_2$ и, наконец, *заграждающие фильтры*, полоса пропускания которых лежит в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_1$ и от $\omega = \omega_2$ до $\omega = \infty$. Фильтры последнего типа не пропускают сигналы, частоты которых лежат в диапазоне от $\omega = \omega_1$ до $\omega = \omega_2$.

Вышеприведенная классификация фильтров не единственная, так как фильтры можно также классифицировать по характеру их элементов. Элементом в теории фильтров называют каждую индуктивную катушку, каждый конденсатор, каждое сопротивление или другие определяющие процесс детали, из которых собирается фильтр. В зависимости от вида элементов фильтры разделяются на следующие типы: *реактивные фильтры*, состоящие из реактивных катушек и конденсаторов; *безындукционные*

фильтры, состоящие из конденсаторов и сопротивлений; пьезоэлектрические фильтры, состоящие, главным образом, из кварцевых пластин, и др.

Классификация может быть осуществлена также по способу соединения элементов и по количеству отдельных звеньев.

Ниже мы рассмотрим фильтры, состоящие из реактивных элементов, собранных в цепные схемы. При этом мы сможем использовать соотношения, полученные в предыдущих главах, содержащих теорию четырехполюсников.

Воспользуемся характеристическими параметрами четырехполюсников для выработки некоторых общих положений, которым должны удовлетворять фильтры. Наиболее простой путь получения желаемой частотной характеристики передаточной функции заключается в том, что фильтр разделяется на отдельные четырехполюсники, которые соединяются между собой в виде характеристически согласованных цепных схем. При этом коэффициент затухания $\alpha(\omega)$ всей цепной схемы получается как сумма коэффициентов затухания отдельных четырехполюсников — отдельных звеньев. Наиболее простые выражения получаются для меры передачи g при характеристическом согласовании всей цепной схемы между ее звеньями и с сопротивлениями источника и приемника. Однако точное согласование возможно только для определенной частоты. Насколько это практически выполнимо в диапазоне частот, будет изложено в следующих параграфах. Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять элементы реактивного фильтра, чтобы в полосе пропускания имело место наименьшее искажение сигнала. В идеальном случае мы должны обеспечить нулевое затухание сигнала ($\alpha = 0$). Действительно, при полном характеристическом согласовании имеем:

$$\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = e^{\alpha + j\beta}, \quad \text{или} \quad \ln \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \alpha.$$

При $\alpha = 0$ имеем $U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{ВХ}}$.

Для меры передачи всей цепной схемы имеем:

$$\begin{aligned} \text{th } g &= \text{th}(\alpha + j\beta) = \frac{\text{sh } \alpha \text{ ch } \alpha + j \sin \beta \cos \beta}{\text{sh}^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{\text{sh } 2\alpha}{\text{ch } 2\alpha + \cos 2\beta} + j \frac{\sin 2\beta}{\text{ch } 2\alpha + \cos 2\beta}. \end{aligned}$$

Равенство $\alpha = 0$ означает, что $\text{th } g$ является мнимой величиной. Но для $\text{th } g$ имеем еще выражение:

$$\text{th } g = \text{th}(\alpha + j\beta) = \sqrt{\frac{Z_{1\text{К}}}{Z_{10}}} \quad \text{и при } \alpha = 0 \quad \text{th } g = j \text{tg } \beta = \sqrt{\frac{Z_{1\text{К}}}{Z_{10}}}.$$

Отсюда вытекает, что отношение $Z_{1\text{К}}/Z_{10}$ должно быть величиной отрицательной. Если мы имеем частотные зависимости $Z_{1\text{К}}$ и Z_{10}

для цепи, состоящей только из реактивных элементов, то, пользуясь этим, можем сразу же указать полосы пропускания и полосы задерживания.

Например, на рис. 14-4 приведены частотные зависимости $Z_{1к}$ и Z_{10} для цепи, показанной на рис. 14-3, которые были рассмотрены в § 6-3, 6-6.

Из рисунка видно, что для данной схемы при нагрузке, равной $Z_{2с}$, и сопротивлении источника $Z_{1с}$ имеются две полосы пропускания, когда x_{10} и $x_{1к}$ имеют разные знаки, и три полосы задерживания (1, 3 и 5), когда x_{10} и $x_{1к}$ имеют одинаковые знаки.

Нетрудно заметить, что в полосе пропускания коэффициент фазы β меняется, а в полосе задерживания он остается величиной

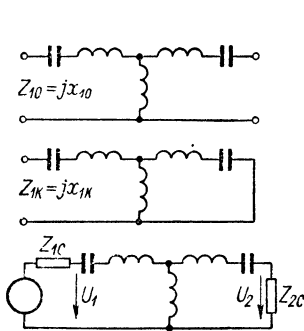


Рис. 14-3.

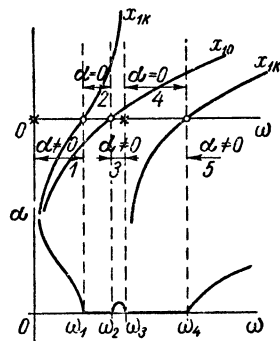


Рис. 14-4.

неизменной. Действительно, в полосе задерживания знаки x_{10} и $x_{1к}$ одинаковы, и поэтому $th g$ — вещественная величина, т. е. $\sin \beta \times \cos \beta = 0$, и если $\alpha \neq 0$, то $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, 5\pi/2, 3\pi...$

На рис. 14-4 показана зависимость $\alpha(\omega)$ для рассматриваемой цепи (рис. 14-3).

Желательная частотная характеристика, которая в идеальном случае должна иметь диапазоны частот с нулевым затуханием и диапазоны частот с бесконечно большим затуханием, недостижима даже при полном согласовании звена из реактивных элементов с источником и нагрузкой. Как видно из рис. 14-4, коэффициент затухания в полосах задерживания не равен бесконечности. С целью получения больших величин коэффициентов затухания фильтр образуют из нескольких таких звеньев, соединенных каскадно, так как при этом при наличии характеристического согласования коэффициенты затухания отдельных звеньев суммируются.

Кроме того, трудность получения желаемых характеристик заключается еще и в том, что для полного согласования в диапазоне

частот сопротивления приемника и генератора должны изменяться с изменением частоты по такому же закону, как и характеристические сопротивления фильтра. Последнее трудно осуществимо.

Рассмотрим простейшие звенья, из которых можно получить составные многозвенные фильтры.

В § 13-2 было показано, что минимальное число ветвей эквивалентной схемы четырехполюсника в общем случае равно трем. Поэтому простейшей эквивалентной схемой звена являются эквивалентные Т-образные и П-образные схемы. Однако эти схемы, в свою очередь, можно представить в виде каскадного соединения двух еще более простых Г-образных схем (рис. 14-5).

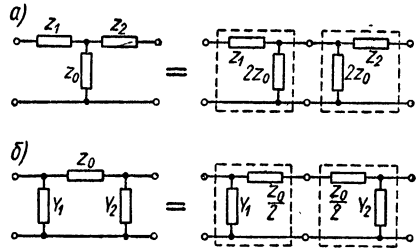


Рис. 14-5.

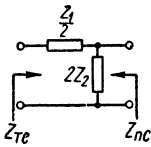


Рис. 14-6.

Таким образом, исследование и конструирование сложных многозвенных фильтров при характеристическом согласовании сводится к исследованию простейших Г-, П- и Т-образных звеньев, причем каждая ветвь этих звеньев, в свою очередь, может содержать несколько элементов. Для таких схем характеристические параметры можно определить особенно просто. Например, для Г-образной схемы (рис. 14-6) характери-

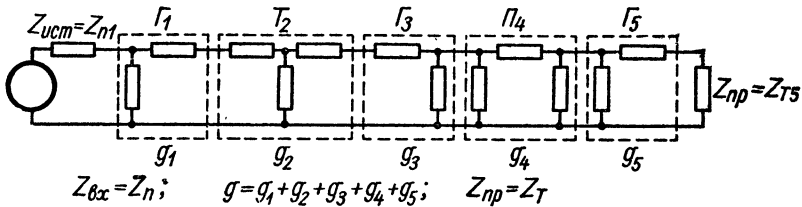


Рис. 14-7.

стическое сопротивление со стороны «П-входа», обозначаемое $Z_{сн}$, определится просто:

$$Z_{сн} = \sqrt{Z_{10} Z_{1к}} = \sqrt{2Z_2 \left(\frac{Z_1 Z_2}{2Z_2 + Z_1/2} \right)} = \frac{(Z_1 Z_2)^{1/2}}{(1 + Z_1/4Z_2)^{1/2}}$$

Характеристическое сопротивление со стороны «Т-входа», обозначаемое $Z_{сг}$, определится в виде

$$Z_{сг} = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + 2Z_2 \right) \frac{Z_1}{2}} = (Z_1 Z_2)^{1/2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)^{1/2}$$

Для меры передачи имеем формулу:

$$\begin{aligned} \text{th } g &= \text{th } (\alpha + j\beta) = \sqrt{\frac{Z_{\text{пк}}}{Z_{\text{по}}}} = \sqrt{\frac{Z_{\text{тк}}}{Z_{\text{то}}}} = \sqrt{\frac{Z_1/2}{2Z_2 + Z_1/2}} = \\ &= \sqrt{\frac{Z_1^2}{4(Z_1Z_2 + Z_1^2/4)}}. \end{aligned}$$

Г-образные звенья используются для согласования сопротивления нагрузки и источника и согласования Т- и П-образных звеньев между собой. Пример сложного составного фильтра приведен на рис. 14-7.

14-4. Электрические фильтры нижних частот типа *k*

В предыдущем параграфе для характеристических параметров мы получили выражения, где входит произведение Z_1Z_2 . Расчет существенно облегчается, если Z_1Z_2 — величина положительная, не зависящая от частоты, и вещественная, т. е. $Z_1Z_2 = k = R_0^2$.

Фильтры, где имеет место это условие, называют фильтрами типа *k*.

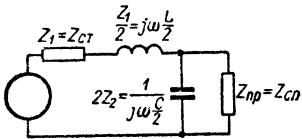


Рис. 14-8.

Если рассмотреть Г-схему (рис. 14-6), то очевидные физические соображения подскажут, что при достаточно больших частотах напряжение U_2 будет при заданном U_1 мало в том случае, если на выходе (в ветвь Z_2) включен конденсатор,

так как при этом с ростом частоты величина Z_2 будет стремиться к нулю. Ток в приемнике с ростом частоты будет тем меньше, чем больше сопротивление Z_1 при высоких частотах, т. е. если Z_1 является индуктивным сопротивлением. Таким образом, Г-образная схема, показанная на рис. 14-8, пропускает низкие частоты и задерживает высокие. Для этой схемы имеем:

$$Z_1Z_2 = j\omega \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{j\omega C/2} = \frac{L}{C} = R_0^2.$$

Для Т- и П-схем обеспечение этого условия имеет место, если сопротивления Z_1 и Z_2 взяты, соответственно: $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$. Характеристические сопротивления Г-схемы (рис. 14-6) со стороны «Т- и П-входов» и характеристические сопротивления симметричных Т- и П-схем (рис. 14-2) в данном случае равны, соответственно (§ 14-1 и 14-3):

$$\begin{aligned} Z_{\text{ст}} &= R_0 \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = R_0 \sqrt{1 + \frac{j\omega L}{4/j\omega C}} = R_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}, \\ Z_{\text{сн}} &= \frac{R_0}{\sqrt{1 + Z_1/4Z_2}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \omega^2 LC/4}}. \end{aligned}$$

Мера передачи g Γ -образной схемы определится из формулы:

$$\operatorname{th} g = \sqrt{\frac{-\omega^2 L^2}{4(R_0^2 - \omega^2 L^2/4)}}.$$

В предыдущем параграфе мы отметили, что $\alpha = 0$, если $\operatorname{th} g$ — мнимая величина, что имеет место, если $R_0^2 - \frac{\omega^2 L^2}{4} > 0$, т. е. в пределах частот от $\omega = 0$ до $\omega_c = 2R_0/L$. При частотах выше ω_c величина $\operatorname{th} g$ является вещественной, и поэтому $\alpha \neq 0$. Зависимости затухания α и отношения U_2/U_1 от частоты в идеальном случае полного согласования приведены на рис. 14-9, а, б. Нетрудно видеть, что для Т- и П-образных схем

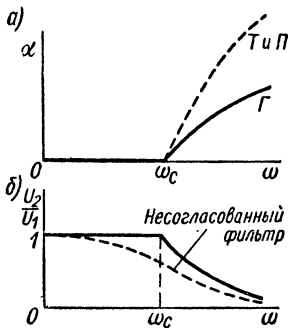


Рис. 14-9.

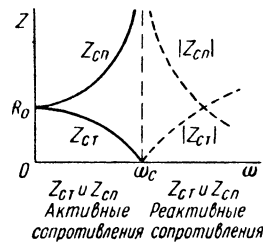


Рис. 14-10.

величина ω_c будет такой же, как и для Γ -образной схемы, но величина α (ω) для них будет в два раза больше (пунктир на рис. 14-9, а).

Здесь необходимо отметить, что условие характеристического согласования требует, чтобы приемник и генератор обладали сопротивлениями, равными либо Z_{ct} , либо Z_{cp} (смотря какова схема), т. е. их частотные характеристики должны иметь вид, показанный на рис. 14-10.

В тех случаях, когда сопротивление приемника $r_{пр}$ и генератора r_1 являются постоянными величинами, их согласование производится со значением сопротивлений Z_{ct} и Z_{cp} при низких частотах. Как видно из приведенных формул, при $\omega \rightarrow 0$ имеем $Z_{ct} \rightarrow R_0$ и $Z_{cp} \rightarrow R_0$. Поэтому величина $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ должна быть принята равной сопротивлению $r_{пр}$ приемника. Этой же величине $R_0 = r_{пр}$ необходимо сделать равным и сопротивление генератора r_1 . Кроме того, обычно задана частота среза ω_c , равная $\omega_c = \frac{2R_0}{L} = 2\sqrt{\frac{1}{LC}}$. Из этих условий определяются значения L и C Γ -образного звена. При согласовании только на самых низких частотах реальная частотная характеристика (пунктир на рис. 14-9) рассматриваемого звена

будет отличаться от частотной характеристики (сплошная кривая на рис. 14-9, б) в идеальном случае полного согласования во всем диапазоне частот. Количество звеньев выбирают исходя из условия получения желаемого коэффициента затухания.

14-5. Электрические фильтры нижних частот типа m

Электрические фильтры типа k имеют тот недостаток, что для получения большой крутизны роста $\alpha(\omega)$ в полосе задерживания необходимо применять соединения многих звеньев. Кроме того, характеристические сопротивления соединения этих фильтров сильно меняются в полосе пропускания, что приводит к усложнению условий согласования, а при согласовании сопротивления нагрузки и источника

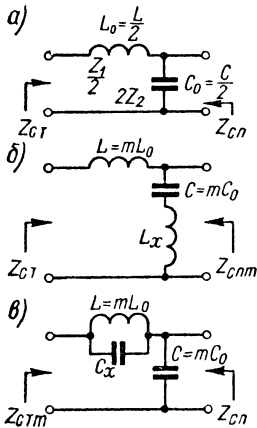


Рис. 14-11.

только при нулевой частоте — и к появлению затухания в полосе пропускания (рис. 14-9). Фильтры типа m не обладают этими недостатками. Как и прежде, весь ход рассуждений проведем для Г-образного звена фильтра нижних частот. Простые физические соображения помогают указать на два способа увеличения скорости роста $\alpha(\omega)$ в полосе задерживания. При первом из них в плече Z_2 осуществляется резонанс напряжений при частоте $\omega_\infty > \omega_c$, вследствие чего плечо при этой частоте окажется короткозамкнутым ($Z_2 = 0$ и $U_2 = 0$). Поэтому при частоте ω_∞ получим $\alpha = \infty$. Г-образное звено (рис. 14-11, б), основанное на этом принципе, и фильтр, составленный из таких звеньев, носят название *последовательно-производных*. Второй способ основан на том, что в плече Z_1 осуществляется резонанс токов при частоте $\omega_\infty > \omega_c$. Тогда при частоте ω_∞ имеем $\alpha = \infty$, так как $Z_2 = \infty$ и $U_2 = 0$. Г-образное звено, изображенное на рис. 14-11, в, а также и фильтр, составленный из таких звеньев, называют *параллельно-производными*. Эти термины «параллельно-производный» и «последовательно-производный» показывают, что звенья типа m на рис. 14-11, б и в являются производными от звена типа k на рис. 14-11, а, называемого *прототипом*. Выбор частоты ω_∞ — частоты пика затухания — определяется по условиям задачи, т. е. из желаемой скорости роста $\alpha(\omega)$.

Подчиним выбор параметров фильтра типа m условиям хорошего согласования его с постоянным сопротивлением и звеном фильтра типа k .

Пусть задано число

$$m = \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_\infty^2}},$$

где

$$\omega_\infty^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad \omega_c^2 = \frac{1}{L_0 C_0}.$$

Здесь ω_c — частота среза прототипа — фильтра типа k (рис. 14-11, а), ω_∞ — частота пика затухания фильтра типа m (рис. 14-11, б, в). Нетрудно убедиться, что, связав параметры элементов последовательно-производного звена (рис. 14-11, б) с параметрами элементов прототипа (рис. 14-11, а) соотношениями

$$L = mL_0, \quad C = mC_0 \quad \text{и} \quad L_x = \frac{1-m^2}{m} L_0,$$

получим равенство характеристического сопротивления $Z_{стm}$ звена типа m со стороны «Г-входа» и соответствующего сопротивления $Z_{ст}$ прототипа:

$$Z_{стm} = Z_{ст}.$$

При этом характеристическое сопротивление звена типа m со стороны «П-входа» определится через соответствующее сопротивление прототипа в виде

$$Z_{спm} = Z_{сп} \left[1 - \frac{\omega^2 (1-m^2)}{\omega_c^2} \right].$$

Зависимость $Z_{спm}$ от частоты для различных m приведена на рис. 14-12. Определив параметры элементов параллельно-производного звена (рис. 14-11, в) из соотношений

$$L = mL_0, \quad C = mC_0 \quad \text{и} \quad C_x = \frac{1-m^2}{m} C_0,$$

получим:

$$Z_{спm} = Z_{сп} \quad \text{и} \quad Z_{стm} = \frac{Z_{ст}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} (1-m^2)}.$$

Зависимости $Z_{спm}$ и $Z_{стm}$ от частоты для различных m приведены на рис. 14-12 и 14-13.

Как видно из этих рисунков, характеристические сопротивления $Z_{спm}$ и $Z_{стm}$ близки к R_0 в более широком диапазоне частот, чем $Z_{сп}$ и $Z_{ст}$. Из рис. 14-14 видно, что для меньших значений m частота ω_∞ близка к ω_c и рост затухания происходит более резко. Однако выбор слишком малых значений m связан со значительным снижением затухания в полосе задерживания при больших ω , что нежелательно. По этой причине фильтры типа m обычно соединяют каскадно с фильтрами типа k , достигая тем самым желаемого

коэффициента затухания в полосе задерживания при высоких частотах и большой крутизне роста $\alpha(\omega)$ около частоты среза. То обстоятельство, что фильтр типа m обладает характеристическим сопротивлением или $Z_{сн}$ или $Z_{ст}$, является весьма полезным при согласовании звеньев типа k и m в многосвязном фильтре.

Порядок расчета фильтра можно принять, например, следующим: по величине сопротивления нагрузки R_0 и по частоте среза ω_c

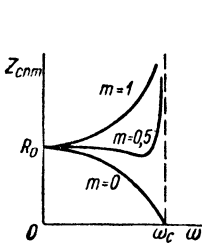


Рис. 14-12.

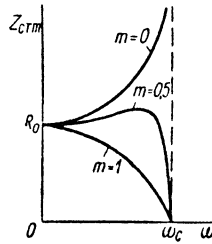


Рис. 14-13.



Рис. 14-14.

определяют исходные данные L_0 и C_0 для Г-образного прототипа по формулам:

$$L_0 = \frac{L_1}{2} = \frac{R_0}{\omega_c} \quad \text{и} \quad C_0 = \frac{C_2}{2} = \frac{1}{R_0 \omega_c}.$$

Затем определяют по формуле для $\text{th } g$ (§ 14-3) коэффициент затухания звена. По желаемой величине коэффициента затухания всего фильтра при высоких частотах определяют количество звеньев в фильтре. По желаемой крутизне роста $\alpha(\omega)$ определяют ω_∞ и, следовательно, параметры фильтра типа m .

Конечно, приведенная схема расчета является весьма приближенной, так как точный расчет фильтра связан с учетом влияния рассогласования, наличия активных сопротивлений в элементах фильтра и т. д. Поэтому после проведения приближенного расчета следует, если необходимо, произвести уточнение с учетом этих факторов. Для практических расчетов разработан ряд рекомендаций и получены серии кривых, которые дают возможность относительно просто и точно спроектировать фильтр с желаемыми характеристиками.

14-6. Метод преобразования частоты. Электрические фильтры верхних частот. Полосовые электрические фильтры

Фильтры низких частот могут служить основой для расчета фильтров верхних частот и полосовых фильтров. Для этой цели применим метод преобразования частот. Он заключается в том, что если имеется некоторая функция $F(p)$ комплексной частоты p ,

то можно получить другую функцию $F(s)$ комплексной частоты s , пользуясь связью $p(s)$ между этими частотами.

Пусть исследуемой функцией является операторное сопротивление $Z(p)$. Для цепи любой сложности $Z(p)$ зависит от сопротивлений в ветвях, имеющих в общем случае вид $Z_i(p) = pL_i + \frac{1}{pC_i} + r_i$. Рассмотрим случай, когда $r=0$, т. е. когда цепь состоит из реактивных элементов. Преобразование

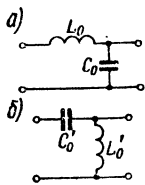


Рис. 14-15.

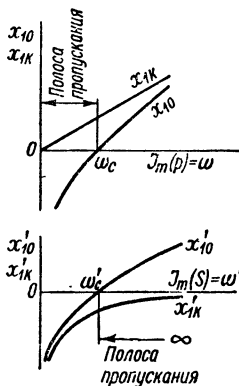


Рис. 14-16.

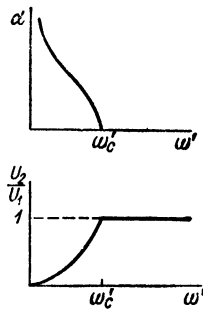


Рис. 14-17.

частоты $p(s)$ для таких цепей можно представить так, что в первоначальной цепи каждое сопротивление $Z_i(p) = pL_i + \frac{1}{pC_i}$ заменяется некоторым другим сопротивлением $Z_i(s)$ сложной конфигурации, определяемой видом функции $p(s)$. Пусть $p(s) = \frac{a}{s}$; тогда

легко заметить, что в новых переменных $Z_i(s) = \frac{aL_i}{s} + \frac{s}{aC_i} = \frac{1}{sC'_i} + sL'_i$, т. е. для переменной s можно получить новую цепь с сопротивлением $Z_i(s)$ из прежней цепи с сопротивлением $Z_i(p)$, заменив в последней все индуктивности L_i на емкости C_i и все емкости C_i на индуктивности L'_i .

Применительно к схеме Г-образного звена фильтра нижних частот (рис. 14-15, а) преобразование $p = a/s$ дает схему, приведенную на рис. 14-15, б. Нетрудно видеть, что для этой схемы частотные зависимости сопротивлений холостого хода и короткого замыкания $Z_{10}(s) = jx_{10}(s)$ и $Z_{1K}(s) = jx_{1K}(s)$ таковы, что полоса пропускания начинается с частоты ω_c , т. е. фильтр с такой схемой пропускает только высокие частоты (рис. 14-16 и 14-17).

Таким образом, фильтр верхних частот можно получить из фильтра нижних частот, заменив в последнем все емкости на индуктивности и все индуктивности на емкости (рис. 14-15). Если взять частоту среза одинаковой для обоих фильтров ($\omega'_c = \omega_c$), то параметры фильтра верхних частот определяются через параметры фильтра нижних частот равенствами: $C'_0 = C_0$ и $L'_0 = L_0$ с указанной заменой мест элементов в схеме рис. 14-15. Характеристические параметры при этом запишутся в виде

$$Z_{\text{сн}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}};$$

$$Z_{\text{сг}} = R_0 \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = R_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}};$$

$$\text{th } g = \sqrt{\frac{Z_{1\text{К}}}{Z_{10}}} = \sqrt{\frac{1/j\omega C'_0}{\frac{1}{j\omega C'_0} + j\omega L'_0}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}.$$

Для получения характеристик полосового фильтра будем пользоваться методом преобразования частоты. Пусть $p(s) = bs + \frac{a}{s}$. Тогда

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pC} = \left(bs + \frac{a}{s} \right) L + \frac{1}{\left(bs + \frac{a}{s} \right) C} =$$

$$= bsL + \frac{1}{s \frac{1}{aL}} + \frac{1}{\frac{aC}{s} + bsC}.$$

Применение данного преобразования превращает индуктивность с сопротивлением pL в последовательно соединенные индуктивность и емкость с сопротивлением $bsL + \frac{1}{sC'}$, а емкость с проводимостью pC — в параллельно соединенные емкость и индуктивность с проводимостью $bsC + \frac{aC}{s}$ (рис. 14-18).

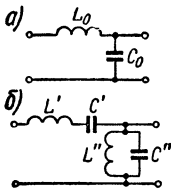


Рис. 14-18.

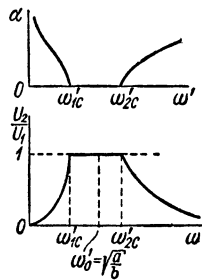


Рис. 14-19.

Рассмотрим, каким образом преобразовывается полоса пропускания фильтра нижних частот при использова-

нии такого преобразования. Применяя соответствие $p = bs + \frac{a}{s}$ и частотную характеристику передаточной функции Г-образ-

ного звена фильтра нижних частот (рис. 14-19), получим соответствие:

$$\text{при } s = 0 \quad p = \infty \text{ и } \frac{U_2}{U_1} = 0,$$

$$\text{при } s = \infty \quad p = \infty \text{ и } \frac{U_2}{U_1} = 0,$$

$$\text{при } s = -\frac{a}{b} \quad p = 0 \text{ и } \frac{U_2}{U_1} = 1.$$

Полагая комплексные частоты мнимыми $p = j\omega$ и $s = j\omega'$, мы получим преобразование частотной характеристики передаточной функции. Частоте среза ω_c фильтра нижних частот соответствуют две частоты ω'_{1c} и ω'_{2c} (рис. 14-19) среза полосового фильтра, определяемые из уравнения:

$$j\omega_c = j\omega' b + \frac{a}{j\omega'} \quad \text{или} \quad \omega_c = \omega' b - \frac{a}{\omega'}.$$

Отсюда

$$\omega'_{1c, 2c} = \frac{\omega_c}{2b} \pm \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4b^2} + \frac{a}{b}}$$

или

$$\omega'_{2c} - \omega'_{1c} = \frac{\omega_c}{b} \quad \text{и} \quad \omega'_{1c} \omega'_{2c} = \frac{a}{b} = \omega_0'^2,$$

причем частота $\omega'_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$, т. е. $s^2 = -\frac{a}{b}$ соответствует $p = 0$.

Таким образом, если задана полоса пропускания полосового фильтра, лежащая между частотами среза ω'_{1c} и ω'_{2c} , то легко рассчитать коэффициенты a и b и тем самым параметры элементов преобразованной схемы, исходя из предварительно рассчитанного фильтра нижних частот типа k с заданной произвольно ω_c при известном R_0 . Расчет сильно упрощается, если ширины полос пропускания полосового фильтра и фильтра нижних частот взять одинаковыми, т. е. $\omega'_{2c} - \omega'_{1c} = \omega_c - 0$. Тогда $b = 1$ и $a = \omega'_{1c} \omega'_{2c}$.

Метод преобразования частоты можно применить и по отношению к фильтрам типа m , получив таким образом фильтры типа m для верхних частот и соответствующие полосовые фильтры.

Если преобразование вида $p = bs + \frac{a}{s}$ применить по отношению к фильтру верхних частот, то можно получить также и заграждающий фильтр.

В качестве полосового фильтра могут служить и индуктивно связанные контуры, содержащие конденсаторы, что видно из изложенного в § 6-8.

14-7. Структурные схемы

Сложность современных систем и устройств автоматики, радиотехники и электроизмерительной техники заставляет при анализе этих систем рассматривать укрупненно отдельные их участки и изучать в обобщенном виде свойства этих участков в отношении передачи через них сигналов и энергии. Эти свойства характеризуются передаточной функцией рассматриваемого участка системы.

Такие отдельные участки системы, содержащие в себе, в общем случае, комплексы элементов, соединенных в сложные электрические цепи, называют иногда **б л о к а м и** системы.

При рассмотрении передаточных функций четырехполюсников, представляющих собою как раз один из наиболее распространенных видов укрупненного блока электрической цепи, можно заметить, что эта функция в сильной степени зависит от величин сопротивлений, подключаемых к входу и выходу четырехполюсника. Однако, если все блоки системы согласованы между собой, а также с сопротивлениями источника энергии и приемника, то каждый блок характеризуется одной определенной передаточной функцией. Согласование может быть осуществлено не только подбором свойств самих блоков, но и путем включения между ними тех или иных дополнительных элементов, например, трансформаторов с характеристиками, близкими к идеальным, обладающих свойством преобразовывать величину сопротивления (§ 5-17). При соблюдении этих условий блоки системы характеризуются определенными передаточными функциями.

Во многих случаях блоки системы характеризуются свойством односторонней направленности передачи сигнала или энергии от входных зажимов к выходным. Таковым является, например, ламповый усилитель, в котором сигнал передается от входных зажимов управляющей сетки к выходным зажимам анодной цепи, и передача сигнала в обратном направлении не происходит. Таковыми являются также различные блоки систем автоматики, в которых осуществляется воздействие только со стороны цепи управления на управляемую цепь. Подобные блоки называют **б л о к а м и** **н а п р а в л е н н о г о** **д е й с т в и я**.

Система, составленная из блоков направленного действия, условно изображается ее **с т р у к т у р н о й** **с х е м о й**. Каждый блок в этой схеме изображается в виде прямоугольника, внутри которого указывается его передаточная функция. Блоки соединяются между собой линиями со стрелками, указывающими направление передачи действия. Рядом с этими линиями помечаются величины, для которых определяется передаточная функция. Например, передаточные функции четырехполюсника могут быть определены как отношение операторных изображений либо напряжений

на выходе и входе, либо токов на выходе и входе, либо напряжения на выходе и тока на входе и, наконец, либо тока на выходе и напряжения на входе. Величины, операторные изображения которых входят в передаточную функцию, и обозначаются на соединительных линиях между блоками.

Рассмотрим несколько простейших способов соединения блоков в структурных схемах.

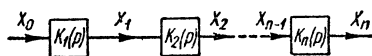


Рис. 14-20.

Последовательное соединение в структурной схеме указано на рис. 14-20. Передаточная функция при этом в общем виде имеет выражение:

$$K(p) = \frac{X_n(p)}{X_0(p)} = \frac{X_1(p)}{X_0(p)} \cdot \frac{X_2(p)}{X_1(p)} \cdot \frac{X_3(p)}{X_2(p)} \dots \frac{X_n(p)}{X_{n-1}(p)} =$$

$$= K_1(p) \cdot K_2(p) \dots K_n(p) = \prod_{j=1}^n K_j(p).$$

Параллельное соединение в структурной схеме имеет некоторые особенности, связанные с направлением передачи действия. В этом смысле необходимо отличать в структурных схемах два вида узлов (точек), где происходит соединение нескольких блоков. На структурной схеме могут быть точки, где данная функция

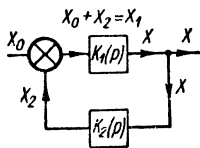


Рис. 14-21.

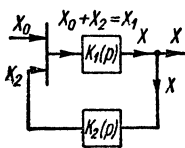


Рис. 14-22.

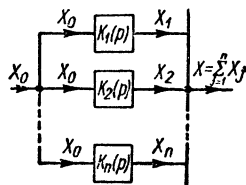


Рис. 14-23.

передается другим блокам без изменения. Назовем эти точки *точками ответвления*. На структурной схеме их изображают в виде сплошных кружков. В другом случае в данной точке происходит суммирование или вычитание различных функций. Назовем эти точки *точками суммирования* (сложения). Такие точки на структурной схеме обозначают либо в виде кружков с крестиком (рис. 14-21), либо в виде, показанном на рисунке 14-22.

Соединение, когда все входы блоков соединены в точке ответвления, а все выходы в точке суммирования, называется *параллельным соединением в структурной схеме* (рис. 14-23). При этом

передаточная функция всей схемы определится как сумма передаточных функций отдельных блоков:

$$K(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j(p)}{X_0(p)} = \sum_{j=1}^n K_j(p).$$

Схема, в которой входы двух блоков с различными направлениями соединены в точке суммирования, а их выходы в точке

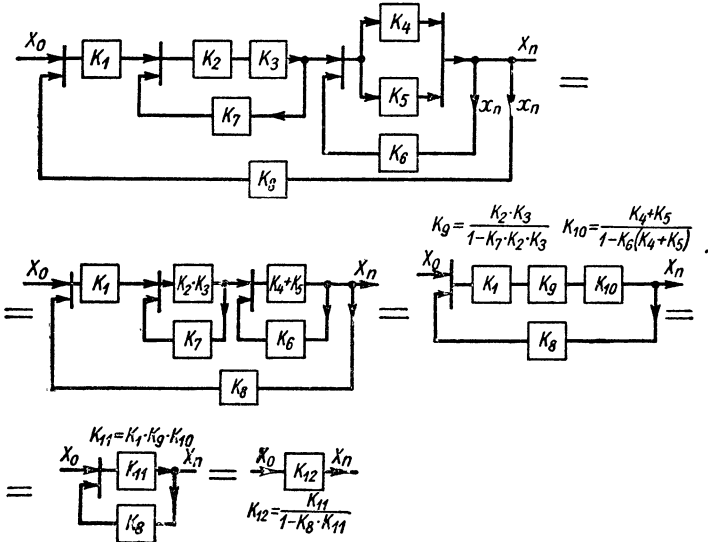


Рис. 14-24.

ответвления, называют *схемой с обратной связью*, а такое соединение называют *антипараллельным*. Пример такого соединения приведен на рис. 14-21 и 14-22. Нетрудно увидеть, что передаточная функция для схемы с обратной связью определится в виде

$$X(p) = K_1(p)X_1(p) = K_1(p) [X_0(p) + X_2(p)] = X_0(p) K_1(p) + X(p) K_2(p) K_1(p),$$

откуда

$$K(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{K_1(p)}{1 - K_1(p) K_2(p)},$$

что соответствует выражению, приведенному в § 13-6.

Часть структурной схемы, в которой выходная функция при помощи обратной связи передается к началу этой части схемы,

называют *замкнутой*. Часть структурной схемы, в которой обратная связь отсутствует, называют *разомкнутой*. Соответственно отличают *передаточную функцию замкнутой системы* от *передаточной функции разомкнутой системы*.

Передаточную функцию всей сложной структурной схемы можно определить путем последовательного нахождения передаточных функций отдельных участков при помощи полученных выше формул для различных соединений. Например, передаточную функцию $K(p) = K_{12}(p)$ всей схемы, изображенной на рис. 14-24, можно найти, выполняя операции, указанные на этом рисунке.

14-8. К вопросу об устойчивости в электрических цепях

В линейных электрических цепях, содержащих источники энергии, при наличии обратных связей может возникнуть вопрос об *устойчивости процесса* в цепи.

Под устойчивостью будем понимать нижеследующее. Если под влиянием некоторого кратковременного (импульсного) возмущения $x_0(t)$ система выйдет из состояния равновесия, то процесс в системе устойчив, когда возникшее отклонение $x(t)$ от состояния равновесия после окончания действия возмущения стремится к нулю или остается неизменным. Процесс в системе неустойчив, если это отклонение нарастает. Итак, пусть $x_0(t)$ является импульсной функцией и, следовательно, ее операторное изображение есть постоянная величина, т. е. $X_0(p) = A$. Операторные изображения отклонения и возмущающей функции связаны через передаточную функцию

$$K(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)}, \text{ откуда}$$

$$X(p) = X_0(p) K(p) = AK(p) = A \frac{Q(p)}{G(p)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_k}{p - p_k},$$

где p_1, p_2, \dots, p_n суть корни уравнения $G(p) = 0$, т. е. являются полюсами передаточной функции и, следовательно, полюсами величины $X(p)$. При этом имеем:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{p_k t} = \sum_{k=1}^n a_k e^{(\sigma_k + j\omega_k) t}.$$

Система устойчива, если вещественные части σ_k всех корней p_k отрицательны, так как $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Система устойчива и в том случае, если пара сопряженных корней имеет $\sigma_k = 0$, так как при этом устанавливаются колебания с неизменной амплитудой. Система неустойчива, если хотя бы один из корней имеет

положительную вещественную часть $\sigma_k > 0$, так как соответствующий член $e^{p_k t}$ будет неограниченно нарастать. Отсюда следует, что система устойчива, если все полюсы передаточной функции лежат в левой полуплоскости переменной $p = \sigma + j\omega$, или на мнимой оси. Система неустойчива, если хотя бы один полюс передаточной функции лежит в правой полуплоскости (рис. 14-25).

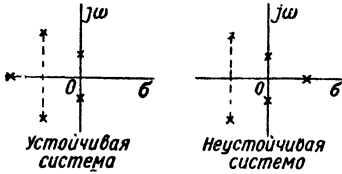


Рис. 14-25.

Пусть в рассматриваемой линейной системе полностью отсутствуют обратные связи и она устойчива, т. е. передаточная функция $K_1(p)$ этой разомкнутой системы не имеет полюсов в правой полуплоскости. Замкнем

систему с помощью обратной связи, передаточная функция $K_2(p)$ которой также не имеет полюсов в правой полуплоскости.

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$K_3(p) = \frac{K_1(p)}{1 - K_1(p)K_2(p)} = \frac{\frac{Q_1(p)}{G_1(p)}}{1 - \frac{Q_1(p)Q_2(p)}{G_1(p)G_2(p)}} = \frac{Q_1(p)G_2(p)}{G_1(p)G_2(p) - Q_1(p)Q_2(p)} = \frac{Q_1(p)G_2(p)}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}.$$

В знаменателе передаточной функции мы имеем разность $G_1(p)G_2(p) - Q_1(p)Q_2(p)$ двух полиномов от p , и поэтому в результирующем полиноме $b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0$ возможно появление корней в правой полуплоскости, и система может оказаться неустойчивой. По этой причине возникает необходимость в исследовании вопроса об устойчивости замкнутой системы, если даже заведомо известно, что разомкнутая система является устойчивой.

Для того чтобы система была устойчивой, коэффициенты полинома знаменателя должны удовлетворять определенным условиям, известным в литературе под названием критериев устойчивости Рауса—Гурвица. Приведем без доказательства эти критерии. Составим вспомогательную матрицу коэффициентов полинома $b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0$, состоящую из n строк и n столбцов, в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 & 0 \\ b_{n-5} & b_{n-4} & b_{n-3} & b_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{vmatrix}.$$

По вертикали номера коэффициентов изменяются на две единицы, а по горизонтали идут по порядку. По виду матрицы очевиден способ ее построения. Гурвиц показал, что если все n диагональные миноры этой матрицы больше нуля, то полином не имеет корней в правой полуплоскости. Мы будем считать, что $b_n > 0$. Тогда первый минор этой таблицы будет b_{n-1} , второй минор есть определитель, составленный из членов двух первых строк столбцов:

$$\Delta_1 = b_{n-1} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_n \\ b_{n-3} & b_{n-2} \end{vmatrix},$$

третий минор

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_n & 0 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-5} & b_{n-4} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

и так далее.

Таким образом, критерием устойчивости служат неравенства

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

Существуют также и другие критерии устойчивости.





СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

15-1. Задача синтеза электрических цепей

Все изложенное выше относилось к анализу процессов в электрических цепях, т. е. к исследованию изменений во времени токов и напряжений в заданной электрической цепи. Однако исключительное значение имеет обратная задача — построить такую электрическую цепь, процессы в которой будут протекать по заданному закону. Решение подобных задач, обратных задаче анализа, носит наименование с и н т е з а э л е к т р и ч е с к и х ц е п е й.

Пусть ставится задача создать цепь с требуемыми характеристиками из линейных элементов. Входная величина (напряжение или ток) является заданной функцией времени $x_1(t)$. Ее операторное изображение $X_1(p)$, следовательно, также известно. Задан также и требуемый закон изменения во времени выходной величины $x_2(t)$ (напряжения или тока) и, соответственно, известно ее операторное изображение $X_2(p)$.

Таким образом, мы имеем выражение для передаточной функции $K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)}$, которой должна обладать создаваемая электрическая цепь, преобразующая $x_1(t)$ в $x_2(t)$.

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы по заданному операторному выражению передаточной функции $K(p)$ цепи, или, соответственно, по заданной частотной характеристике $K(j\omega)$ цепи построить конкретную цепь, обладающую такой характеристикой, или хотя бы характеристикой, близкой к заданной.

Входные сопротивления или проводимость двухполюсника можно представить как частные случаи передаточной функции, если в качестве входной функции рассматривать одну из величин — ток или напряжение на входе, а в качестве выходной другую из этих величин — напряжение или ток на выходе. Нередко для общности и краткости входные и передаточные функции цепи называют просто ф у н к ц и я м и ц е п и.

Функции цепи в случае линейных цепей с сосредоточенными параметрами являются рациональными дробями комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$. Их свойства, а следовательно, и свойства описываемых ими электрических цепей, однозначно определяются распределением нулей и полюсов этих функций. Функции цепи могут быть также представлены в виде частотных характеристик.

При анализе электрических цепей мы видели, что различные электрические цепи могут иметь одинаковую по виду функцию цепи. Например, различные цепи на рис. 13-13 являются обе дифференцирующими цепями и имеют одинаковый вид передаточной функции, а также различные цепи на рис. 13-14 обе являются интегрирующими и обладают передаточными функциями одинакового вида. Уже отсюда видно, что одна и та же задача синтеза может иметь различные конкретные решения, т. е. решение ее неоднозначное.

В некоторых случаях, наоборот, конкретное решение задачи синтеза с помощью линейных пассивных цепей может отсутствовать, например, если для реализации заданной функции требуется иметь в цепи отрицательное активное сопротивление.

В связи с этим возникают следующие основные вопросы синтеза цепи по заданной функции цепи $F(p)$.

Первым вопросом является выяснение возможности физической реализации цепи, соответствующей заданной функции $F(p)$, с помощью обычных элементов — конденсаторов, катушек, сопротивлений. Если функция задана графически, в виде частотной характеристики или явной функции времени, то в связи с этим вопросом возникает задача ее аналитической аппроксимации таким образом, чтобы физическая реализация цепи была возможной.

Вторым вопросом синтеза является разработка метода конкретной реализации заданной функции сначала в виде схемы цепи, а затем и в виде физической электрической цепи. При этом важным представляется выбор рационального пути реализации ввиду указанной выше многозначности решения задачи; в частности, оказываются возможными эквивалентные преобразования схемы цепи с целью уменьшения количества ее элементов.

Для выработки требований, предъявляемых к функции $F(p)$ с точки зрения их реализуемости при помощи пассивных элементов электрических цепей, рассмотрим в следующем параграфе некоторые свойства входных функций $Z(p)$ и $Y(p)$ электрических цепей.

15-2. Свойства входных функций пассивных электрических цепей

В настоящем и в четырех последующих параграфах будем рассматривать входные операторные и комплексные сопротивления и проводимости, т. е. входные функции двухполюсников, так как

для них можно наиболее легко уяснить условие физической реализации заданной функции $F(p)$ с целью синтеза двухполюсников. В последнем параграфе главы рассмотрим более сложный вопрос о синтезе четырехполюсников по заданной передаточной функции.

Сформулируем основные свойства входных функций пассивных электрических цепей, установленные ранее или же вытекающие из рассмотренного выше.

Первым свойством входных операторных сопротивлений $Z(p)$ и проводимостей $Y(p)$ пассивных электрических цепей является то, что они будут вещественными при вещественных значениях p ($p = \sigma$). Действительно, коэффициенты полиномов от p в числителе и знаменателе величин $Z(p)$ и $Y(p)$ являются вещественными, так как они образуются суммами, разностями, произведениями и частными от деления вещественных параметров R, L, C участков цепи. Поэтому при p вещественном $Z(p)$ и $Y(p)$ будут вещественными.

Второе свойство величин $Z(p)$ и $Y(p)$, отмеченное в § 10-6, заключается в том, что их полюсы и нули располагаются только в левой полуплоскости комплексного оператора $p = \sigma + j\omega$ (комплексной частоты) или на оси мнимых, т. е. $\sigma \leq 0$, причем в случае $\sigma = 0$ полюсы и нули простые. При этом все коэффициенты полиномов от p , стоящих в числителе и в знаменателе рациональных дробей, выражающих $Z(p)$ и $Y(p)$, положительны. Действительно, разложив полином на множители:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (p - p_n) (p - p_{n-1}) \dots (p - p_1),$$

будем иметь для каждой пары сопряженных комплексных корней \dot{p}_k и $\dot{p}_{k+1} = \dot{p}_k^*$ произведения множителей вида $(p - \dot{p}_k) (p - \dot{p}_{k+1}) = (p - \sigma_k - j\omega_k) (p - \sigma_k + j\omega_k) = (p - \sigma_k)^2 + \omega_k^2$ и для вещественных корней p_i множители вида $p - p_i = p - \sigma_i$. Отсюда видно, что если все $\sigma_k \leq 0$ и $\sigma_i \leq 0$, то множители, на которые разложен полином, не содержат отрицательных чисел и, следовательно, все коэффициенты a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 полинома положительны.

Третьим важным свойством рассматриваемых функций является то, что их вещественная часть положительна или равна нулю $\operatorname{Re} [Z(p)] \geq 0$ и $\operatorname{Re} [Y(p)] \geq 0$, т. е. неотрицательна, при условии, если $\sigma \geq 0$. Действительно, пусть $\sigma = 0$, т. е. $p = j\omega$. В этом случае $Z(j\omega)$ и $Y(j\omega)$, как было указано в § 10-3, являются обычными комплексными сопротивлением и проводимостью. При наличии отличающегося от нуля положительного активного сопротивления хотя бы в одной ветви двухполюсника активная мощность на входе двухполюсника положительна и, следовательно, активное сопротивление и активная проводимость всего двухполюсника также положительны, т. е. $\operatorname{Re} [Z(j\omega)] > 0$. Когда в цепи имеются только реактивные элементы, то $\operatorname{Re} [Z(j\omega)] = 0$. Покажем теперь, что $\operatorname{Re} [Z(p)] > 0$ даже для чисто реактивной цепи, если $\sigma > 0$. На-

пример, для цепи на рис. 15-1, а имеем в этом случае выражение для операторного сопротивления:

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pC} = (\sigma + j\omega)L + \frac{1}{(\sigma + j\omega)C} = \sigma L + j\omega L + \frac{1}{\sigma C + j\omega C}.$$

Это выражение по форме полностью совпадает с выражением для комплексного сопротивления $Z(j\omega) = r + j\omega L + \frac{1}{g + j\omega C}$ цепи, изображенной на рис. 15-1, б. Последнее при $r > 0$ и $g > 0$ имеет вещественную часть больше нуля, точно так же и вещественная часть операторного сопротивления $Z(p)$ цепи на рис. 15-1, а при $\sigma > 0$ больше нуля. Для любой сложной цепи, состоящей только из реактивных элементов, аналогично может быть построена цепь, содержащая активные элементы, причем последовательно с каждой катушкой L_i добавляется сопротивление $r_i = \sigma L_i$ и параллельно каждому конденсатору C_i добавляется проводимость $g_i = \sigma C_i$. При этом операторное входное сопротивление $Z(p)$ реактивной цепи при $p = \sigma + j\omega$ и $\sigma > 0$ будет по форме совершенно аналогичным комплексному сопротивлению $Z(j\omega)$ всей цепи с добавленными активными элементами.

Активное сопротивление последней цепи $r = \text{Re}[Z(j\omega)]$ больше нуля из физических соображений, так как для нее активная мощность положительна. Следовательно, и $\text{Re}[Z(p)] > 0$ при $\sigma > 0$ для реактивной цепи. Это условие и по давню имеет место для цепи, содержащей активные сопротивления и проводимости.

Функции, обладающие указанными выше свойствами, называют положительными вещественными функциями.

Из изложенного вытекает, что для того, чтобы рациональная дробь

$$F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{G(p)}{Q(p)}$$

представляла собою операторное выражение входной функции и могла быть реализована в виде конкретной электрической цепи, она должна удовлетворять вышеперечисленным требованиям, т. е. числитель и знаменатель должны иметь нули в левой полуплоскости или на оси мнимых, и все коэффициенты a_k и b_k должны быть вещественными и положительными, и, наконец, должно быть $\text{Re}[F(p)] \geq 0$ при $\text{Re}(p) = \sigma \geq 0$.

Кроме того, в соответствии с изложенным в § 6-6, степени n и m полиномов числителя и знаменателя не должны отличаться друг от друга больше, чем на единицу.

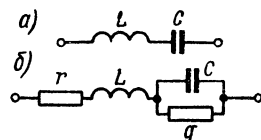


Рис. 15-1.

15-3. Представление входных функций в виде простых дробей

Входную функцию $F(p)$, являющуюся рациональной дробью, можно представить в виде суммы двучлена $A_\infty p + A_0$ и простых дробей:

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = A_\infty p + A_0 + \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_m}{p-p_m},$$

где p_1, p_2, \dots, p_m — корни знаменателя $Q(p)$. При этом $A_\infty \neq 0$, если степень n числителя на единицу больше степени m знаменателя. Случай $A_\infty = 0$ и $A_0 \neq 0$ имеет место, если $n = m$. Когда $n = m - 1$, имеем $A_\infty = 0$ и $A_0 = 0$. Индекс ∞ у первого коэффициента A_∞ имеет тот смысл, что этот коэффициент при $n = m + 1$ определяется из выражения для $F(p)$, приведенного в конце предыдущего параграфа в виде $A_\infty = \left. \frac{F(p)}{p} \right|_{p=\infty} = \frac{a_n}{b_m}$. Коэффициенты A_1, \dots, A_m определяются после выделения двучлена $A_\infty p + A_0$ по способу, изложенному в § 10-5.

Рассмотрим частный случай, когда корни знаменателя $Q(p)$ либо мнимые, либо вещественные.

Мнимые корни должны быть попарно сопряженными. Пусть, например, $p_k = j\omega_k$ и $p_{k+1} = -j\omega_k$. При этом $A_k = A'_k + jA''_k$ и A_{k+1} должны быть сопряженными величинами, т. е. $A_{k+1} = \overset{*}{A}_k = A'_k - jA''_k$. Объединяя соответствующую пару простых дробей, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{p-p_k} + \frac{A_{k+1}}{p-p_{k+1}} &= \frac{A_k(p+j\omega_k) + \overset{*}{A}_k(p-j\omega_k)}{(p-j\omega_k)(p+j\omega_k)} = \\ &= \frac{(A_k + \overset{*}{A}_k)p + (A_k - \overset{*}{A}_k)j\omega_k}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{2A'_k p}{p^2 + \omega_k^2} - \frac{2A''_k \omega_k}{p^2 + \omega_k^2}. \end{aligned}$$

Убедимся, что, если соблюдено условие $\text{Re}[F(p)] \geq 0$ при $\sigma \geq 0$, то $A''_k = 0$. Пусть $p = \sigma \rightarrow 0$, тогда из этого условия следует, что $\left(-\frac{2A''_k}{\omega_k}\right) \geq 0$ и, следовательно, $A''_k \leq 0$. Пусть теперь $p = j\omega$ и $\omega > \omega_k$, т. е. $p^2 + \omega_k^2 = -\omega^2 + \omega_k^2 < 0$. Тогда из того же условия следует, что $\left(-\frac{2A''_k \omega_k}{-\omega^2 + \omega_k^2}\right) \geq 0$, т. е. $A''_k \geq 0$. Оба неравенства для A''_k удовлетворяются одновременно только при $A''_k = 0$. Учитывая это, мы имеем:

$$\frac{A_k}{p-p_k} + \frac{A_{k+1}}{p-p_{k+1}} = \frac{2A'_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{B_k p}{p^2 + \omega_k^2},$$

где $B_k = 2A'_k = 2A_k$ — вещественное число.

Если корень $p_i = \sigma_i = -\delta_i$ вещественный, то соответствующая ему простая дробь имеет вид $\frac{A_i}{p - p_i} = \frac{A_i}{p + \delta_i}$.

Таким образом, разложение функции $F(p)$ при наличии только вещественных и мнимых корней можно записать в виде

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = A_{\infty}p + A_0 + \frac{B_1p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{B_3p}{p^2 + \omega_3^2} + \dots + \frac{A_{m-1}}{p + \delta_{m-1}} + \frac{A_m}{p + \delta_m}.$$

15-4. Реализация входных функций двухполюсника, имеющих вещественные и мнимые корни знаменателя, при помощи разложения этих функций на простые дроби

Пусть все коэффициенты в последнем разложении функции $F(p)$ вещественны и положительны. Рассмотрим, как могут быть реализованы отдельные члены этого разложения. Предположим, что $F(p)$ должна выражать входное операторное сопротивление цепи, т. е. $F(p) = Z(p)$.

Первое слагаемое $A_{\infty}p = Z_{\infty}(p)$ реализуется с помощью катушки с индуктивностью $L_{\infty} = A_{\infty}$, так как операторное сопротивление для нее равно $L_{\infty}p$.

Второе слагаемое $A_0 = Z_0(p)$ реализуется с помощью участка с активным сопротивлением $r_0 = A_0$.

Слагаемое, имеющее вид

$$\frac{B_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{1}{\frac{p}{B_k} + \frac{\omega_k^2}{p B_k}},$$

реализуется с помощью участка цепи, состоящего из параллельно соединенных конденсатора с емкостью C_k и катушки с индуктивностью L_k (рис. 15-2). Действительно, операторное сопротивление такого участка имеет вид $Z_k(p) = \frac{1}{pC_k + 1/pL_k}$ и, следовательно, выбрав $C_k = 1/B_k$ и $L_k = B_k/\omega_k^2$, мы осуществим требуемую реализацию.

Наконец слагаемое вида $\frac{A_i}{p + \delta_i} = \frac{1}{\frac{p}{A_i} + \frac{\delta_i}{A_i}}$ реализуется с помощью участка цепи, состоящего из параллельно соединенных конденсатора с емкостью C_i и сопротивления r_i (рис. 15-3). Действительно, операторное сопротивление такого участка имеет вид

$Z_i(p) = \frac{1}{pC_i + 1/r_i}$, и, следовательно, выбрав $C_i = 1/A_i$ и $r_i = A_i/\delta_i$, мы осуществим требуемую реализацию.

Таким образом, в конкретном случае, когда входное сопротивление изображается функцией

$$Z(p) = A_\infty p + A_0 + \frac{B_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{A_3}{p + \delta_3},$$

схема электрической цепи, ее реализующей, будет иметь вид, показанный на рис. 15-4.

Предположим теперь, что $F(p)$ должна выражать входную операторную проводимость цепи, т. е. $F(p) = Y(p)$.

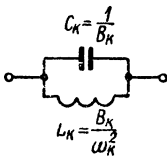


Рис. 15-2.

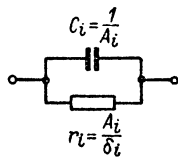


Рис. 15-3.

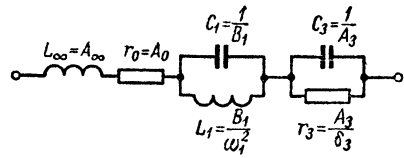


Рис. 15-4.

При этом первое слагаемое, равное $A_\infty p = Y_\infty(p)$, реализуется с помощью конденсатора с емкостью $C_\infty = A_\infty$, так как операторная проводимость для него равна $C_\infty p$.

Второе слагаемое, равное $A_0 = Y_0(p)$, реализуется с помощью участка с активной проводимостью $g_0 = A_0$.

Слагаемое $\frac{B_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{1}{\frac{p}{B_k} + \frac{\omega_k^2}{pB_k}}$ реализуется при помощи участка цепи, состоящего из последовательно соединенных катушки с индуктивностью $L_k = 1/B_k$ и конденсатора с емкостью $C_k = B_k/\omega_k^2$ (рис. 15-5), так как операторная проводимость такого участка имеет вид

$$Y_k(p) = \frac{1}{pL_k + 1/pC_k}.$$

Слагаемое вида $\frac{A_i}{p + \delta_i} = \frac{1}{\frac{p}{A_i} + \frac{\delta_i}{A_i}}$ реализуется с помощью

участка цепи, состоящего из последовательно соединенных катушки с индуктивностью $L_i = 1/A_i$ и сопротивления $r_i = \delta_i/A_i$ (рис. 15-6), так как операторная проводимость такого участка имеет вид

$$Y(p) = \frac{1}{pL_i + r_i}.$$

Таким образом, в конкретном случае, когда входная проводимость изображается функцией

$$Y(p) = A_{\infty}p + A_0 + \frac{B_1 p}{p^2 + \omega_k^2} + \frac{A_3}{p + \delta_3},$$

схема электрической цепи, ее реализующая, должна быть такой, как это показано на рис. 15-7.

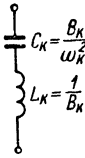


Рис. 15-5.

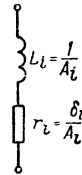


Рис. 15-6.

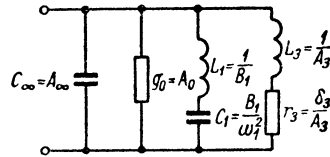


Рис. 15-7.

Заметим, что в некоторых частных случаях и при отрицательном коэффициенте A_i возможна реализация с помощью приведенного выше разложения $F(p)$, если оно содержит достаточно большой член A_0 . Рассмотрим сумму:

$$A_0 + \frac{A_i}{p + \delta_i} = \frac{A_0 p}{p + \delta_i} + \frac{A_0 \delta_i + A_i}{p + \delta_i}.$$

Если $A_0 \delta_i + A_i > 0$, то вторая дробь реализуется либо в виде схемы на рис. 15-3, либо в виде схемы на рис. 15-6. Первая же дробь

$$\frac{A_0 p}{p + \delta_i} = \frac{1}{\frac{1}{A_0} + \frac{\delta_i}{A_0 p}}$$

реализуется в случае $F(p) = Z(p)$ в виде участка цепи, состоящего из параллельно соединенных проводимости $g'_0 = 1/A_0$ и катушки с индуктивностью $L_0 = A_0/\delta_i$ (рис. 15-8), так как при этом $Z(p) =$

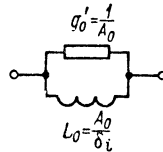


Рис. 15-8.

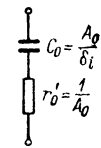


Рис. 15-9.

$= \frac{1}{g'_0 + 1/pL_0}$. В случае $F(p) = Y(p)$ эта дробь реализуется в виде участка цепи с последовательно соединенными сопротивлением $r'_0 = 1/A_0$ и конденсатором с емкостью $C_0 = A_0/\delta_i$ (рис. 15-9).

Рассмотрим пример реализации заданной функции $F(p) = Z(p)$. Принято, чтобы не иметь дело с цифрами слишком большого или слишком малого порядка, оперировать с относительными сопротивлениями r^* , $\omega^* L^*$ и $\frac{1}{\omega^* C^*}$ и относительной частотой ω^* , которые являются отношениями действительных сопротивлений и частоты к базисному сопротивлению R_6 и базисной частоте ω_6 . Последние выбирают так, чтобы относительные величины в их рабочем диапазоне изменения были близки к единице. Будем опускать

звездочку (*), понимая во всех последующих примерах числовые величины как относительные.

Рассмотрим реализацию функции

$$F(p) = Z(p) = \frac{p^5 + 6p^3 + 8p}{p^4 + 4p^2 + 3} = \frac{p^5 + 6p^3 + 8p}{(p^2 + 1)(p^2 + 3)} = A_\infty p + \frac{B_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{B_3 p}{p^2 + \omega_3^2}.$$

Здесь $\omega_1^2 = 1$, $\omega_3^2 = 3$.

Знаменатель функции $F(p)$ имеет только мнимые корни $p_{1,2} = \pm j1$ и $p_{3,4} = \pm j\sqrt{3}$, а поэтому отсутствуют простые дроби вида $\frac{A_i}{p + \delta_i}$. Кроме того, в данном примере $A_0 = 0$, в чем легко убедиться, положив $p = 0$. Определим коэффициенты A_∞ , B_1 и

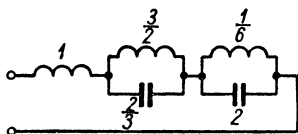


Рис. 15-10.

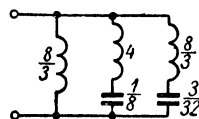


Рис. 15-11.

B_3 . Для вычисления A_∞ разделим $Z(p)$ на p и положим $p = \infty$. Получим $A_\infty = \left| \frac{Z(p)}{p} \right|_{p=\infty} = 1$. Для определения коэффициента B_1 умножим $Z(p)$ на $\frac{p^2 + \omega_1^2}{p}$ и положим $p^2 = -\omega_1^2$. Получим:

$$B_1 = \left| \frac{Z(p)(p^2 + \omega_1^2)}{p} \right|_{p^2 = -\omega_1^2} = \left| \frac{p^4 + 6p^2 + 8}{p^2 + 3} \right|_{p^2 = -1} = \frac{1 - 6 + 8}{2} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично найдем:

$$B_3 = \left| \frac{Z(p)(p^2 + \omega_3^2)}{p} \right|_{p^2 = -\omega_3^2} = \left| \frac{p^4 + 6p^2 + 8}{p^2 + 1} \right|_{p^2 = -3} = \frac{1}{2}.$$

Параметры схемы рис. 15-10, реализующей данную функцию, соответственно равны:

$$L_\infty = 1, L_1 = \frac{B_1}{\omega_1^2} = \frac{3}{2}, C_1 = \frac{1}{B_1} = \frac{2}{3}, L_3 = \frac{B_3}{\omega_3^2} = \frac{1}{6}, C_3 = \frac{1}{B_3} = 2.$$

Истинные значения параметров цепи определяются по известным R_6 и ω_6 на основании формул:

$$\omega = \omega^* = \frac{\omega_{\text{ист}}}{\omega_6}, \quad \omega L = \omega^* L^* = \frac{\omega_{\text{ист}} L_{\text{ист}}}{R_6}, \\ \omega C = \omega^* C^* = \omega_{\text{ист}} C_{\text{ист}} R_6.$$

Рассмотрим теперь реализацию функции $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$, где $Z(p)$ та же самая функция от p , что и в только что рассмотренном примере, т. е.

$$Y(p) = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^5 + 6p^3 + 8p} = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p(p^2 + 2)(p^2 + 4)} = \frac{B_1}{p} + \frac{B_3 p}{p^2 + 2} + \frac{B_5 p}{p^2 + 4}.$$

В данном случае $A_\infty = 0$ и $A_0 = 0$, так как дробь правильная и целая часть не выделяется. Определяя коэффициенты B_1 , B_3 и B_5 , получим:

$$B_1 = |Y(p) \cdot p|_{p=0} = \frac{3}{8}, \quad B_3 = \left| \frac{Y(p)(p^2 + 2)}{p} \right|_{p^2 = -2} = \frac{1}{4},$$

$$B_5 = \left| \frac{Y(p)(p^2 + 4)}{p} \right|_{p^2 = -4} = \frac{3}{8}.$$

Параметры схемы (рис. 15-11), реализующей данную функцию, равны:

$$L_1 = \frac{1}{B_1} = \frac{8}{3}, \quad L_3 = \frac{1}{B_3} = 4, \quad C_3 = \frac{B_3}{\omega_3^2} = \frac{1}{8},$$

$$L_5 = \frac{1}{B_5} = \frac{8}{3}, \quad C_5 = \frac{B_5}{\omega_5^2} = \frac{3}{32}.$$

Обе схемы на рис. 15-10 и 15-11 соответствуют одной и той же функции $Z(p)$. Точно так же они соответствуют одной и той же обратной функции $Y(p)$. Это означает, что обе эти схемы имеют совершенно одинаковые частотные характеристики $Z(j\omega)$. Структура же этих схем и числовые значения параметров различны. Это иллюстрирует высказанное выше положение о многозначности решения задачи синтеза электрической цепи по заданной функции $F(p)$.

15-5. Реализация входных функций двухполюсника, имеющих только мнимые корни знаменателя, при помощи представления этих функций в виде цепных дробей

Наличие только мнимых корней у входных функций $Z(p)$ и $Y(p)$ означает, что цепь, имеющая такие входные сопротивление и проводимость, не обладает затуханием, т. е. состоит только из реактивных элементов. Поэтому в разложении входных функций на простые дроби должны отсутствовать член A_0 , а также члены вида $\frac{A_i}{p + \delta_i}$, так как при их реализации, как было видно в предыдущем параграфе, должны быть использованы активные сопротивления.

Таким образом, функция $F(p)$, имеющая только мнимые корни и реализуемая при помощи только реактивных элементов, должна иметь вид

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = A_{\infty}p + \frac{B_1p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{B_3p}{p^2 + \omega_3^2} + \dots = \\ = p \left(A_{\infty} + \sum_{k=1,3,\dots} \frac{B_k}{p^2 + \omega_k^2} \right). \quad (*)$$

Величина в скобках является функцией от p^2 . Соответственно, после приведения к общему знаменателю мы получим в знаменателе полный полином $Q(p)$ от четных степеней p , если все ω_k не равны нулю, т. е. полином, содержащий все, без пропусков, четные показатели от нуля до m .

При этом числитель будет полным полиномом $G(p)$ нечетных степеней p . Степень $G(p)$ на единицу выше степени $Q(p)$. Следовательно, $F(p)$ будет иметь вид

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = \frac{a_{m+1}p^{m+1} + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_1p}{b_m p^m + b_{m-2}p^{m-2} + \dots + b_0},$$

где m — четное.

В этом случае значение $p = 0$ является нулем функции $F(p)$. Если один из корней ω_k полинома $Q(p)$ равен нулю, то $b_0 = 0$, и, сокращая числитель и знаменатель на p , получим в числителе полином четных степеней, а в знаменателе полином нечетных степеней от p . При этом значение $p = 0$ является полюсом $F(p)$.

Для возможности реализации функции $F(p)$ в виде электрической цепи, состоящей из реактивных элементов, необходимо, чтобы она удовлетворяла основным свойствам входных функций такой цепи, изложенным в § 6-6, а именно: степени полиномов $G(p)$ и $Q(p)$ должны отличаться друг от друга на единицу; нули и полюсы функции $F(p)$ должны чередоваться. В соответствии с первым свойством в написанном выше выражении степень числителя превышает степень знаменателя на единицу. Может быть также случай $a_{m+1} = 0$, когда степень знаменателя превышает степень числителя на единицу. Второе свойство — чередование нулей и полюсов $F(p)$ — означает, что чередуются корни числителя и знаменателя вдоль мнимой оси. Соответственно, если, разлагая на множители и числитель и знаменатель, запишем $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = \frac{a_{m+1}p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2)\dots(p^2 + \omega_m^2)}{b_m(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2)\dots(p^2 + \omega_{m+1}^2)},$$

то условие чередования нулей и полюсов можно записать в виде

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_m < \omega_{m+1}.$$

В § 6-6 было показано, что свойство чередования полюсов и нулей вытекает из того, что для любой цепи, содержащей только реактивные элементы, входное реактивное сопротивление всегда растет с частотой, т. е. $\frac{dx_{\text{вх}}}{d\omega} > 0$. Условие $\frac{dx_{\text{вх}}}{d\omega} > 0$ не было доказано в § 6-6. Докажем его здесь. Входное сопротивление является функцией сопротивлений всех ветвей цепи:

$$x_{\text{вх}} = F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_l), \quad \text{где } x_i = \omega L_i - \frac{1}{\omega C_i}.$$

Имеем:

$$\frac{dx_{\text{вх}}}{d\omega} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial x_{\text{вх}}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\omega}, \quad \text{причем } \frac{dx_i}{d\omega} = L_i + \frac{1}{\omega^2 C_i} > 0.$$

Остается показать, что также $\frac{\partial x_{\text{вх}}}{\partial x_i} > 0$. С этой целью будем рассматривать ветвь x_i как приемник на выходе четырехполюсника. Этим четырехполюсником явится вся остальная цепь. Реактивное сопротивление на входе этого четырехполюсника и представляет собою $x_{\text{вх}}$. Подставив в уравнения этого четырехполюсника: $U_1 = AU_2 + Bl_2$, $I_1 = CU_2 + Dl_2$ величины $Z_{\text{вх}} = jx_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$ и $Z_{\text{пр}} = jx_i = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$, получаем $jx_{\text{вх}} = \frac{Ajx_i + B}{Cjx_i + D}$. Взяв производную, находим:

$$\frac{\partial x_{\text{вх}}}{\partial x_i} = -j \frac{Aj(Cjx_i + D) - Cj(Ajx_i + B)}{(Cjx_i + D)^2} = \frac{AD - BC}{(Cjx_i + D)^2} = \frac{1}{(Cjx_i + D)^2}.$$

В цепи, состоящей из одних реактивных элементов, напряжения на всех ветвях находятся друг с другом в фазе или в противофазе, а все токи в ветвях сдвинуты по отношению к этим напряжениям на угол $\pm \pi/2$, т. е. угол сдвига фаз между двумя любыми токами равен нулю или π . Эти положения справедливы при любом значении x_i . В частности, при $x_i = 0$ имеем $U_2 = 0$ и $I_1 = DI_2$; следовательно, D — вещественное число. При $x_i = \infty$ имеем $I_2 = 0$ и $I_1 = CU_2$; следовательно, C — мнимое число. Отсюда ясно, что $(Cjx_i + D)^2 > 0$ и

$$\frac{\partial x_{\text{вх}}}{\partial x_i} = \frac{1}{(Cjx_i + D)^2} > 0.$$

Таким образом, $\frac{dx_{\text{вх}}}{d\omega} > 0$, что и требовалось доказать.

Во всех случаях прежде чем выполнять реализацию функции $F(p)$ в виде цепи из реактивных элементов, необходимо убедиться, что она удовлетворяет двум вышеуказанным основным свойствам. Существуют различные методы реализации.

Один из них, разработанный Фостером, заключается в представлении функции $F(p)$ в виде формулы (*). Цепи, реализующие каждое слагаемое в выражении (*), были рассмотрены в предыдущем параграфе. Неудобство этого метода состоит в необходимости отыскания корней знаменателя, что при высокой степени полинома $Q(p)$ является трудной задачей.

Есть и метод, предложенный Кауером, при использовании которого отсутствует необходимость в отыскании корней. Суть его заключается в постепенном выделении частей вида $A\rho$ или B/ρ сначала из функции $F(p)$, а затем из остатков после выделения предыдущей части, с последовательной реализацией выделяемых частей в виде индуктивной катушки или конденсатора. Пусть функция $F(p)$ имеет полюсом $p = \infty$. Это означает, что степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя на единицу. Для определенности положим $F(p) = Z(p)$. Поделив числитель на знаменатель, выделяем целую часть $A_1\rho$, соответствующую этому полюсу $Z(p)$. Получаем:

$$Z(p) = A_1\rho + Z_1(p),$$

где $Z_1(p)$ — остаток от деления, представляющий собою правильную рациональную дробь, степень полинома в знаменателе которой на единицу больше степени полинома числителя. Это является следствием того, что показатели членов полиномов $G(p)$ и $Q(p)$ убывают от предыдущего к последующему на две единицы. Следовательно, обратная функция $Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)}$ имеет степень числителя на единицу больше степени знаменателя; производя с нею аналогичную операцию выделения целой части $A_2\rho$, соответствующей ее полюсу $p = \infty$, получим:

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = A_2\rho + Y_2(p).$$

Продолжая действовать таким же образом, найдем:

$$Z_2(p) = \frac{1}{Y_2(p)} = A_3\rho + Z_3(p).$$

Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока остаток не будет равен нулю.

Соответственно такой последовательности операций функцию $Z(p)$ можно представить в виде цепной дроби:

$$Z(p) = A_1 \cdot \rho + \frac{1}{A_2 \cdot \rho + \frac{1}{A_3 \cdot \rho + \dots \frac{1}{A_{k-1} \cdot \rho + \frac{1}{A_k \cdot \rho + 0}}}}$$

Из изложенного видно, что функцию $F(p) = Z(p)$ можно реализовать с помощью схемы (рис. 15-12), в которой первым элементом, включенным последовательно остальной части схемы, является катушка с индуктивностью $L_1 = A_1$; вторым элементом, включенным параллельно остальной за ним части схемы, является конденсатор с емкостью $C_2 = A_2$; следующим элементом является вновь последовательно включенная катушка $L_3 = A_3$, далее — парал-

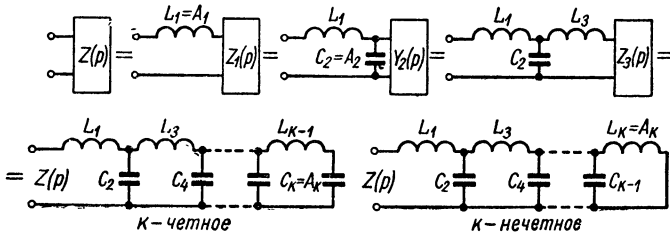


Рис. 15-12.

лельно включенная емкость $C_4 = A_4$ и т. д. Если k — четное, то схема завершится конденсатором с емкостью $C_k = A_k$. Если k — нечетное, то последним элементом будет катушка с индуктивностью $L_k = A_k$. Нетрудно заметить, что в данном случае $k = n$, т. е. k равно степени числителя.

Для рассмотренного случая, когда степень полинома числителя $G(p)$ больше степени знаменателя $Q(p)$, при делении слагаемые полиномов следует располагать по убывающим степеням и выделяе-

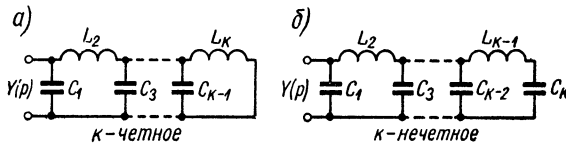


Рис. 15-13.

мые целые части Ap получаются как результат деления первого члена числителя на первый член знаменателя. При этих же условиях, если бы мы положили $F(p) = Y(p)$, мы получили бы первый член Ap как операторную емкостную проводимость C_1p , т. е. схема начиналась бы с подключенного параллельно ко всей остальной цепи конденсатора C_1 (рис. 15-13). При этом в случае $k = n$ — четном схема заканчивается катушкой (рис. 15-13, а), и при k — нечетном — конденсатором (рис. 15-13, б).

Если степень числителя n меньше степени знаменателя на единицу, то можно воспользоваться тем же методом, формально добавив в полиноме числителя член $a_{n+2} p^{n+2}$ с $a_{n+2} = 0$.

Соответственно, мы получим в первой выделенной части $A_1 p$ коэффициент $A_1 = 0$, т. е. в схемах на рис. 15-12 будем иметь $L_1 = 0$, а на рис. 15-13, соответственно, $C_1 = 0$. Число реальных, отличных от нуля элементов в схеме будет равняться $n + 2 - 1 = m$, т. е. степени знаменателя. Таким образом, число реальных элементов равно наивысшей степени полиномов в рациональной дроби.

Можно было бы и не прибегать к искусственному приему добавления в числителе $F(p)$ слагаемого $a_{n+2} p^{n+2}$, имеющего $a_{n+2} = 0$, а начать операции по отношению к обратной величине $F(p)$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $F(p)$ имеет полюс $p = 0$. Это означает, что полином знаменателя нечетной степени, т. е. m — нечетное. В этом случае можно осуществить реализацию тем же способом построения цепной дроби, но в другом порядке, а именно выделяя части соответственно полюсам при $p = 0$. Получаемая при этом цепная дробь имеет вид

$$F(p) = \frac{D_1}{p} + \frac{1}{\frac{D_2}{p} + \frac{1}{\frac{D_3}{p} + \dots + \frac{D_{k-1}}{p} + \frac{1}{\frac{D_k}{p} + 0}}}$$

Член D_1/p получается от деления первого члена полинома в числителе на первый член полинома в знаменателе, если слагаемые этих полиномов расположить по возрастающим степеням. Если степень m знаменателя функции $F(p)$ — четная, а степень n числителя — нечетная, то такой же порядок образования цепной дроби можно применить для функции $\frac{1}{F(p)}$.

Проиллюстрируем изложенное выше на том же примере, который был рассмотрен в конце предыдущего параграфа.

Пусть

$$F(p) = Z(p) = \frac{p^5 + 6p^3 + 8p}{p^4 + 4p^2 + 3}.$$

Выделим часть $Z(p)$, соответствующую ее полюсу $p = \infty$, т. е. представим $Z(p)$ в виде $Z(p) = A_1 p + Z_1(p)$. Здесь

$$A_1 = \frac{a_n}{b_m} = 1, \quad \text{а} \quad Z_1(p) = \frac{2p^3 + 5p}{p^4 + 4p^2 + 3}.$$

Обратная остатку $Z_1(p)$ функция

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{2p^3 + 5p}$$

имеет полюс $p = \infty$. Выделяя соответствующую ему часть, получим: $Y_1(p) = \frac{1}{2}p + Y_2(p)$, где $Y_2(p) = \frac{\frac{3}{2}p^2 + 3}{2p^3 + 5p}$. Теперь уже функция

$$Z_2(p) = \frac{1}{Y_2(p)} = \frac{2p^3 + 5p}{\frac{3}{2}p^2 + 3}$$

имеет полюс $p = \infty$.

Выделяя соответствующую ему часть, находим:

$$Z_2(p) = \frac{4}{3}p + Z_3(p), \quad \text{где} \quad Z_3(p) = \frac{p}{\frac{3}{2}p^2 + 3}$$

Аналогично находим:

$$Y_3(p) = \frac{1}{Z_3(p)} = \frac{\frac{3}{2}p^2 + 3}{p} = \frac{3}{2}p + \frac{3}{p}$$

Таким образом, получаем следующие параметры схемы:

$$L_1 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{2}, \quad L_3 = \frac{4}{3}, \quad C_4 = \frac{3}{2}, \quad L_5 = \frac{1}{3}$$

Процедуру выделения отдельных частей функции можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{r}
 \frac{p^5 + 6p^3 + 8p}{p^5 + 4p^3 + 3p} \left| \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p} \rightarrow L_1 = 1 \right. \\
 \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^4 + \frac{5}{2}p^2} \left| \frac{2p^3 + 5p}{\frac{1}{2}p} \rightarrow C_2 = \frac{1}{2} \right. \\
 \frac{2p^3 + 5p}{2p^3 + 4p} \left| \frac{\frac{3}{2}p^2 + 3}{\frac{4}{3}p} \rightarrow L_3 = \frac{4}{3} \right. \\
 \frac{\frac{3}{2}p^2 + 3}{\frac{3}{2}p^2} \left| \frac{p}{\frac{3}{2}p} \rightarrow C_4 = \frac{3}{2} \right. \\
 \frac{-\frac{p}{p}}{\frac{1}{3}p} \left| \frac{3}{\frac{1}{3}p} \rightarrow L_5 = \frac{1}{3} \right. \\
 0
 \end{array}$$

Схема, соответствующая данному порядку реализации, приведена на рис. 15-14. Этот порядок соответствует цепной дроби с членами вида Ap .

Рассмотрим другой порядок реализации, когда цепная дробь имеет члены вида D/p . Данная функция $Z(p)$ не имеет полюсом $p = 0$, поэтому рассмотрим обратную ей функцию:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^5 + 6p^3 + 8p}.$$

Операцию выделения соответствующих полюсу отдельных частей, $p = 0$, приведем в окончательной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{-3 + 4p^2 + p^4}{3 + \frac{9}{4}p^2 + \frac{3}{8}p^4} \Bigg| \frac{8p + 6p^3 + p^5}{8} \cdot \frac{1}{p} \rightarrow L_1 = \frac{8}{3} \\ & \frac{-8p + 6p^3 + p^5}{8p + \frac{20}{7}p^3} \Bigg| \frac{\frac{7}{4}p^2 + \frac{5}{8}p^4}{\frac{32}{7p} \rightarrow C_2 = \frac{7}{32}} \\ & \frac{-\frac{7}{4}p^2 + \frac{49}{88}p^4}{\frac{22}{7}p^3 + p^5} \Bigg| \frac{\frac{22}{7}p^3 + p^5}{\frac{49}{88} \rightarrow L_3 = \frac{88}{49}} \\ & \frac{-\frac{22}{7}p^3}{\frac{3}{44}p^4} \Bigg| \frac{\frac{22 \cdot 44}{3 \cdot 7p} \rightarrow C_4 = \frac{21}{968}} \\ & \frac{-\frac{3}{44}p^4}{-\frac{3}{44}p^4} \Bigg| \frac{p^5}{\frac{3}{44p} \rightarrow L_5 = \frac{44}{3}} \\ & 0 \end{aligned}$$

Схема, соответствующая данному порядку реализации, при ведена на рис. 15-15.

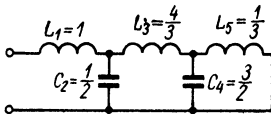


Рис. 15-14.

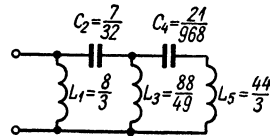


Рис. 15-15.

Все четыре схемы, изображенные на рисунках 15-10, 15-11, 15-14 и 15-15, реализуют одну и ту же функцию $Z(p)$, и их частотные характеристики одинаковы. Однако их структура и значения параметров различны, что связано с отмеченной выше многозначностью решения задачи синтеза.

Обратим внимание, что во всех этих схемах число элементов одинаково и является минимально необходимым. Выбор той или

иной схемы определяется удобством физического осуществления элементов цепи — катушек и конденсаторов с теми или иными параметрами. В одних схемах получают катушки с большей индуктивностью, чем в других. В некоторых схемах конденсаторы оказываются с большей емкостью, чем в других.

15-6. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Проверка отсутствия нулей и полюсов в правой полуплоскости

В § 15-2 было отмечено, что функции, реализуемые в виде пассивной линейной электрической цепи, должны быть вещественными и положительными. В общем случае перед тем, как приступить к реализации, следует проверить, удовлетворяет ли этим условиям данная функция. Функция вещественна, если все коэффициенты полиномов числителя и знаменателя вещественны. Необходима проверка положительности функции. В настоящем и в двух следующих параграфах приведены без доказательств некоторые методы такой проверки и дан один из способов реализации функции с комплексными корнями. Рассмотрим это на примере конкретной функции:

$$F(p) = \frac{10p^6 + 8p^5 + 20p^4 + 11p^3 + 12p^2 + 3p + 2}{8p^6 + 12p^5 + 22p^4 + 13p^3 + 10p^2 + 3p + 1}.$$

Эта функция вещественна, так как все коэффициенты вещественны. Чтобы она была вещественной положительной функцией, прежде всего корни числителя и знаменателя должны лежать в левой полуплоскости. Осуществим в настоящем параграфе проверку отсутствия корней в правой полуплоскости по методу Гурвица. Полином Гурвица есть полином, все нули которого находятся в левой полуплоскости или на оси $j\omega$. Если полином является полиномом Гурвица, то отношение четной его части к нечетной (или наоборот) является вещественной положительной функцией, т. е. входной функцией некоторой чисто реактивной цепи.

Четную часть числителя $Z(p)$, т. е. полинома с четными показателями, обозначим $N_1(p)$, нечетную часть числителя $Z(p)$, т. е. часть полинома с нечетными показателями, обозначим $M_1(p)$. Соответственно, для знаменателя обозначим через $N_2(p)$ четную и через $M_2(p)$ нечетную части. Тогда имеем:

$$N_1(p) = 10p^6 + 20p^4 + 12p^2 + 2,$$

$$M_1(p) = 8p^5 + 11p^3 + 3p,$$

$$N_2(p) = 8p^6 + 22p^4 + 10p^2 + 1,$$

$$M_2(p) = 12p^5 + 13p^3 + 3p.$$

Проверим, являются ли числитель и знаменатель $Z(p)$ полиномами Гурвица:

$$\frac{N_1(p)}{M_1(p)} = \frac{10p^6 + 20p^4 + 12p^2 + 2}{8p^6 + 11p^4 + 3p} = S_1(p),$$

$$\frac{N_2(p)}{M_2(p)} = \frac{8p^6 + 22p^4 + 10p^2 + 1}{12p^6 + 13p^4 + 3p} = S_2(p).$$

Знаменатели обеих функций легко разделить на множители:

$$M_1(p) = p(8p^4 + 11p^2 + 3) = 8p(p^2 + 1)\left(p^2 + \frac{3}{8}\right),$$

$$M_2(p) = p(12p^4 + 13p^2 + 3) = 12p\left(p^2 + \frac{1}{3}\right)\left(p^2 + \frac{3}{4}\right).$$

Обе функции $S_1(p)$ и $S_2(p)$ разлагаются на простые дроби:

$$S_1(p) = A_\infty p + \frac{A_0}{p} + \frac{A_1 p}{p^2 + 1} + \frac{A_2 p}{p^2 + \frac{3}{8}},$$

$$A_\infty = \left| \frac{S_1(p)}{p} \right|_{p=\infty} = \frac{10}{8},$$

$$A_0 = |S_1(p) \cdot p|_{p=0} = \frac{2}{3},$$

$$A_1 = |S_1(p) \cdot (p^2 + 1)|_{p^2=-1} = 0,$$

$$A_2 = \left| S_1(p) \left(p^2 + \frac{3}{8}\right) \right|_{p^2=-\frac{3}{8}} = \frac{11}{12}.$$

Равенство $A_1 = 0$ означает, что корень $p^2 + 1$ является общим для числителя и знаменателя. Таким образом, $S_1(p)$ реализуема.

$$S_2(p) = A_\infty p + \frac{A_0}{p} + \frac{A_1 p}{p^2 + \frac{1}{3}} + \frac{A_2 p}{p^2 + \frac{3}{4}},$$

$$A_\infty = \left| \frac{S_2(p)}{p} \right|_{p=\infty} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

$$A_0 = |S_2(p) \cdot p|_{p=0} = \frac{1}{3},$$

$$A_1 = \left| S_2(p) \cdot \left(p^2 + \frac{1}{3}\right) \right|_{p^2=-\frac{1}{3}} = \frac{50}{54},$$

$$A_2 = \left| S_2(p) \left(p^2 + \frac{3}{4}\right) \right|_{p^2=-\frac{3}{4}} = \frac{422}{243}.$$

Таким образом, $S_2(p)$ реализуема.

Так как $S_1(p)$ и $S_2(p)$ реализуемы, то, следовательно, числитель и знаменатель $F(p)$ являются полиномами Гурвица, т. е. не имеют нулей в правой полуплоскости. Таким образом, выполненная в настоящем параграфе проверка показывает, что рассматриваемая функция $F(p)$ не имеет нулей и полюсов в правой полуплоскости.

15-7. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Проверка условия положительности функции
 $\operatorname{Re} [F(p)] \geq 0$ при $\operatorname{Re}(p) = \sigma \geq 0$

Проверим другое условие положительности функции $Z(p)$, а именно: $\operatorname{Re} [F(j\omega)] \geq 0$ при $\sigma \geq 0$. Положим $\sigma = 0$, т. е. $p = j\omega$. Эта проверка сводится к применению следующей процедуры. Выделим вещественную часть $\operatorname{Re} [F(j\omega)]$ рациональной дроби $F(p)$ при $p = j\omega$. Нетрудно заметить, что эта часть, как рациональная дробь, должна иметь члены с четными показателями относительно $j\omega$, так как только в этом случае при $p = j\omega$ функция будет вещественной. Поэтому представим $F(p)$ в виде суммы рациональных дробей, состоящих из членов с четными и нечетными показателями:

$$F(p) = N(p) + M(p).$$

Так как

$$F(p) = \frac{N_1(p) + M_1(p)}{N_2(p) + M_2(p)},$$

то, перемножив знаменатель и числитель на $N_2(p) - M_2(p)$, получим:

$$F(p) = \frac{N_1(p) N_2(p) - M_1(p) M_2(p)}{N_2^2(p) - M_2^2(p)} + \frac{N_2(p) M_1(p) - N_1(p) M_2(p)}{N_2^2(p) - M_2^2(p)}. \quad (*)$$

При $p = j\omega$ первый член и окажется вещественной частью $N(p) = N(j\omega)$ функции $F(p) = F(j\omega)$, т. е. он равен величине $\operatorname{Re} [F(j\omega)]$, которая должна быть положительной. Знаменатель ее всегда положителен. Поэтому проверка положительности функции $N(j\omega) = \operatorname{Re} [F(j\omega)]$ сведется к проверке положительности ее числителя.

Если выполнить операцию $N_1(j\omega) N_2(j\omega) - M_1(j\omega) M_2(j\omega)$, то получим полином от ω^2 . При изменении ω^2 от нуля до бесконечности значение этого полинома также будет меняться.

Возможны случаи, когда полином при некоторых частотах $\omega^2 = \omega_k^2$ примет значение, равное нулю. В окрестностях этих точек полином можно представить в виде

$$P_0(\omega^2) = N_1(j\omega) N_2(j\omega) - M_1(j\omega) M_2(j\omega) = (\omega^2 - \omega_k^2)^m f(\omega^2),$$

где $f(\omega^2)$ — некоторый полином, не равный нулю при $\omega^2 = \omega_k^2$. Нетрудно заметить, что при $\omega^2 = \omega_k^2$ происходит изменение знака $P_0(\omega^2)$, если m — нечетное. Таким образом, если имеется нуль полинома нечетной кратности, в том числе простой ($m = 1$), то в этой точке полином $P_0(\omega^2)$ меняет знак. Если полином $P_0(\omega^2)$ меняет знак, то это означает, что либо при $\omega^2 < \omega_k^2$, либо при $\omega^2 > \omega_k^2$ величина $P_0(\omega^2)$ имеет отрицательное значение, и, следовательно, функция $F(p)$ не является положительной.

Таким образом, проверка условия $\text{Re} [F(j\omega)] > 0$ сводится к определению нулей функции $P_0(\omega^2)$. Если эта функция имеет нули четной кратности, или вообще не имеет нулей для всех значений ω^2 от нуля до бесконечности, то такая функция является положительной. В курсе высшей алгебры имеются различные способы отыскания вещественных корней (нулей) полиномов. Приведем без доказательства один из них. Для проверки наличия вещественных нулей в определенном отрезке значений $P_0(\omega^2) = P_0(x)$ (обозначим для краткости записи $\omega^2 = x$) используется теория Штурма. Прежде всего введем в употребление некоторые вспомогательные функции, носящие название *функций Штурма*.

Первой функцией Штурма является сама исследуемая функция $P_0(x)$. Второй функцией Штурма $P_1(x)$ является производная исследуемой функции $P_1(x) = P'_0(x)$. Третью функцию Штурма $P_2(x)$ определяют в виде остатка с обратным знаком от деления первой функции Штурма на вторую, причем процесс деления останавливается, когда наивысшая степень остатка будет на единицу меньше наивысшей степени второй функции. Четвертую функцию Штурма $P_3(x)$ можно найти в виде остатка (с обратным знаком) от деления второй функции Штурма на третью, когда наивысшая степень остатка на единицу меньше наивысшей степени третьей функции и т. д. Эта процедура должна производиться до получения постоянной величины. Если это удастся, то все корни $P_0(x)$ — простые. Итак, процесс отыскания функций Штурма имеет вид

$$\frac{P_0(x)}{P_1(x)} = f_1(x) + \frac{\text{ост. (1)}}{P_1(x)}, \quad P_2(x) = - \text{ост. (1)}$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = f_2(x) + \frac{\text{ост. (2)}}{P_2(x)}, \quad P_3(x) = - \text{ост. (2)}$$

.....

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = f_n(x) + \frac{\text{ост. (n)}}{P_n(x)}, \quad P_{n+1}(x) = - \text{ост. (n)} = \text{const.}$$

При произвольном задании $\omega^2 = \omega_1^2$ и $\omega^2 = \omega_2^2$ или $x = x_1$ и $x = x_2$ функции Штурма могут принять различные значения — положительные (обозначаемые знаком «+») и отрицательные (обозначаемые знаком «-»), например, как это показано в таблице, составленной для шести функций Штурма.

$x \backslash P(x)$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	\mathcal{W}
$x = x_1$	+	-	+	-	+	-	5
$x = x_2$	+	+	-	0	+	-	3

Определим количество W изменений знаков функций Штурма при $x = x_1$ и $x = x_2$. Если соседние по номерам функции Штурма имеют одинаковый знак, то будем считать изменение знака равным нулю. Если функции Штурма равны нулю, то они отбрасываются из рассмотрений. В примере, приведенном в таблице, изменение знаков при $x = x_1$ происходит пять раз, т. е. количество изменений знаков $W(x_1) = 5$. Изменение знаков при $x = x_2$ происходит три раза, т. е. $W(x_2) = 3$.

Теорема Штурма гласит: если действительные числа x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) не являются корнями полинома $P_0(x)$, не имеющего кратных корней, то $W(x_1) \geq W(x_2)$ и разность $W(x_1) - W(x_2)$ равна числу вещественных корней (нулей) $P_0(x)$, заключенных между x_1 и x_2 .

Полином $P_0(x)$, функции Штурма которого принимают знаки, приведенные в таблице, имеет два нуля в интервале $x_1 < x < x_2$, и поэтому такой полином не может быть положительным при всех значениях x в этом интервале, т. е. он нереализуем. Полином реализуем только при $W(x_1) - W(x_2) = 0$.

Подвергнем проверке по этому методу положительность конкретной функции $F(p)$, приведенной в начале предыдущего параграфа.

Числитель вещественной части $N(p)$ этой функции равен:

$$N_1(p) N_2(p) - M_1(p) M_2(p) = \\ = 80p^{12} + 284p^{10} + 400p^8 + 287p^6 + 112p^4 + 23p^2 + 2.$$

При $p = j\omega$ имеем $p^2 = -\omega^2$, $p^4 = \omega^4$, $p^6 = -\omega^6$, $p^8 = \omega^8$, $p^{10} = -\omega^{10}$, $p^{12} = \omega^{12}$.

Обозначив $\omega^2 = x$, получим:

$$P_0(x) = 80x^6 - 284x^5 + 400x^4 - 287x^3 + 112x^2 - 23x + 2.$$

Это выражение и будет первой функцией Штурма. Вторая функция Штурма $P_1(x) = P'_0(x)$ равна $P_1(x) = 480x^5 - 1420x^4 + 1600x^3 - 861x^2 + 224x - 23$.

Разделим $P_0(x)$ на $P_1(x)$, заканчивая процесс деления, как было сказано выше. Получим:

$$\frac{P_0(x)}{P_1(x)} = 0,1667x - 0,0986 + \\ + \frac{-6,687x^4 + 14,266x^3 - 10,228x^2 + 2,92x - 0,268}{480x^5 - 1420x^4 + 1600x^3 - 861x^2 + 224x - 23}.$$

Третья функция Штурма равна остатку с обратным знаком:

$$P_2(x) = 6,687x^4 - 14,266x^3 + 10,228x^2 - 2,92x + 0,268.$$

Четвертую функцию Штурма находим как остаток с обратным знаком при делении $P_1(x)$ на $P_2(x)$:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = 71,784x - 59,214 + \frac{21,077x^3 - 45,76x^2 + 31,863x - 7,13}{P_2(x)},$$

$$P_3(x) = -21,077x^3 + 45,76x^2 - 31,863x + 7,13.$$

Пятую, шестую и седьмую функции Штурма определяем аналогично:

$$\frac{P_2(x)}{P_3(x)} = -0,31726x + 0,011946 + \frac{-0,4274x^2 - 0,7774x + 0,1829}{P_3(x)},$$

$$P_4(x) = 0,4274x^2 + 0,7774x - 0,1829,$$

$$\frac{P_3(x)}{P_4(x)} = -49,314x + 139,05 + \frac{-61,415x + 32,562}{P_4(x)},$$

$$P_5(x) = 61,415x - 32,562,$$

$$\frac{P_4(x)}{P_5(x)} = 0,006959x + 0,0082 + \frac{0,084}{P_5(x)},$$

$$P_6(x) = -0,084.$$

Нас интересует положительность функции во всем диапазоне частот, т. е. для $0 \leq \omega^2 \leq \infty$. Поэтому возьмем $x_1 = 0$ и $x_2 = \infty$. Тогда знаки функций Штурма будут:

$x \backslash P_{(x)}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	W
$x_2 = \infty$	+	+	+	-	+	+	-	3
$x_1 = 0$	+	-	+	+	-	-	-	3

Как видно из таблицы, $W(x_1) = 3$ и $W(x_2) = 3$, т. е. $W_1(x_1) = W_2(x_2) = 0$. Поэтому $P(x)$ не имеет нулей на всей оси $j\omega$ и, следовательно, она не меняет знака, т. е. всюду положительна, так как при $x = 0$ она положительна. Таким образом, $\operatorname{Re} [Z(p)]_{p=j\omega} > 0$ для всех значений ω .

Проверки, приведенные в этом и в предыдущем параграфах, показывают, что данная функция $F(p)$ является вещественной и положительной и поэтому реализуема в виде электрической схемы, т. е. можно положить $F(p) = Z(p)$ или $F(p) = Y(p)$.

15-8. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Реализация заданных функций, имеющих вещественные, мнимые и комплексные корни

В предыдущих параграфах мы убедились, что конкретная функция $F(p)$, приведенная в начале § 15-6, является вещественной и положительной и, следовательно, может быть реализована. Осуществим эту реализацию.

Прежде всего выделим ее части, соответствующие мнимым и вещественным корням числителя и знаменателя, если таковые имеются. Эти выделенные части функции реализуем методами, изложенными в § 15-4 и 15-5. Операцию такого выделения будем производить до тех пор, пока не встретим комплексные корни. При этом придется воспользоваться другим методом реализации, который будет изложен ниже.

Приступая к реализации, прежде всего выделим нули и полюсы функции на оси $j\omega$. При проверке отсутствия нулей и полюсов функции $F(p)$ в правой полуплоскости мы заметили, что функция $F(p)$ имеет нуль в точке $\pm j$. Пусть $F(p) = Z(p)$, следовательно, обратная ей функция $Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{F(p)}$ имеет полюс в этой точке. Выделим часть от $Y(p)$, соответствующую этому полюсу:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{8p^6 + 12p^5 + 12p^4 + 13p^3 + 10p^2 + 3p + 1}{(p^2 + 1)(10p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 3p + 2)} = \\ = \frac{A_1 p}{p^2 + 1} + \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{10p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 3p + 2}.$$

Определим коэффициенты $A_1, a_4, a_3, \dots, a_0$. Имеем: $\left| Y(p) \frac{p^2 + 1}{p} \right|_{p^2 = -1} = A_1$, откуда $A_1 = 1$. Зная $A_1 = 1$, можно найти остальные коэффициенты, хотя бы методом неопределенных коэффициентов, приравнивая справа и слева в числителях коэффициенты при одинаковых степенях p . Получаем: $a_4 = 8, a_3 = 2, a_2 = 6, a_1 = 1, a_0 = 1$. Таким образом:

$$Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{8p^4 + 2p^3 + 6p^2 + p + 1}{10p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 3p + 2} = Y_1(p) + Y_2(p).$$

Реализация функции $Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$ электрической цепью имеет вид, показанный на рис. 15-16, а, так как

$$Y_1(p) = \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{pL_1 + \frac{1}{C_1 p}} = \frac{\frac{1}{L_1} p}{p^2 + \frac{1}{L_1 C_1}},$$

причем $L_1 = 1, C_1 = 1$.

Подвергнем исследованию числитель функции $Y_2(p)$ в отношении определения нулей на оси $j\omega$. Легко заметить, что при наличии нуля на оси $j\omega$ ($p = j\omega$) должны быть равны нулю и вещественная и мнимая части этого числителя, т. е.:

$$8p^4 + 6p^2 + 1 = 0 \text{ и } 2p^3 + p = p(2p^2 + 1) = 0.$$

Оба уравнения удовлетворяются только при $p^2 = -1/2$. Так как $Y_2(p)$ имеет нуль $p^2 = -1/2$, то $Z_2(p) = 1/Y_2(p)$ имеет полюс

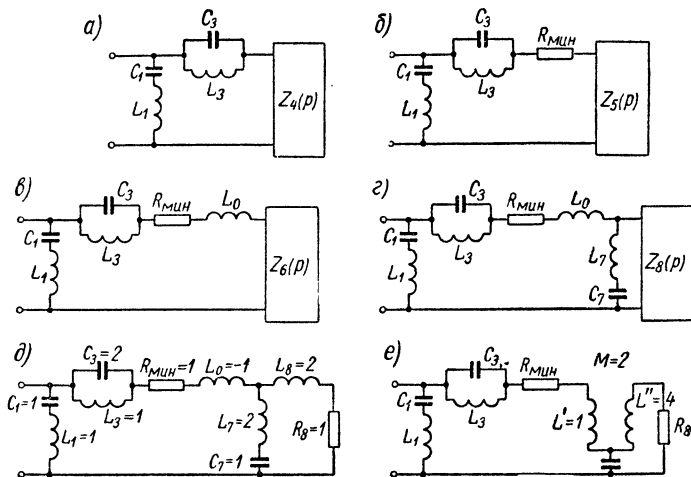


Рис. 15-16.

в этой точке. Выделим часть от $Z_2(p)$, соответствующую этому полюсу:

$$Z_2(p) = \frac{1}{Y_2(p)} = \frac{10p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 3p + 2}{(2p^2 + 1)(4p^2 + p + 1)} = \frac{A_2 p}{2p^2 + 1} + \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{4p^2 + p + 1},$$

где

$$A_2 = \left. Z_2(p) \frac{2p^2 + 1}{p} \right|_{p^2 = -1/2} = 1.$$

Определяя коэффициенты a_2 , a_1 , a_0 , как и в первом случае, получаем в числителе $a_2 = 5$, $a_1 = 2$, $a_0 = 2$. Таким образом,

$$Z_2(p) = \frac{1}{2p^2 + 1} + \frac{5p^2 + 2p + 2}{4p^2 + p + 1} = Z_3(p) + Z_4(p).$$

Функцию $Z_3(p) = \frac{p}{2p^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}p}{p^2 + \frac{1}{2}}$ можно реализовать в виде цепи, показанной на рис. 15-16, а, так как

$$Z_3(p) = \frac{\frac{1}{2}p}{p^2 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{p}{C_3}}{p^2 + \frac{1}{L_3 C_3}} = \frac{\frac{L_3}{C_3}}{pL_3 + \frac{1}{pC_3}},$$

причем $C_3 = 2$, $L_3 = 1$.

Числитель и знаменатель функции $Z_4(p)$ имеют комплексные корни, и поэтому реализация $Z_4(p)$ вышеизложенными методами, применимыми, если корни вещественные или мнимые, неосуществима.

Для реализации функции $Z_4(p)$ воспользуемся методикой, предложенной Бруне. Прежде всего приведем эту функцию к виду минимального активного сопротивления, т. е. к функции, которая имеет $\text{Re} [Z(j\omega)] = 0$ при некоторой частоте $\omega = \omega_0$. Для этого определим минимальное значение $R_{\text{мин}} = \text{Re} [Z_4(j\omega_0)]$, вычитая которое из $Z_4(p)$, получим искомую функцию минимального активного сопротивления, где $[\text{Re} Z_4(j\omega_0)] - R_{\text{мин}} = 0$. Ясно, что нельзя вычесть произвольное активное сопротивление, так как при этом мы можем нарушить условие положительности вещественной части $Z_4(j\omega)$, т. е. получить $\text{Re} [Z_4(j\omega_0)] - R < 0$ (если вычесть $R > R_{\text{мин}}$), или не получить цепь минимального активного сопротивления (если $R < R_{\text{мин}}$), так как при этом ни в одной точке оси $j\omega$ величина $\text{Re} [Z_4(j\omega_0)] - R$ не примет нулевого значения.

Для определения частоты ω_0 , при которой $\text{Re} [Z_4(j\omega)] = \text{мин}$, найдем вещественную часть $Z_4(j\omega)$, используя первый член в правой части формулы (*) в § 15-7:

$$\begin{aligned} \text{Re} [Z_4(j\omega)] &= \left| \frac{(5p^2 + 2)(4p^2 + 1) - 2p \cdot p}{(4p^2 + 1)^2 - p^2} \right|_{p=j\omega} = \\ &= \left| \frac{20p^4 + 11p^2 + 2}{16p^4 + 7p^2 + 1} \right|_{p=j\omega} = \frac{20\omega^4 - 11\omega^2 + 2}{16\omega^4 - 7\omega^2 + 1}. \end{aligned}$$

Определим минимумы этой величины

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \{ \text{Re} [Z_4(j\omega)] \} &= \\ &= \frac{(80\omega^3 - 22\omega)(16\omega^4 - 7\omega^2 + 1) - (64\omega^3 - 14\omega)(20\omega^4 - 11\omega^2 + 2)}{(16\omega^4 - 7\omega^2 + 1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения с целью отыскания его действительных корней можно произвести многими методами. Для данного уравнения имеем решение $\omega_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, при котором $\text{Re} [Z_4(j\omega_0)] = 1$.

Вычитая $R_{\min} = 1$ из $Z_4(p)$, мы не нарушим условие положительности. Находим:

$$Z_4(p) - R_{\min} = \frac{5p^2 + 2p + 2}{4p^2 + p + 1} - 1 = \frac{p^2 + p + 1}{4p^2 + p + 1} = Z_5(p).$$

При $p = j\omega_0 = j \frac{1}{\sqrt{2}}$ сопротивление $Z_5(j\omega_0) = -j \frac{1}{\sqrt{2}} = -j\omega_0 L_0$, где $L_0 = -1$. Тогда $Z_5(p)$ можно представить в виде $Z_5(p) = pL_0 + Z_6(p)$, где

$$Z_6(p) = Z_5(p) - pL_0 = \frac{p^2 + p + 1}{4p^2 + p + 1} + p = \frac{4p^3 + 2p^2 + 2p + 1}{4p^2 + p + 1}.$$

Особенность $Z_6(p)$ заключается в том, что эта функция равна нулю при $p = j\omega_0$, т. е. имеется возможность для обратной функции выделить часть, соответствующую полюсу $j\omega_0$:

$$Y_6(p) = \frac{1}{Z_6(p)} = \frac{4p^2 + p + 1}{(p^2 + \omega_0^2)(4p + 2)} = \frac{A_6 p}{p^2 + \frac{1}{2}} + \frac{a_0}{4p + 2}.$$

Учитывая, что $A_6 = \left| Y_6(p) \frac{p^2 + \frac{1}{2}}{p} \right|_{p^2 = -\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ и $a_0 = 2$, имеем:

$$Y_6(p) = \frac{\frac{1}{2} p}{p^2 + \frac{1}{2}} + \frac{2}{4p + 2} = Y_7(p) + Y_8(p).$$

Реализация $Y_7(p)$ производится ранее изложенным методом, аналогично $Y_1(p)$, в виде последовательной цепочки из $L_7 = 2$ и $C_7 = 1$, а реализацию $Y_8(p)$ можно осуществить в виде цепочки из последовательно соединенных L_8 и R_8 , где $L_8 = 2$, $R_8 = 1$, так как $Y_8(p) = \frac{1}{2p + 1}$.

Итак, реализующая всю функцию $F(p)$ цепь имеет вид, представленный на рис. 15-16, δ .

При данном способе реализации функции вида $Z_5(p)$, которая не имеет ни нулей, ни полюсов на оси $j\omega$ и имеет равную нулю вещественную часть $\operatorname{Re} [Z_5(j\omega_0)]$ при частоте ω_0 , мы получили на одном этапе реализации отрицательное значение индуктивности $L_0 = -1$. Это обстоятельство не должно нас смущать, так как в конечном счете эту отрицательную индуктивность можно эквивалентировать введением в реальную цепь трансформатора, приближающегося по своим свойствам к совершенному, т. е. трансформатору с коэффициентом связи, равным единице ($k = 1$). Параметры трансформатора в соответствии со значениями величин L_0 , L_7 и L_8 (рис. 15-16, δ) будут равны $L' = L_0 + L_7 = -1 + 2 = 1$, $L'' =$

$= L_8 + L_7 = 2 + 2 = 4$, $M = L_7 = 2$ и, следовательно,
 $k = \frac{M}{\sqrt{L'L''}} = 1$. Это обстоятельство несколько снижает практическую ценность метода, так как условие $k = 1$ можно осуществить только приближенно, хотя и с большой точностью.

Окончательно, цепь, реализующая заданную конкретную функцию $F(p)$, изображена на рис. 15-16, *e*.

15-9. О синтезе передаточных функций четырехполюсника

Проблема синтеза передаточной функции произвольного вида весьма сложна. Поэтому пример синтеза четырехполюсника с заданной передаточной функцией приведем для случая, когда эта функция задана для четырехполюсника, представленного на рис. 15-17, который питается от источника тока \mathcal{J} и на выходе которого включен приемник с весьма большим сопротивлением (например, цепь сетки электронной лампы).

При этом в уравнениях четырехполюсника, записанных в системе z -параметров:

$$U_1(p) = Z_{11}(p) I_1(p) + Z_{12}(p) I_2(p),$$

$$U_2(p) = Z_{21}(p) I_1(p) + Z_{22}(p) I_2(p),$$

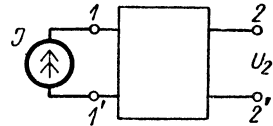


Рис. 15-17.

можно принять $I_2(p) \approx 0$, т. е. положить $U_1(p) = Z_{11}(p)I_1(p)$ и $U_2(p) = Z_{21}(p)I_1(p)$. В таком случае передаточная функция оказывается равной параметру $Z_{21}(p)$ четырехполюсника, так как

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)} = Z_{21}(p).$$

Рассмотрим свойства такой передаточной функции, причем ограничимся случаем, когда четырехполюсник, реализующий эту функцию, состоит только из реактивных элементов. В этом случае величины $Z_{11}(p)$ и $Z_{22}(p)$, как входные сопротивления со сторон зажимов 1—1' и 2—2' холостого хода четырехполюсника, состоящего из реактивных элементов, имеют простые чередующиеся нули и полюсы, расположенные на оси $j\omega$. Коэффициенты в разложении этих функций на простые дроби вещественны и положительны (см. § 15-5). Величина $Z_{21}(p)$ не является входным сопротивлением и поэтому ее нули могут быть расположены в любой части комплексной плоскости, однако, симметрично относительно оси вещественных (§ 13-5). Полюсы функции $Z_{21}(p)$, как и полюсы функций $Z_{11}(p)$ и $Z_{22}(p)$, должны лежать на оси $j\omega$. Функция $Z_{21}(j\omega)$ должна быть мнимой величиной, так как четырехполюсник состоит из

реактивных элементов. Поэтому она должна быть нечетной рациональной функцией p .

При синтезе цепи, в которой необходимо обеспечивать только заданное значение передаточной функции $K(p) = Z_{21}(p)$, не ставится никаких ограничений для величин $Z_{11}(p)$ и $Z_{22}(p)$. Поэтому проще всего брать их равными друг другу. В этом случае полюсы $Z_{11}(p) = Z_{22}(p)$ одновременно будут также и полюсами $Z_{21}(p)$ (§ 13-5). Простые соотношения, связывающие параметры эквивалентной схемы четырехполюсника с параметрами $Z_{11}(p)$ и $Z_{21}(p)$, имеют место для мостовой эквивалентной схемы (рис. 15-18), для которой имеем:

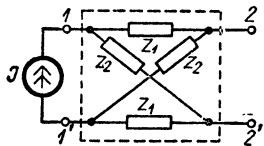


Рис. 15-18.

$$Z_{11}(p) = Z_{22}(p) = \frac{1}{2} [Z_1(p) + Z_2(p)]$$

и

$$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = \frac{1}{2} [Z_2(p) - Z_1(p)],$$

откуда

$$Z_1(p) = Z_{11}(p) - Z_{12}(p) \quad \text{и} \quad Z_2(p) = Z_{11}(p) + Z_{12}(p).$$

В связи с этим будем осуществлять реализацию при помощи мостовой схемы.

Если $Z_{21}(p)$ задано в виде рациональной дроби, то, разлагая ее на простые дроби, в общем случае будем иметь некоторые простые дроби с положительными коэффициентами и некоторые с отрицательными. Обозначим сумму дробей с положительными коэффициентами через $Z_{21(+)}(p)$, а взятую со знаком «минус» сумму дробей с отрицательными коэффициентами через $Z_{21(-)}(p)$. Будем иметь:

$$Z_{21}(p) = Z_{21(+)}(p) - Z_{21(-)}(p).$$

В выражениях $Z_{21(+)}(p)$ и $Z_{21(-)}(p)$ коэффициенты положительны. Наиболее простые выражения для $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ мы получим, если положим $Z_{11}(p) = Z_{22}(p) = Z_{21(+)}(p) + Z_{21(-)}(p)$.

Тогда

$$Z_1(p) = 2Z_{21(-)}(p) \quad \text{и} \quad Z_2(p) = 2Z_{21(+)}(p).$$

В качестве примера рассмотрим реализацию передаточной функции

$$Z_{21}(p) = \frac{6p^5 + 5p^3 + 4,5p}{(p^2 + 0,5)(p^2 + 1)(p + 2)} = \frac{3p}{p^2 + 0,5} - \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{p}{p^2 + 2} = \\ = Z_{21(+)}(p) - Z_{21(-)}(p),$$

$$Z_{21(+)}(p) = \frac{3p}{p^2 + 0,5}, \quad Z_{21(-)}(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 2}.$$

Нетрудно убедиться, что числитель $(6p^5 + 5p^3 + 4,5 p)$ имеет нули, расположенные и в левой части, и в правой части плоскости p симметрично относительно осей $j\omega$ и σ , и в начале координат.

Таким образом, параметры мостовой схемы четырехполюсника в данном случае равны:

$$Z_1(p) = 2Z_{21(-)}(p) = \frac{2p}{p^2 + 1} + \frac{2p}{p^2 + 2}$$

и

$$Z_2(p) = 2Z_{21(+)}(p) = \frac{6p}{p^2 + 0,5}$$

Реализация $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ приводит к схемам на рис. 15-19 со следующими значениями параметров:

$$C_1 = \frac{1}{2}, L_1 = 2, C_3 = \frac{1}{2}, L_3 = 1, C_2 = \frac{1}{6}, L_2 = \frac{6}{0,5} = 12.$$

Полученная мостовая схема (рис. 15-20) содержит много элементов. Желательно, если это возможно, преобразовать ее с целью

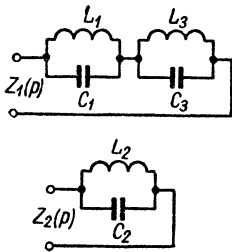


Рис. 15-19.

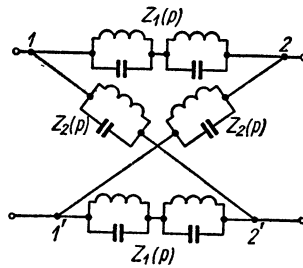


Рис. 15-20.

уменьшения количества элементов. Решение этой задачи является предметом раздела теории синтеза, посвященного эквивалентным преобразованиям, которого мы здесь не будем касаться.

Приведенный метод синтеза передаточной функции является одним из простейших. Существует ряд способов синтеза четырехполюсников для решения более сложных задач.

Синтез передаточных функций играет важную роль в автоматике, радиотехнике, измерительной технике. При помощи синтеза передаточной функции можно конструировать цепи, которые в сочетании с уже имеющимися цепями должны обеспечить желаемые передаточные функции всей системы в целом. На основе синтеза передаточных функций возможно конструирование корректирующих, фазовращающих, фильтрующих и других электрических цепей.



ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

16-1. Электрические цепи с распределенными параметрами

В § 3-3 первой части было указано, что, строго говоря, мы всегда имеем цепи, параметры которых в той или иной мере распределены вдоль участков цепи, и только абстрагируясь от действительности, можно предполагать, что параметры цепи — индуктивность, емкость, сопротивление и проводимость — сосредоточены в определенных участках цепи. Во многих случаях такое допущение не приводит к сколь-нибудь заметным неточностям в результатах проводимого анализа. Изложенная во всех предыдущих главах теория цепей относилась к цепям с сосредоточенными параметрами. Однако мы встречаемся с рядом важных случаев, когда такого рода допущение становится неприемлемым и совершенно необходимо учитывать распределенность параметров вдоль цепи. При этом мы еще имеем возможность рассматривать электротехническое устройство как электрическую цепь, если оно имеет большую протяженность лишь в одном определенном направлении. В таком случае можно говорить о параметрах, распределенных по длине цепи в этом направлении. Критерием необходимости рассматривать цепь в качестве цепи с распределенными параметрами, как было сказано в § 3-3 первой части, является соотношение между интервалом времени распространения электромагнитных волн вдоль всей длины цепи и интервалом времени, в течение которого токи и напряжения изменяются на заметную величину от полного их изменения в рассматриваемом процессе. Когда эти интервалы времени сравнимы, то цепь необходимо рассматривать как цепь с распределенными параметрами.

Естественно, что токи и напряжения в таких цепях являются функциями двух независимых переменных — времени t и координаты x , отсчитываемой вдоль указанного выше направления. Соот-

ветственно, уравнения, описывающие процессы в этих цепях, являются уравнениями в частных производных. Примерами цепей с распределенными параметрами являются линии передачи электрической энергии, линии связи, высокочастотные коаксиальные линии радиотехнических и телевизионных устройств. Обмотки трансформаторов и электрических машин также должны рассматриваться как цепи с распределенными параметрами при воздействии на них импульсных токов и напряжений, когда промежуток времени изменения токов и напряжений сравним со временем пробега волн вдоль проволоки обмотки.

Параметры цепи могут быть распределены неравномерно вдоль цепи. Однако во многих случаях можно полагать параметры распределенными равномерно вдоль цепи, например, в случае линий передач, в которых сечение проводов, их взаимное расположение и характеристики среды не изменяются по длине линии. Такие линии называют **о д н о р о д н ы м и**.

В дальнейшем под величинами, обозначаемыми через L , C , r , g и M , мы будем понимать индуктивность, емкость, сопротивление, проводимость и взаимную индуктивность, рассчитанные на единицу длины линии. Эти параметры, вообще говоря, зависят от частоты. Например, сопротивление r и индуктивность L зависят от частоты вследствие поверхностного эффекта. Исследуя основные процессы в однородных линиях, мы будем полагать их параметры постоянными. В случае необходимости зависимость параметров от частоты должна быть учтена.

16-2. Уравнения линии с распределенными параметрами

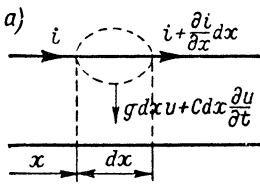
Рассмотрим двухпроводную однородную линию. Величины L и r представляют индуктивность и сопротивление пары проводов на единицу длины линии. Величины C и g представляют емкость и проводимость утечки между проводами на единицу длины линии. Координату x будем отсчитывать от некоторой точки линии, в частности, от начала линии. Ток в проводах линии зависит не только от t , но и от x , так как на каждом отрезке dx линии ток ответвляется от одного провода к другому в виде тока смещения $Cdx \frac{\partial u}{\partial t}$ и тока проводимости gdx . Поэтому, если ток в проводе в точке x равен i , то в точке $x + dx$ он отличается от i на величину $\frac{\partial i}{\partial x} dx$ и равен $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. Согласно принципу непрерывности тока, ток сквозь замкнутую поверхность s (см. пунктир на рис. 16-1, а) равен нулю:

$$(-i) + \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx\right) + \left(gdx + Cdx \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Точно так же напряжение между проводами зависит не только от t , но и от x , так как на каждом отрезке dx линии имеет место падение напряжения в двух проводах линии $du_1 + du_2$ (рис. 16-1, б). Это падение напряжения складывается из падения напряжения $rdxi$ в сопротивлении rdx пары проводов и индуктивного падения напряжения $Ldx \frac{\partial i}{\partial t}$, обусловленного индуктивностью Ldx пары проводов,

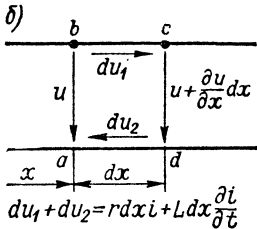


т. е. $du_1 + du_2 = rdxi + Ldx \frac{\partial i}{\partial t}$. Сумма падений напряжения в контуре $abcd$ равна нулю:

$$(-u) + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) + \left(rdxi + Ldx \frac{\partial i}{\partial t}\right) = 0$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}.$$



Таким образом, уравнения линии имеют вид

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}.$$

В случае однородной линии параметры r , L , g и C не зависят от x . В случае же неоднородной линии они являются функциями от x .

В общем случае для n -проводной линии, расположенной в воздухе над поверхностью земли, для каждого из проводов необходимо в первом уравнении учитывать также э. д. с. взаимной индукции от токов, протекающих в соседних проводах, а во втором уравнении учитывать также ток смещения между рассматриваемым проводом и всеми соседними проводами. При этом получаем систему из $2n$ уравнений (так называемых «телеграфных уравнений»):

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x} = r_k i_k + L_k \frac{\partial i_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} M_{km} \frac{\partial i_m}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial i_k}{\partial x} = g_k u_k + \sum_{m=1}^{m=n} g_{km} (u_k - u_m) + C_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{m=1}^{m=n} C_{km} \frac{\partial (u_k - u_m)}{\partial t},$$

где $k = 1, 2, \dots, n$ — номер провода; r_k , L_k , g_k , C_k — собственные параметры k -го провода на единицу длины с учетом влияния земли;

M_{km} и C_{km} — взаимная индуктивность и емкость между k -м и m -м проводами на единицу длины линии с учетом влияния земли.

Рассмотрение частного случая двухпроводной линии, которое будет выполнено в последующих параграфах, представляет интерес не только потому, что это наиболее простой случай, позволяющий наиболее выпукло показать основные особенности процессов в цепях с распределенными параметрами, но также и потому, что во многих случаях трехфазная линия может быть заменена ей эквивалентной однофазной двухпроводной линией. Это можно сделать при синусоидальном процессе, если все провода находятся в одинаковых условиях, т. е. если осуществлена так называемая транспозиция проводов — последовательная перестановка их местами, и если полный цикл транспозиции значительно меньше длины волны тока и напряжения в линии (§ 16-5). При этом для симметричных трехфазных напряжений прямой и обратной последовательностей токи в проводах также образуют симметричные системы, соответственно, прямой и обратной последовательностей. В этом случае достаточно рассматривать процесс в одной фазе, заменяя трехфазную линию эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Для напряжений и токов нулевой последовательности трехпроводную трехфазную линию также можно заменить эквивалентной двухпроводной, причем обратным проводом в этом случае является провод, эквивалентный земле при трехфазной линии.

16-3. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

При установившихся режимах токи и напряжения изменяются во времени по периодическому закону. Представив периодические функции времени в виде рядов Фурье, можно произвести расчет отдельно для каждой синусоидальной составляющей этого ряда и вследствие линейности цепи результирующий процесс получить, пользуясь методом наложения. Поэтому нам достаточно произвести анализ процессов в линии при синусоидальных токах и напряжениях.

Пусть ток и напряжение в линии изменяются во времени по синусоидальному закону с угловой частотой ω . Пользуясь комплексным методом, напишем уравнение линии для комплексных действующих значений \dot{U} и \dot{I} напряжения и тока:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = r\dot{I} + j\omega L\dot{I}, \quad -\frac{d\dot{I}}{dx} = g\dot{U} + j\omega C\dot{U}.$$

Комплексы \dot{U} и \dot{I} являются функциями только x , и, соответственно, уравнения в частных производных для мгновенных

значений u и i перешли в обыкновенные дифференциальные уравнения для \dot{U} и \dot{I} .

Дифференцируя первое уравнение по x и используя второе, находим:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U} = \gamma^2\dot{U},$$

где

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta.$$

Решение уравнения для \dot{U} имеет вид

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}.$$

Из первого уравнения линии находим комплекс тока:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{r + j\omega L} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \end{aligned}$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}.$$

Комплексные величины $\gamma = \alpha + j\beta$ и Z являются основными характеристиками однородной линии и носят наименования: γ — коэффициент распространения линии, Z — волновое, или характеристическое сопротивление линии, α — коэффициент затухания, β — коэффициент фазы.

Смысл всех этих наименований будет ясен из рассмотрения бегущих волн в линии (§ 16-5). Обратим внимание на то, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Действительно, обозначив $r + j\omega L = z'e^{j\psi'}$, $g + j\omega C = y'e^{j\psi''}$ и $\frac{1}{2}(\psi' + \psi'') = \theta$, будем иметь $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{z'y'} e^{j\theta} = \sqrt{z'y'} \cos \theta + j\sqrt{z'y'} \sin \theta$. Так как $0 < \psi' < \frac{\pi}{2}$, $0 < \psi'' < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, то $\cos \theta > 0$ и $\sin \theta > 0$, т. е. $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Условимся снабжать дальше ток и напряжение в начале линии ($x = 0$) индексом 1 (I_1, \dot{U}_1) и в конце линии ($x = l$, где l — длина линии) индексом 2 (I_2, \dot{U}_2).

Для определения произвольных постоянных A_1 и A_2 достаточно знать две из этих четырех величин.

Выразим эти постоянные через напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_1 в начале линии. Полагая $x = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_1 + A_2 \text{ и } \dot{I}_1 = \frac{1}{Z}(A_1 - A_2), \\ A_1 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z), \quad A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}, \\ \dot{I} &= \frac{1}{Z} \left[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x} \right]. \end{aligned}$$

Эти же выражения для напряжения \dot{U} и тока \dot{I} в любой точке линии можно записать также в другой форме, используя соотношения:

$$\frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \text{ch } \gamma x \text{ и } \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \text{sh } \gamma x.$$

Получаем:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \text{ch } \gamma x - \dot{I}_1 Z \text{sh } \gamma x, \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \text{ch } \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z} \text{sh } \gamma x.$$

Значения напряжения \dot{U}_2 и тока \dot{I}_2 в конце линии получаются, если положить $x = l$:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \text{ch } \gamma l - \dot{I}_1 Z \text{sh } \gamma l, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \text{ch } \gamma l - \frac{\dot{U}_1}{Z} \text{sh } \gamma l.$$

Из этих уравнений можно выразить \dot{U}_1, \dot{I}_1 через \dot{U}_2 и \dot{I}_2 . Имеем:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ch } \gamma l + \dot{I}_2 Z \text{sh } \gamma l, \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\text{sh } \gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \text{ch } \gamma l.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения четырехполюсника в A -параметрах. Постоянные этого четырехполюсника соответственно равны:

$$A = D = \text{ch } \gamma l, \quad B = Z \text{sh } \gamma l, \quad C = \frac{\text{sh } \gamma l}{Z},$$

причем, как и для всякого пассивного четырехполюсника, $AD - BC = \text{ch}^2 \gamma l - \text{sh}^2 \gamma l = 1$.

Как и всякий четырехполюсник, линия может быть заменена Т- или П-образной, в данном случае симметричной эквивалентной схемой. Параметры эквивалентных схем вычисляются через постоянные A, B, C и D по формулам, приведенным в § 13-2.

16-4. О моделировании однородной линии цепной схемой

Рассмотрение линии с распределенными параметрами как четырехполюсника и, соответственно, замена линии эквивалентной Т-образной или П-образной схемой возможны только в том случае, если мы интересуемся напряжениями и токами только в начале и в конце линии. Если же мы желаем изучать распределение напряжения и тока вдоль линии, то необходимо ее рассматривать как цепь с распределенными параметрами и пользоваться приведенными выше урavnениями, в которых U и I являются функциями x . Однородную линию можно рассматривать как однородную цепную схему с бесконечно большим числом элементарных звеньев. Поэтому приближенно можно линию конечной длины заменить цепной схемой с конечным числом звеньев, обладающих конечными значениями параметров. Такая замена будет давать тем более точные результаты, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Эти соображения имеют весьма большое значение для моделирования линий. Для экспериментального изучения в лабораторных условиях процессов в длинных линиях, а также процессов в различных системах, соединенных длинными линиями, обычно линии заменяют эквивалентными им цепными схемами. Точность моделирования будет тем больше, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Одного звена, заменяющего линию, достаточно, если мы интересуемся соотношениями между напряжениями и токами только в начале и в конце линии и только при одной частоте установившегося синусоидального режима. Если же мы желаем знать связь между напряжениями и токами, хотя бы только в начале и в конце линии, но при разных частотах, например, для разных гармоник несинусоидальных токов и напряжений, то моделировать всю линию одним Т- или П-образным звеном уже недостаточно. Это следует из того, что параметры такого звена, как видно из вышеприведенных формул, сложным образом зависят от характеристик линии Z и γ , которые в общем случае, в свою очередь, сложным образом зависят от частоты.

Моделировать линию цепной схемой с достаточным числом звеньев и подавно необходимо при изучении распределения напряжения и тока вдоль линии.

Выбор числа звеньев в модели линии зависит от тех задач, которые ставятся при исследовании. По большей части бывает достаточно взять 10—20 звеньев.

16-5. Бегущие волны

Рассмотрим выражение, полученное в § 16-3 для \dot{U} , причем введем обозначения:

$$\dot{U}_\varphi = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + I_1 Z) e^{-\gamma x} = \dot{U}_\varphi e^{-\gamma x} = U_{\varphi 1} e^{j\xi} e^{-\gamma x},$$

$$\dot{U}_\psi = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - I_1 Z) e^{\gamma x} = \dot{U}_\psi e^{\gamma x} = U_{\psi 1} e^{j\eta} e^{\gamma x}.$$

Тогда при $\gamma = \alpha + j\beta$ имеем:

$$\dot{U} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi = \dot{U}_\varphi e^{-\gamma x} + \dot{U}_\psi e^{\gamma x} = U_{\varphi 1} e^{-\alpha x} e^{j(\xi - \beta x)} + U_{\psi 1} e^{\alpha x} e^{j(\eta + \beta x)}$$

и, переходя от комплекса \dot{U} к изображаемому им напряжению u , получим:

$$u = u_\varphi + u_\psi = \sqrt{2} U_{\varphi 1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x) + \sqrt{2} U_{\psi 1} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x).$$

Таким образом, u можно рассматривать как сумму двух составляющих u_φ и u_ψ . Из выражения $u_\varphi = \sqrt{2} U_{\varphi 1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x)$ следует, что при $x = \text{const}$, т. е. в данной точке линии, напряжение u_φ является синусоидальной функцией времени. Пусть $\alpha = 0$ и $e^{-\alpha x} = 1$. Тогда, положив $t = \text{const}$, нетрудно убедиться, что при $\alpha = 0$ напряжение u_φ в данный момент времени будет распределено вдоль линии также по закону синуса. При этом длина λ синусоидальной волны, изображающей этот закон распределения напряжения u_φ , т. е. расстояние между ближайшими точками, в которых фазы напряжения u_φ отличаются на 2π , равна $2\pi/\beta$. Это синусоидальное распределение напряжения, или, как говорят, волна напряжения, перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью, равной $v = \omega/\beta$. Действительно, $\sin(\omega t + \xi - \beta x)$ при $x = x_0 + \frac{\omega}{\beta} t$ будет величиной постоянной, и, следовательно, напряжение, существовавшее в некоторый момент времени в произвольно выбранной точке x , будет оставаться неизменным, если эта точка начнет перемещаться вдоль линии со скоростью $v = \omega/\beta$. Так как при этой скорости остается неизменной фаза колебания, то ее называют фазовой скоростью волн. Такого рода волны, перемещающиеся вдоль некоторого направления, называют бегущими волнами. При $\alpha > 0$ наличие множителя $e^{-\alpha x}$ показывает, что амплитуда волны по мере продвижения последней вдоль линии затухает по показательному закону и что распределение напряжения вдоль линии в любой момент времени может быть изображено синусоидой, затухающей по

тому же закону (рис. 16-2). Поэтому коэффициент α называют коэффициентом затухания. Так как фаза напряжения изменяется с изменением x , то коэффициент β , характеризующий это изменение фазы, называют коэффициентом фазы.

При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что вторая составляющая $u_\psi = \sqrt{2} U_{\psi 1} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x)$ представляет собою волну такой же длины $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, как и u_ϕ , бегущую

вдоль линии со скоростью $v = -\frac{\omega}{\beta}$, т. е. от конца линии к ее началу. Амплитуда этой волны, как показывает наличие множителя $e^{\alpha x}$, возрастает по показательному закону от начала линии к ее концу или, иными словами, затухает по показательному закону по

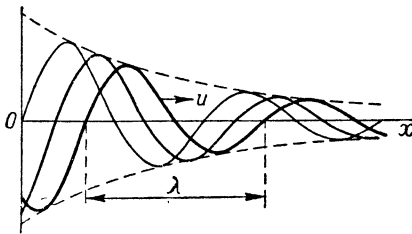


Рис. 16-2.

мере продвижения волны от конца линии к ее началу. Волны, бегущие от начала линии к ее концу, мы будем называть прямыми волнами, а волны, бегущие в обратном направлении, — обратными волнами.

Аналогично, рассматривая выражение для тока i , можем написать: $i = i_\phi + i_\psi$, где $i_\phi =$

$= \frac{1}{2Z} (U_1 + I_1 Z) e^{-\gamma x}$, $i_\psi = -\frac{1}{2Z} (U_1 - I_1 Z) e^{\gamma x}$. Соответственно для мгновенных значений получаем $i = i_\phi + i_\psi$, причем i_ϕ есть прямая волна тока, а i_ψ обратная волна тока.

Легко видеть, что отношение напряжения \dot{U}_ϕ прямой волны к току i_ϕ прямой волны равно волновому сопротивлению линии Z , а для обратных волн соответствующее отношение равно $(-Z)$:

$$\frac{\dot{U}_\phi}{i_\phi} = Z, \quad \frac{\dot{U}_\psi}{i_\psi} = -Z. \quad (*)$$

Появление обратных волн можно рассматривать как результат отражения прямых волн от конца линии. Соответственно прямые волны называют также падающими, а обратные — отраженными. Коэффициентом отражения напряжения q_u от конца линии называют отношение отраженной волны $\dot{U}_{\psi 2}$ к прямой волне $\dot{U}_{\phi 2}$ напряжения в конце линии. Соответственно, коэффициентом отражения тока q_i называют отношение $i_{\psi 2}$ к $i_{\phi 2}$. Найдем выражение для q_u и q_i через волновое сопротивление Z линии и сопротивление $Z_{\text{пр}}$ приемника, на которое замкнута линия на ее конце.

Имеем на конце линии:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{\varphi_2} + \dot{U}_{\psi_2}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{\varphi_2} + \dot{I}_{\psi_2} = \frac{\dot{U}_{\varphi_2}}{Z} - \frac{\dot{U}_{\psi_2}}{Z}.$$

Отсюда находим:

$$2\dot{U}_{\psi_2} = \dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2 (Z_{\text{нр}} - Z), \quad 2\dot{U}_{\varphi_2} = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2 (Z_{\text{нр}} + Z);$$

следовательно,

$$q_u = \frac{\dot{U}_{\psi_2}}{\dot{U}_{\varphi_2}} = \frac{Z_{\text{нр}} - Z}{Z_{\text{нр}} + Z}.$$

Разделив первое равенство (*) на второе, получаем $\frac{q_i}{q_u} = -1$, т. е.

$$q_i = -q_u = \frac{Z - Z_{\text{нр}}}{Z + Z_{\text{нр}}}.$$

Если линия замкнута на конце на сопротивление, равное волновому, $Z_{\text{нр}} = Z$, то $q_u = 0$ и $q_i = 0$, т. е. в линии будут отсутствовать отраженные (обратные) волны. При этом в *любой точке линии* отношение напряжения к току равно волновому сопротивлению:

$$\frac{\dot{U}}{I} = \frac{\dot{U}_{\varphi}}{I_{\varphi}} = Z.$$

Если линия на конце разомкнута, т. е. мы имеем так называемый режим холостого хода, то $Z_{\text{нр}} = \infty$, $q_u = 1$ и $q_i = -1$. Следовательно, на конце линии падающая \dot{U}_{φ_2} и отраженная \dot{U}_{ψ_2} волны напряжения равны по величине и одинаковы по знаку, в результате чего результирующее напряжение \dot{U}_2 на конце линии оказывается в два раза больше напряжения падающей волны. Падающая I_{φ_2} и отраженная I_{ψ_2} волны тока равны по величине и противоположны по знаку, и результирующий ток \dot{I}_2 на конце разомкнутой линии равен нулю.

В другом крайнем случае короткого замыкания на конце линии $Z_{\text{нр}} = 0$, $q_u = -1$ и $q_i = 1$. При этом $\dot{U}_{\psi_2} = -\dot{U}_{\varphi_2}$ и $\dot{U}_2 = 0$, а $\dot{I}_{\psi_2} = \dot{I}_{\varphi_2}$ и $\dot{I}_2 = 2\dot{I}_{\varphi_2}$.

16-6. Характеристики однородной линии. Условия для неискажающей линии

Волновое сопротивление линии $Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}$ и коэффициент распространения $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$ зависят от частоты. Поэтому условия прохождения волн тока и напряжения для разных частот оказываются различными. Если сигнал на входе линии является периодической несинусоидальной

функцией времени, то на выходе линии форма кривой сигнала будет отличаться от его формы на входе, так как для различных гармоник условия прохождения различны. Это же будет иметь место и при любом аperiodическом сигнале, так как такой сигнал может быть представлен в виде сплошного частотного спектра с помощью преобразования Фурье, и для различных частот этого спектра условия прохождения вдоль линии будут различными.

Для линии связи чрезвычайно важно создание условий, при которых отсутствовало бы искажение формы передаваемого сигнала (тока и напряжения). Для этого необходимо, чтобы волновое сопротивление Z , коэффициент затухания α и фазовая скорость $v = \omega/\beta$ не зависели от частоты. Очевидно, при этом коэффициент фазы β должен быть пропорционален частоте. Такие условия оказываются выполненными, если соблюдено соотношение:

$$\frac{r}{L} = \frac{g}{C}.$$

Действительно, при этом

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{r/L + j\omega}{g/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

и

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \sqrt{LC} \sqrt{(r/L + j\omega)(g/C + j\omega)} = \\ &= \sqrt{LC} (r/L + j\omega) = \sqrt{rg} + j\omega \sqrt{LC}, \end{aligned}$$

т. е. удовлетворяются все вышеуказанные требования, необходимые для того, чтобы линия была неискажающей. Можно показать, что в этих условиях коэффициент затухания и коэффициент фазы имеют минимальные значения, т. е.:

$$\alpha_{\min} = \sqrt{rg} \quad \text{и} \quad \beta_{\min} = \omega \sqrt{LC}.$$

Соответственно фазовая скорость при этом принимает максимальное значение $v_{\max} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и равна скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике, окружающем проводе линии (ч. IV).

Для воздушных линий $z \approx 300 \div 400 \text{ ом}$ и $v \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$. Для кабельной линии $z \approx 50 \text{ ом}$ и $v < 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$, так как диэлектрическая проницаемость изоляции в кабеле больше диэлектрической проницаемости воздуха.

Длина волны $\lambda = v/f$ для воздушной линии при частоте 50 гц оказывается равной 6000 км, т. е. обычно превосходит длину наиболее протяженных линий электропередачи. При звуковой частоте 5000 гц длина волны $\lambda = 60 \text{ км}$, и, следовательно, на протяжении

линии связи можно укладывать несколько длин волн. Это имеет место даже в сравнительно коротких линиях, применяемых в радиотехнических устройствах, вследствие высокой частоты.

Обычно в линиях $\frac{r}{L} > \frac{g}{C}$, так как проводимость утечки через изоляцию незначительна. Для достижения равенства $\frac{r}{L} = \frac{g}{C}$ увеличение проводимости нецелесообразно. Уменьшение r или C практически не представляется возможным. Поэтому в линиях связи искусственно увеличивают индуктивность, включая в линию через определенные расстояния особые реактивные катушки или применяя кабели, проводящие жилы которых обмотаны тонкой лентой из материала с высокой магнитной проницаемостью.

Осуществив вышеуказанное соотношение между параметрами линии, мы получаем условие для передачи сигнала без искажений, но сигнал затухает по мере продвижения вдоль линии, так как $\alpha > 0$. В предельном случае, когда $r = 0$ и $g = 0$, мы получаем неискажающую линию без потерь, по которой сигнал передается не только без искажения, но и без затухания.

Для осуществления передачи сигналов без искажения, кроме соблюдения вышеуказанных условий, необходимо, чтобы отсутствовали/отраженные волны от конца линии. Для этого, как было показано в предыдущем параграфе, сопротивление приемника должно быть равно волновому сопротивлению линии, т. е., как говорят, приемник и линия должны быть *согласованы*.

Если $Z_{пр} \neq Z$, то согласования можно добиться включив между линией и приемником согласующее устройство. Таковым может быть, например, трансформатор с надлежаще выбранным коэффициентом трансформации. Осуществляют также согласование в начале линии генерирующего устройства и линии.

16-7. Однородная линия при различных режимах работы

В этом и следующем параграфах мы будем рассматривать режимы в однородной линии при различных значениях сопротивления приемника, т. е. при различных значениях отношения \dot{U}_2 к \dot{I}_2 . В этом случае целесообразнее вести счет расстояний от конца линии, для чего во всех ранее использованных уравнениях достаточно заменить x на $l - x$. При этом $x = 0$ будет относиться к концу линии, а $x = l$ к началу линии. В § 16-3 при счете расстояний от начала линий мы получили выражения для напряжения и тока в любой точке линии в виде

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}, \quad \dot{I} = \frac{1}{Z} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Заменяя в этих выражениях x на $l - x$, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} + A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x}, \\ IZ &= A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} - A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x}, \end{aligned}$$

где положено $A_1 e^{-\gamma l} = A_3$ и $A_2 e^{\gamma l} = A_4$. В конце линии, т. е. теперь при $x = 0$, $\dot{U} = \dot{U}_2$ и $I = I_2$. Следовательно, для определения постоянных A_3 и A_4 имеем выражения: $\dot{U}_2 = A_3 + A_4$ и $I_2 Z = A_3 - A_4$, откуда $A_3 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + I_2 Z)$, $A_4 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - I_2 Z)$.

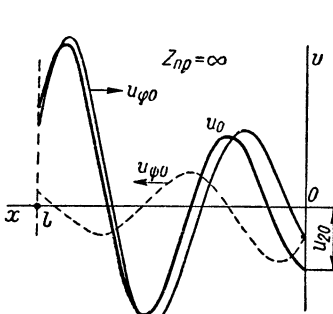


Рис. 16-3.

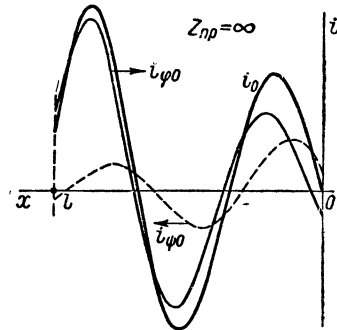


Рис. 16-4.

Таким образом, уравнения для \dot{U} и I получают вид

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + I_2 Z) e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - I_2 Z) e^{-\gamma x}, \\ I &= \frac{1}{Z} \left[\frac{1}{2}(\dot{U}_2 + I_2 Z) e^{\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - I_2 Z) e^{-\gamma x} \right]. \end{aligned}$$

Соответственно эти уравнения, выраженные через гиперболические функции, получают вид

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + I_2 Z \operatorname{sh} \gamma x, \quad I = I_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}}{Z} \operatorname{sh} \gamma x.$$

Рассмотрим режим холостого хода. Условимся все величины в любой точке линии снабжать дополнительно индексом 0. Так как при холостом ходе $Z_{\text{пр}} = \infty$ и $I_2 = 0$, то

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{20} \operatorname{ch} \gamma x, \quad I_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{Z} \operatorname{sh} \gamma x.$$

Сопротивление линии на ее входе в начале линии оказывается равным

$$Z_0 = \dot{U}_{10} : I_{10} = Z : \operatorname{th} \gamma l.$$

На рис. 16-3 и 16-4 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при $Z_{np} = \infty$.

Характер распределения напряжения и тока вдоль линии хорошо иллюстрируется кривыми распределения квадратов их действующих значений. Для квадратов модулей комплексов $\text{ch } \gamma x$ и $\text{sh } \gamma x$ имеем:

$$|\text{ch } \gamma x|^2 = |\text{ch}^2(\alpha x + j\beta x)| = \frac{1}{2} (\text{ch } 2\alpha x + \cos 2\beta x),$$

$$|\text{sh } \gamma x|^2 = |\text{sh}^2(\alpha x + j\beta x)| = \frac{1}{2} (\text{ch } 2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

и, следовательно,

$$U_0^2 = \frac{1}{2} U_{20}^2 (\text{ch } 2\alpha x + \cos 2\beta x), \quad I_0^2 = \frac{U_{20}^2}{2z^2} (\text{ch } 2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

где z — модуль комплекса Z .

Кривые $\text{ch } 2\alpha x$ и $\cos 2\beta x$, а также их сумма, характеризующая распределение U_0^2 , и их разность, характеризующая распределение I_0^2 , приведены на рис. 16-5. Из этих кривых видно, что максимумы и минимумы как U_0 , так и I_0 , чередуются приблизительно через четверть длины волны, причем максимумы U_0 сдвинуты относительно максимумов I_0 также почти на четверть длины волны. Из этих же кривых следует, что в линиях, длина которых не превышает четверти длины волны, при холостом ходе действующее значение тока убывает, а действующее значение напряжения, наоборот, возрастает в направлении от начала линии к ее концу.

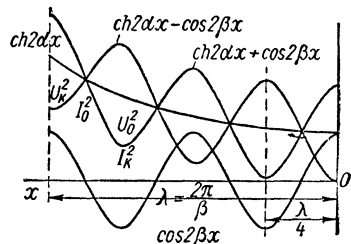


Рис. 16-5.

Рассмотрим режим короткого замыкания. Условимся при этом все величины в любой точке линии снабжать дополнительным индексом «к». Так как при коротком замыкании $Z_{np} = 0$ и $U_2 = 0$, то

$$\dot{U}_k = I_{2k} Z \text{sh } \gamma x, \quad I_k = I_{2k} \text{ch } \gamma x.$$

Спротивление линии на ее входе в начале линии оказывается равным

$$Z_k = \dot{U}_{1k} : I_{1k} = Z \text{th } \gamma l.$$

На рис. 16-6 и 16-7 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при $Z_{np} = 0$.

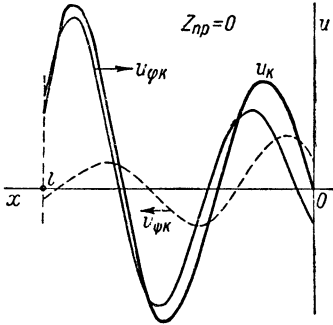


Рис. 16-6.

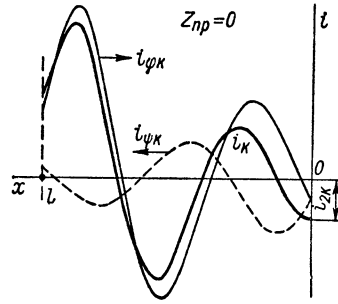


Рис. 16-7.

Для квадратов действующих значений $U_{к}$ и $I_{к}$ аналогично предыдущему найдем:

$$U_{к}^2 = \frac{1}{2} I_{2к}^2 z^2 (\text{ch } 2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

$$I_{к}^2 = \frac{1}{2} I_{2к}^2 (\text{ch } 2\alpha x + \cos 2\beta x).$$

Следовательно, при коротком замыкании распределение $U_{к}^2$ и $I_{к}^2$ вдоль линии характеризуется, соответственно, кривыми $(\text{ch } 2\alpha x - \cos 2\beta x)$ и $(\text{ch } 2\alpha x + \cos 2\beta x)$, приведенными на рис. 16-8.

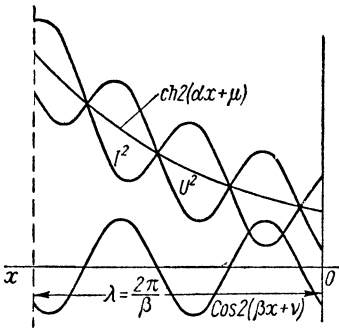


Рис. 16-8.

Заметим, что, определив из опытов холостого хода и короткого замыкания $Z_0 = Z : \text{th } \gamma l$ и $Z_{к} = Z \text{ th } \gamma l$, можно вычислить Z и γl , а именно:

$$Z = \sqrt{Z_0 Z_{к}} \text{ и } \text{th } \gamma l = \sqrt{Z_{к} / Z_0}.$$

Любой рабочий режим линии при замыкании ее на сопротивление Z_{np} может быть получен наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания.

Выражения для \dot{U} и \dot{I} в общем случае можно привести к виду:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \left(\text{ch } \gamma x + \frac{Z}{Z_{np}} \text{sh } \gamma x \right) = \dot{U}_2 \frac{\text{ch } (\gamma x + \sigma)}{\text{ch } \sigma},$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \left(\text{ch } \gamma x + \frac{Z_{np}}{Z} \text{sh } \gamma x \right) = \dot{I}_2 \frac{\text{sh } (\gamma x + \sigma)}{\text{sh } \sigma},$$

если положить $Z : Z_{np} = \text{th } \sigma = \text{th } (\mu + j\nu)$ и, следовательно, U^2 и I^2 пропорциональны соответственно $[\text{ch } 2(\alpha x + \mu) + \cos 2 \times (\beta x + \nu)]$ и $[\text{ch } 2(\alpha x + \mu) - \cos 2(\beta x + \nu)]$, где μ и ν зависят от соотношения между Z_{np} и Z . Поэтому кривые $U^2 = F_1(x)$, $I^2 = F_2(x)$ в этом случае (рис. 16-8) сходны с кривыми при $Z_{np} = \infty$ и $Z_{np} = 0$. Основное отличие состоит в том, что в конце линии и $U_2 \neq 0$ и $I_2 \neq 0$.

16-8. Линии без потерь

В ряде случаев, в особенности при высоких частотах, когда $\omega L \gg r$ и $\omega C \gg g$, можно пренебречь наличием потерь в линии и положить $r = 0$ и $g = 0$. Тогда $\alpha = 0$, $\gamma = j\beta$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $Z = z = \sqrt{L/C}$, и многие соотношения, полученные ранее, упрощаются.

В случае холостого хода линии, когда $Z_{np} = \infty$ и $I_2 = 0$, при счете расстояний от конца линии имеем:

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{20} \text{ch } \gamma x = \dot{U}_{20} \cos \beta x, \quad I_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{z} \text{sh } \gamma x = j \frac{\dot{U}_{20}}{z} \sin \beta x.$$

Из этих выражений видно, что в рассматриваемом случае в результате наложения двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами получаются стоячие волны. Действительно, $\cos \beta x$ при $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$ обращается в ± 1 , а $\sin \beta x$ в нуль, и в соответствующих точках линии мы имеем пучности напряжения и узлы тока. При $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ мы получаем узлы напряжения и пучности тока (рис. 16-9), так как тогда $\cos \beta x$ обращается в нуль, а $\sin \beta x$ — в ± 1 . Для входного сопротивления линии при холостом ходе Z_0 , обозначая длину линии через l , получим:

$$Z_0 = \dot{U}_{10} : I_{10} = -jz \text{ctg } \beta l = jx_l,$$

где x_l — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при $0 < l < \frac{\lambda}{4}$ имеет емкостный характер, при $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ имеет индуктивный характер и т. д. (рис. 16-9). При $l = \frac{\lambda}{4}, l = \frac{3\lambda}{4}, \dots$ входное сопротивление разомкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при $l = \frac{\lambda}{2}, l = \lambda, \dots$ оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

В случае короткого замыкания линии, когда $Z_{np} = 0$ и $U_2 = 0$, имеем:

$$\dot{U}_k = I_{2k} Z \text{sh } \gamma x = j I_{2k} z \sin \beta x, \quad I_k = I_{2k} \text{ch } \gamma x = I_{2k} \cos \beta x,$$

откуда видно, что и в этом случае мы имеем наложение двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами, в результате чего получаются стоячие волны. Все отличие от предыдущего случая состоит в том, что в конце линии будет узел напряжения и

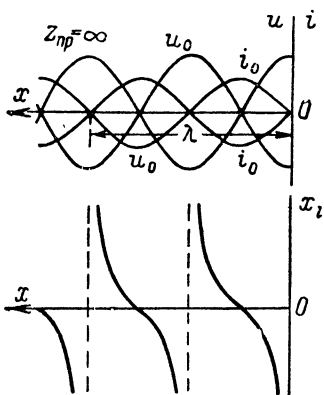


Рис. 16-9.

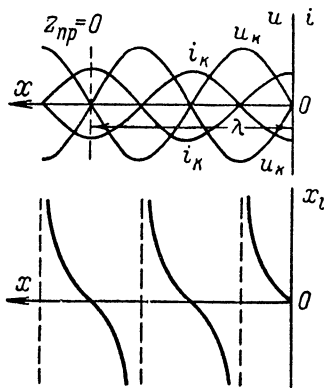


Рис. 16-10.

пучность тока (рис. 16-10). Для входного сопротивления короткозамкнутой линии Z_k имеем:

$$Z_k = \dot{U}_{1к} : \dot{I}_{1к} = jz \operatorname{tg} \beta l = jx_l,$$

где x_l — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при $0 < l < \frac{\lambda}{4}$ имеет индуктивный характер, при $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ имеет емкостный характер и т. д. (рис. 16-10). При $l = \frac{\lambda}{2}$, $l = \lambda, \dots$ входное сопротивление коротко-

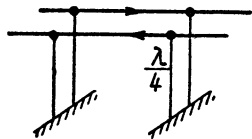


Рис. 16-11.

замкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при $l = \frac{\lambda}{4}$, $l = \frac{3\lambda}{4}, \dots$ оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

При очень высоких частотах короткозамкнутая линия, длина которой равна четверти длины волны, применяется в качестве колебательного контура, имеющего вследствие относительно малых потерь весьма малое затухание. Такая линия практически обладает чрезвычайно большим входным сопротивлением, и это дает возможность использовать ее при малых длинах волн также для изоляции высокочастотных линий (рис. 16-11) вместо изоляторов, применение которых в этих случаях влечет за собою большие потери.

При реактивной нагрузке линии, когда $Z_{нр} = jx_{нр}$, имеем:

$$U = U_2 \left(\cos \beta x + \frac{z}{x_{нр}} \sin \beta x \right) = U_2 \frac{\sin(\beta x + \sigma)}{\sin \sigma},$$

$$I = I_2 \left(\cos \beta x - \frac{x_{нр}}{z} \sin \beta x \right) = I_2 \frac{\cos(\beta x + \sigma)}{\cos \sigma},$$

если положить $\frac{x_{нр}}{z} = \operatorname{tg} \sigma$. Таким образом, и в данном случае получаются стоячие волны, но в конце линии при этом не будет ни пучности, ни узла (рис. 16-12). Для входного сопротивления линии, замкнутой на реактивное сопротивление, имеем:

$$Z_x = \dot{U}_{1x} : I_{1x} = jx_{нр} \frac{\operatorname{tg}(\beta l + \sigma)}{\operatorname{tg} \sigma} =$$

$$= jz \operatorname{tg}(\beta l + \sigma) = jx_l,$$

т. е. зависимость входного сопротивления линии от ее длины имеет такой же характер (рис. 16-12), как и в двух предыдущих случаях, причем для

$l = \frac{\lambda}{4}$ и $l = \frac{\lambda}{2}$ найдем, соответственно, $Z_x = -\frac{z^2}{jx_{нр}}$ и $Z_x = jx_{нр}$. При $x_{нр} = z \operatorname{ctg} \beta l$, когда $\sigma = \pm \frac{\pi}{4} - \beta l$, $Z_x = \pm \infty$, и тогда линия эквивалентна короткозамкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны, а при $x_{нр} = -z \operatorname{tg} \beta l$, когда $\sigma = -\beta l$, $Z_x = 0$, и, следовательно, в этом случае линия эквивалентна разомкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны.

Таким образом, в зависимости от частоты приложенного напряжения, длины линии и окончного сопротивления, линия без потерь, замкнутая на реактивное сопротивление, представляет собою индуктивное или емкостное сопротивление, причем эквивалентная индуктивность или емкость может иметь все значения в пределах от нуля до бесконечности. Возможность осуществить при помощи соответствующим образом подобранной линии индуктивное или емкостное сопротивление той или иной величины имеет важное практическое значение при высоких частотах.

Итак, во всех трех рассмотренных случаях работы линии без потерь в ней получаются стоячие волны. При этом пучности напряжения и тока, а также узлы напряжения и тока сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны. Напряжение и ток в каждой точке линии отличаются по фазе на четверть периода, и

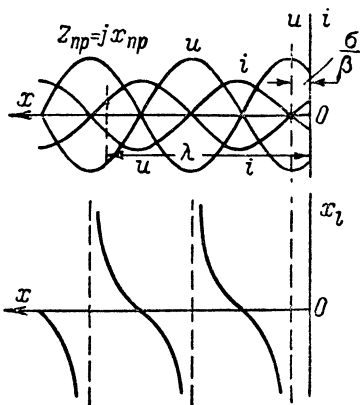


Рис. 16-12.

напряжение достигает максимального значения, когда ток во всей линии равен нулю, а ток достигает максимального значения, когда напряжение во всей линии равно нулю.

Так как в любой момент времени в узлах напряжения $u = 0$, а в узлах тока $i = 0$, то в этих точках линии мощность всегда равна нулю, а энергия через эти точки не передается. Однако на каждом участке линии, ограниченном узлами напряжения и тока, происходит передача энергии вдоль линии, связанная с колебаниями энергии между электрическим и магнитным полями на этом участке.

Все три случая образования стоячих волн в линии, рассмотренные нами, характеризуются отсутствием расхода энергии как в линии, так и в приемнике. При наличии расхода энергии или в линии, или в приемнике, в линии неизбежно должны существовать бегущие волны напряжения и тока, с которыми только и может быть связан процесс передачи энергии вдоль всей линии.

В заключение остановимся вкратце на рассмотрении линии без потерь, имеющей длину, равную четверти длины волны, и замкнутой на активное сопротивление $r_{\text{пр}}$. В этом случае

$$\operatorname{ch} \gamma l = \cos \beta l = \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

а

$$\operatorname{sh} \gamma l = j \sin \beta l = j \sin \frac{\pi}{2} = j,$$

и мы имеем:

$$\dot{U}_1 = j \dot{U}_2 \frac{z}{r_{\text{пр}}}, \quad I_1 = j I_2 \frac{r_{\text{пр}}}{z},$$

т. е. такую линию можно рассматривать как идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации, равным $\frac{z}{r_{\text{пр}}}$. Это весьма важное свойство дает возможность использовать линию, длина которой равна четверти длины волны, для согласования приемника с генератором или одной линии с другой линией. Так как входное сопротивление $Z_{\text{вх}}$ рассматриваемой линии равно:

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 : I_1 = \frac{z^2}{r_{\text{пр}}},$$

то для согласования генератора и приемника, имеющих активные сопротивления $r_{\text{г}}$ и $r_{\text{пр}}$, или двух линий с такими же характеристическими сопротивлениями достаточно включить между ними линию, имеющую длину, равную четверти длины волны, и обладающую характеристическим сопротивлением $z = \sqrt{r_{\text{г}} r_{\text{пр}}}$.



ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

17-1. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами

В предыдущей главе были рассмотрены процессы в линии при установившемся периодическом режиме. Вместе с тем большой интерес представляют непериодические процессы в таких линиях, например, переходные процессы при включении и выключении линии, при воздействии на линии грозových разрядов и т. п. Токи и напряжения в линиях связи, как правило, носят непериодический характер.

Для исследования таких процессов необходимо решить систему уравнений в частных производных, описывающих эти процессы, при заданных граничных и начальных условиях. Это решение может быть выполнено классическим или операторным методом.

17-2. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе классическим методом

Воспользуемся классическим методом для нахождения решения уравнений однородной линии:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

для частного случая неискажающей линии, когда $rC = gL$.

Положим $\frac{r}{L} = \frac{g}{C} = \delta$ и введем вместо u и i новые функции u_1 и i_1 , связанные с u и i соотношениями:

$$u = u_1 e^{-\delta t}, \quad i = i_1 e^{-\delta t}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} e^{-\delta t}, & \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta u_1 e^{-\delta t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{\partial i_1}{\partial x} e^{-\delta t}, & \frac{\partial i}{\partial t} &= \frac{\partial i_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta i_1 e^{-\delta t}.\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения производных в основные уравнения линии и сокращая на $e^{-\delta t}$, приведем их к виду:

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

и, взяв производную от первого по x , а от второго по t , получим:

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L \frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t}, \quad -\frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t} = C \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Отсюда найдем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

и, положив $CL = \frac{1}{v^2}$, придем к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Введем вместо x и t новые переменные, а именно:

$$\xi = x - vt, \quad \eta = x + vt.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -v, & \frac{\partial \eta}{\partial t} &= v, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}, & \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -v \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + v \frac{\partial u_1}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2},\end{aligned}$$

и подставив найденные значения вторых производных в волновое уравнение, найдем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = v(\eta) \text{ и } u_1 = \int v(\eta) d\eta + \varphi(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

если положить $\int v(\eta) d\eta = \psi(\eta)$.

Возвращаясь к переменным x и t , можем написать:

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt),$$

и, следовательно, для напряжения u между проводами линии имеем:

$$u = [\varphi(x - vt) + \psi(x + vt)] e^{-\delta t}.$$

Для нахождения i_1 подставим в уравнение $-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t}$ только что найденное выражение для u_1 . Тогда получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= C \frac{\partial [\varphi(\xi) + \psi(\eta)]}{\partial t} = C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = \\ &= Cv \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] = -\sqrt{\frac{C}{L}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{ и } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

и, проинтегрировав, найдем:

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt) + f(t)].$$

В выражении для i_1 может содержаться функция $f(t)$ только от t , так как $\frac{\partial}{\partial x} f(t) = 0$. Для определения $f(t)$ подставим найденные для u_1 и i_1 значения в уравнение $-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L \frac{\partial i_1}{\partial t}$, и тогда получим $\frac{\partial f(t)}{\partial t} = 0$. Следовательно, $f(t) = A = \text{const}$. Однако можно положить $A = 0$, так как при $A \neq 0$ мы могли бы ввести вместо φ и ψ функции $\varphi_1 = \varphi + \frac{A}{2}$ и $\psi_1 = \psi - \frac{A}{2}$, после чего получились бы выражения для u_1 и i_1 , в которые постоянная A не входит явно. Поэтому можем написать:

$$i_1 = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)],$$

и, следовательно, для тока i в линии получим:

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - vt) - \psi(x + vt)] e^{-\delta t},$$

где $\sqrt{L/C}$ представляет собою, как известно из предыдущего, волновое сопротивление неискажающей линии.

Полученные выражения для напряжения u и тока i можно привести к иному виду, приняв во внимание, что

$$\delta^2 = \frac{r}{L} \frac{g}{C} = \alpha^2 v^2 \text{ и } \delta t = \alpha vt,$$

где $\alpha = \sqrt{rg}$ — коэффициент затухания неискажающей линии (§ 16-6), и что, следовательно,

$$e^{-\delta t} = e^{-\alpha vt} = e^{\alpha(x-vt)} e^{-\alpha x} = e^{-\alpha(x+vt)} e^{\alpha x}.$$

На основании последних равенств выражения для u и i можно представить в виде

$$u = \varphi(x - vt) e^{-\alpha x} + \psi(x + vt) e^{\alpha x},$$

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - vt) e^{-\alpha x} - \psi(x + vt) e^{\alpha x}],$$

причем следует иметь в виду, что функции φ и ψ в этих выражениях отличаются от φ и ψ в предыдущих выражениях для напряжения и тока, соответственно, множителями $e^{\alpha(x-vt)}$ и $e^{-\alpha(x+vt)}$.

Заметим, что мы получили только общий вид решения, определяющий характер функциональной зависимости напряжения и тока от x и t . Конкретный вид функций $\varphi(x - vt)$ и $\psi(x + vt)$ будет определяться конкретными условиями задачи. Некоторые простые примеры будут рассмотрены дальше. Вместе с тем, уже из полученных общих выражений для напряжения и тока можно сделать важные выводы о физическом смысле членов, образующих эти выражения, что и будет сделано в § 17-4.

17-3. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе операторным методом

Покажем также применение операторного метода для получения решения уравнений однородной линии при переходном процессе.

Так как напряжение и ток являются функциями двух переменных t и x , то их операторные изображения будут функциями оператора p и x :

$$u(t, x) \doteq U(p, x) = \int_0^{\infty} u(t, x) e^{-pt} dt,$$

$$i(t, x) \doteq I(p, x) = \int_0^{\infty} i(t, x) e^{-pt} dt.$$

Производная по времени от напряжения изображается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteq pU(p, x) - u(0, x),$$

где $u(0, x)$ есть распределение напряжения вдоль линии при $t = 0$. Производная от напряжения по x будет:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \doteq \frac{d}{dx} U(p, x).$$

Соответственно изображения для производных тока будут:

$$\frac{\partial i}{\partial t} \doteq pI(p, x) - i(0, x), \quad \frac{\partial i}{\partial x} \doteq \frac{d}{dx} I(p, x).$$

Таким образом, уравнения однородной линии

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

в операторной форме принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{dU(p, x)}{dx} &= rI(p, x) + pLI(p, x) - Li(0, x), \\ -\frac{dI(p, x)}{dx} &= gU(p, x) + pCU(p, x) - Cu(0, x). \end{aligned}$$

Существенно заметить, что уравнения для операторных изображений $U(p, x)$ и $I(p, x)$ являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, так как они содержат лишь одну переменную x . В этом отношении мы имеем определенную аналогию с уравнениями линии, записанными в комплексной форме при синусоидальном процессе.

Решая совместно эти уравнения при заданных граничных условиях (при $x = 0$ и $x = l$), мы можем найти операторные изображения $U(p, x)$ и $I(p, x)$, а по ним и оригиналы $u(t, x)$ и $i(t, x)$ напряжения и тока.

При нулевых начальных условиях [$u(0, x) = 0$ и $i(0, x) = 0$] уравнения принимают вид

$$-\frac{dU(p, x)}{dx} = (r + pL) I(p, x), \quad -\frac{dI(p, x)}{dx} = (g + pC) U(p, x).$$

Дифференцируя первое по x и используя второе, находим:

$$\frac{d^2 U(p, x)}{dx^2} = \gamma^2 U(p, x), \quad \text{где } \gamma = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$U(p, x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x},$$

где A_1 и A_2 не зависят от x , но могут быть функциями от p , т. е. $A_1 = F_1(p)$ и $A_2 = F_2(p)$.

Для операторного изображения тока получаем:

$$\begin{aligned} I(p, x) &= -\frac{1}{r+pL} \frac{dU(p, x)}{dx} = \frac{\gamma}{r+pL} [A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}] = \\ &= \sqrt{\frac{g+pC}{r+pL}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z(p)} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}). \end{aligned}$$

Величина $Z(p) = \sqrt{\frac{r+pL}{g+pC}}$ является операторным волновым (характеристическим) сопротивлением линии.

Величина $\gamma = \sqrt{(r+pL)(g+pC)}$ представляет собой операторное выражение коэффициента распространения.

Решение существенно упрощается в случае неискажающей линии, для которой $r/L = g/C$, и, следовательно,

$$Z(p) = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{rg} + p\sqrt{LC} = \alpha + \frac{p}{v}.$$

Таким образом, в этом случае решение для операторных изображений напряжения и тока может быть записано в виде

$$\begin{aligned} U(p, x) &= [F_1(p) e^{-p \frac{x}{v}}] e^{-\alpha x} + [F_2(p) e^{p \frac{x}{v}}] e^{\alpha x}, \\ I(p, x) &= \sqrt{\frac{C}{L}} [F_1(p) e^{-p \frac{x}{v}}] e^{-\alpha x} - \sqrt{\frac{C}{L}} [F_2(p) e^{p \frac{x}{v}}] e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Оригинал функции от p , стоящей при множителе $e^{-\alpha x}$, можно получить, применяя формулу Римана—Меллина (§ 11-5):

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} [F_1(p) e^{-p \frac{x}{v}}] e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(p) e^{-p \frac{1}{v}(x-vt)} dp. \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что $\varphi(t, x)$ является функцией аргумента $x - vt$, так как x и t входят совместно только в такой комбинации, т. е. $\varphi(x, t) = \varphi(x - vt)$. Аналогично для функции от p , стоящей при множителе $e^{\alpha x}$, получаем:

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} [F_2(p) e^{p \frac{x}{v}}] e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(p) e^{p \frac{1}{v}(x+vt)} dp, \end{aligned}$$

т. е.

$$\psi(t, x) = \psi(x + vt).$$

Таким образом, искомое выражение для $u(t, x)$ записывается в виде

$$u(t, x) = \varphi(x - vt) e^{-\alpha x} + \psi(x + vt) e^{\alpha x}.$$

Соответственно, для тока получаем выражение:

$$i(t, x) = \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\varphi(x - vt) e^{-\alpha x} - \psi(x + vt) e^{\alpha x} \right].$$

Полученные выражения полностью совпадают с найденными в предыдущем параграфе классическим методом.

17-4. Волны в неискажающей линии

Рассмотрим только что полученные выражения для напряжения и тока линии. При этом для простоты сначала допустим, что потери в линии пренебрежимо малы, т. е. положим $r = 0$ и $g = 0$. Тогда $\delta = 0$, $\alpha = 0$, $e^{-\delta t} = 1$, а также $e^{-\alpha x} = e^{\alpha x} = 1$, и для линии без потерь получим:

$$u = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt) = u_{\varphi} + u_{\psi},$$

$$i = \left[\varphi(x - vt) : \sqrt{\frac{L}{C}} \right] + \left[\psi(x + vt) : \left(-\sqrt{\frac{L}{C}} \right) \right] = i_{\varphi} + i_{\psi}.$$

Пусть в частном случае $\psi(x + vt) = 0$ и $u = \varphi(x - vt) = u_{\varphi}$. Положив в последнем равенстве $t = 0$, мы найдем распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени. Возьмем некоторую произвольную точку x и предположим, что она перемещается вдоль линии со скоростью v , т. е. что ее положение определяется координатой $x = x_0 + vt$. Тогда напряжение в этой движущейся точке $u_{\varphi} = \varphi(x_0 + vt - vt) = \varphi(x_0)$ не будет зависеть от времени. Так как это заключение справедливо для любой точки, движущейся вдоль линии со скоростью v , то, следовательно, при $u = \varphi(x - vt) = u_{\varphi}$ начальное распределение напряжения u перемещается вдоль линии со скоростью v . Иными словами, функция $u_{\varphi} = \varphi(x - vt)$ определяет прямую волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии со скоростью v , т. е. волну напряжения, бегущую вперед и не претерпевающую изменения формы. Аналогично функция $u_{\psi} = \psi(x + vt)$ определяет обратную волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии также без изменения формы со скоростью $-v$ или, что то же, распространяющуюся со скоростью v в отрицательном направлении счета расстояний, т. е. бегущую назад.

Таким образом, при отсутствии потерь в линии напряжения, а также и ток в ней могут быть представлены как суммы двух волн

распространяющихся вдоль линии без изменения формы со скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ в противоположных направлениях. При этом в любой точке линии отношение напряжения и тока для прямой волны равно $\sqrt{L/C}$, т. е. волновому сопротивлению линии, зависящему только от параметров линии, а для обратной волны это отношение равно $(-\sqrt{L/C})$. При рассмотрении установившихся процессов уже указывалось, что скорость распространения волн в неискажающей однородной линии $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ для воздушных линий равна скорости света в воздухе.

Наличие в выражениях для u и i множителя $e^{-\delta t}$ или, соответственно, в другом их выражении множителей $e^{-\alpha x}$ и $e^{\alpha x}$, причем $\alpha = \sqrt{rg}$, показывает, что обе волны, по мере продвижения их вдоль линии, затухают по показательному закону. Причиной затухания волн является постепенное превращение начального запаса энергии электрического и магнитного полей, связанных с линией, в тепло, выделяющееся в проводниках, так как $r \neq 0$, а также и в среде, окружающей провода, так как $g \neq 0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что волны при движении их вдоль линии не затухают. Затухание волн вследствие потерь в линии при необходимости может быть учтено, по крайней мере, для неискажающей линии, так как нами установлено, что в этом случае волны затухают по показательному закону с показателем $\alpha x = \sqrt{rg} x$.

При наличии только одних прямых или только одних обратных волн для энергии магнитного и электрического полей на элементе линии dx , приняв во внимание, что $u^2/i^2 = L/C$, найдем:

$$dW_m = \frac{1}{2} i^2 L dx = \frac{1}{2} u^2 C dx = dW_e.$$

Отсюда следует, что в каждом из этих случаев энергии магнитного и электрического полей на элементе длины линии, а следовательно, и во всей линии, равны друг другу, и для суммы этих полей на элементе линии получим:

$$dW = dW_m + dW_e = i^2 L dx = u^2 C dx = ui \sqrt{LC} dx.$$

Для соответствующей мощности найдем:

$$p = ui = i^2 \sqrt{\frac{L}{C}} = u^2 : \sqrt{\frac{L}{C}},$$

откуда следует, что при данном значении напряжения эта мощность тем больше, чем меньше волновое сопротивление линии.

17-5. О происхождении и характере волн в линиях

Возникновение волн в линиях обычно связано или с атмосферными разрядами, или с переключениями, т. е. с включением и выключением или самих линий, или устройств, связанных с ними.

Пусть в линии на некотором ее протяжении индуктирован заряд вследствие нахождения над этой частью линии заряженного облака. Если облако, индуктировавшее заряд, разрядится, то этот заряд освободится, и тогда напряжение вдоль линии будет распределено пропорционально заряду, приходящемуся на каждый элемент длины линии. В результате освобождения индуктированного

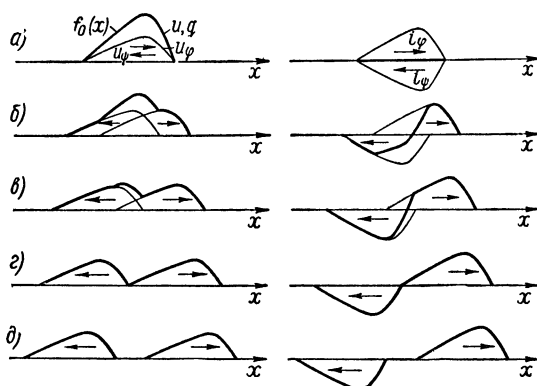


Рис. 17-1.

заряда вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока. Пусть распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени задано функцией $f_0(x)$ (рис. 17-1). Волновое сопротивление линии, являющееся в нашем случае вещественным числом, равным $\sqrt{L/C}$, обозначим через z . Тогда, приняв во внимание, что ток в начальный момент времени равен нулю, имеем:

$$u_0 = u_{\varphi 0} + u_{\psi 0} = f_0(x),$$

$$i_0 = i_{\varphi 0} + i_{\psi 0} = (u_{\varphi 0} - u_{\psi 0}) : z = 0$$

и, следовательно,

$$u_{\varphi 0} = u_{\psi 0} = \frac{1}{2} f_0(x).$$

Таким образом, в начальный момент времени напряжение представляет собою сумму двух равных волн, одинаковых по форме и имеющих один и тот же знак, а ток — сумму двух волн, одинаковых по форме, но имеющих противоположные знаки.

С момента освобождения индуктированного заряда эти волны напряжения, а также и волны тока распространяются по линии в противоположных направлениях, причем скорости всех этих волн по абсолютной величине равны между собою. На рис. 17-1 представлено движение волн напряжения и тока в первые моменты времени после освобождения индуктированного заряда в предположении, что они не затухают.

При изучении явлений, связанных с переключениями, в тех случаях, когда длина линии мала по сравнению с длиной волны, мы будем предполагать, что внешние э. д. с. постоянны. Это предположение допустимо, так как рассматриваемые явления протекают настолько быстро, что в случае синусоидальной э. д. с., имеющей частоту порядка десятков герц, величина этой э. д. с. за время пробега волны вдоль всей линии может измениться лишь весьма незначительно. Кроме того, мы будем считать, что процессы переключения осуществляются мгновенно. В соответствии с этими предположениями в дальнейшем мы примем, что волны напряжения и тока, идущие от источника внешней э. д. с., имеют прямоугольную форму.

17-6. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий

Пусть волна φ_1 , бегущая от источника э. д. с. по однородной линии, имеющей волновое сопротивление z_1 , достигла конца этой линии, в котором последняя соединена с другой однородной линией, имеющей волновое сопротивление z_2 . Обозначив напряжение и ток в первой линии через u_1 и i_1 , а во второй — через u_2 и i_2 , в месте сопряжения обеих линий имеем $u_1 = u_2$ и $i_1 = i_2$. Предположим, что во второй линии до прихода волны из первой линии напряжения не было. Тогда непосредственно после прихода волны к месту сопряжения линий во второй линии может возникнуть лишь волна φ_2 , бегущая в том же направлении, что и волна φ_1 , и называемая преломленной волной, в то время как в первой линии, кроме волны φ_1 , называемой падающей волной, при $z_2 \neq z_1$ обязательно возникнет волна ψ_1 , бегущая в обратном направлении и называемая отраженной волной, так как иначе не могут быть удовлетворены условия равенства напряжений или токов в месте сопряжения линий. Поэтому, отмечая индексами φ_1 , ψ_1 и φ_2 , соответственно, падающие, отраженные и преломленные волны, в месте сопряжения линий имеем:

$$u_1 = u_{\varphi_1} + u_{\psi_1} = u_{\varphi_2} = u_2,$$

$$i_1 = (u_{\varphi_1} - u_{\psi_1}) : z_1 = u_{\varphi_2} : z_2 = i_2,$$

откуда

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} u_{\varphi 1}, \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} u_{\varphi 1};$$

$$i_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} i_{\varphi 1}, \quad i_{\psi 1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} i_{\varphi 1}.$$

Из этих отношений следует, что в данном случае преломленные и отраженные волны имеют ту же форму, что и падающие волны. Отношения $(u_{\varphi 2} : u_{\varphi 1})$ и $(i_{\varphi 2} : i_{\varphi 1})$ можно рассматривать как коэффициенты преломления, а отношения $(u_{\psi 1} : u_{\varphi 1}) = q_u$ и $(i_{\psi 1} : i_{\varphi 1}) = q_i$ — как коэффициенты отражения.

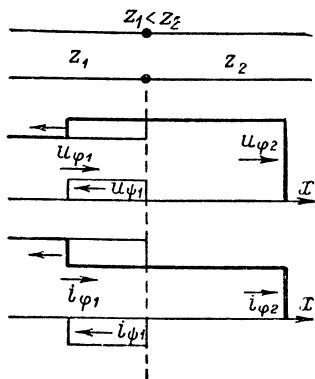


Рис. 17-2.

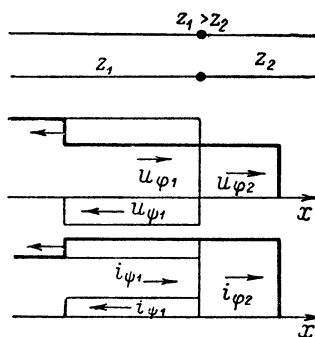


Рис. 17-3.

Из выражений, полученных для преломленных и отраженных волн, следует, что преломленные волны напряжения и тока имеют тот же знак, что и падающие, а из отраженных волн одна сохраняет знак падающей волны, а другая имеет обратный знак.

При $z_2 > z_1$, что, например, имеет место при переходе волны из кабельной линии в воздушную, преломленная волна напряжения больше падающей, а преломленная волна тока меньше падающей. Что касается отраженных волн, то волна напряжения отражается без перемены знака, а волна тока — с переменной знака, причем по абсолютной величине обе эти волны меньше соответствующих падающих волн. При этом вследствие наложения отраженных волн на падающие ток в первой линии уменьшается, а напряжение возрастает, но не более чем в два раза. На рис. 17-2 показаны падающие, преломленные и отраженные волны при $z_2 > z_1$. Заметим, что даже при очень больших значениях z_2 преломленная волна напряжения не может превысить падающую волну более чем в два раза.

При $z_2 < z_1$ преломленная волна напряжения меньше падающей, а преломленная волна тока больше падающей. В этом случае при отражении знак изменяется для волны напряжения, а абсолютные величины обеих отраженных волн опять будут меньше, чем величины соответствующих падающих волн. Вследствие наложения отраженных волн на волны падающие напряжение в первой линии уменьшится, а ток возрастет, но не более чем в два раза (рис. 17-3). Заметим, что даже при очень малых значениях z_2 преломленная волна тока не может превысить падающую волну более чем в два раза.

Рассматривая мощность p в месте сопряжения линий, имеем:

$$p = u_1 i_1 = u_2 i_2$$

или

$$(u_{\varphi 1} + u_{\psi 1}) \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1} - \frac{u_{\psi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}^2}{z_2},$$

и, следовательно,

$$\frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\psi 1}^2}{z_1} + \frac{u_{\varphi 2}^2}{z_2}$$

или

$$p_{\varphi 1} = p_{\psi 1} + p_{\varphi 2},$$

где $p_{\varphi 1}$, $p_{\psi 1}$, $p_{\varphi 2}$ — мощности падающих, отраженных и преломленных волн. Отсюда следует, что часть мощности падающих волн, равная мощности преломленных волн, переходит во вторую линию, а остальная часть, равная мощности отраженных волн, возвращается обратно в первую линию.

Из изложенного следует, что при переходе волны напряжения из линии с меньшим волновым сопротивлением в линию с большим волновым сопротивлением напряжение увеличивается и в пределе может удвоиться. Поэтому напряжение возрастает при переходе волны из кабельной линии в воздушную и из линий передачи в обмотки трансформаторов, которые представляют собою цепи, обладающие значительным волновым сопротивлением, превосходящим волновое сопротивление воздушных линий.

Волны, возникающие в линиях, распространяются с конечной скоростью и могут поэтому вызывать значительные перенапряжения между соседними точками цепи, в одну из которых волна напряжения уже пришла. Эти перенапряжения тем больше, чем круче фронт волны, и наиболее значительны при отвесном фронте волны. В связи с этим первые витки обмоток трансформаторов в соответствующих случаях выполняют со значительно усиленной изоляцией.

17-7. Отражение волн от конца линии

Пусть бегущие волны напряжения и тока достигли конца однородной линии, имеющей волновое сопротивление z и замкнутой на сколь угодно сложную цепь с сосредоточенными параметрами. В результате отражения падающих волн u_φ от конца линии возникнут отраженные волны u_ψ , и для напряжения u и тока i в конце линии, или, иными словами, для напряжения на зажимах оконечной цепи и тока в ней, мы получим:

$$u = u_\varphi + u_\psi, \quad i = i_\varphi + i_\psi = (u_\varphi - u_\psi) : z, \quad zi = u_\varphi - u_\psi,$$

откуда

$$2u_\varphi = zi + u.$$

Из этой простой зависимости следует, что ток i можно найти как ток, возникающий в эквивалентной схеме, включаемой под напряжение $2u_\varphi$ и состоящей из активного сопротивления, равного волновому сопротивлению z линии, и последовательно соединенной с ним оконечной цепи.

Определив ток i по заданным u_φ , z и параметрам оконечной цепи, мы можем найти отраженные волны напряжения и тока из соотношений:

$$u_\psi = u_\varphi - zi, \quad i_\psi = -\frac{u_\psi}{z}.$$

Рассмотрим, пользуясь этим способом, отражение волн от простейших оконечных цепей в предположении, что э. д. с. источника падающих волн постоянна.

Пусть однородная линия с волновым сопротивлением z замкнута на сопротивление r_0 . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений z и r_0 , и мы имеем:

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0}, \quad u_\psi = u_\varphi - zi = \frac{r_0 - z}{r_0 + z} u_\varphi, \\ i_\psi = -\frac{u_\psi}{z} = \frac{z - r_0}{z + r_0} i_\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы получили такие же соотношения между отраженными и падающими волнами, как и в случае отражения волн в месте сопряжения двух линий, с той лишь разницей, что вместо волнового сопротивления второй линии вошло сопротивление r_0 , на которое замкнута линия.

При этом для мощности $p = ui$ в конце линии имеем:

$$p = ui = (u_\varphi + u_\psi) \frac{u_\varphi - u_\psi}{z} = \frac{u_\varphi^2}{z} - \frac{u_\psi^2}{z} = p_\varphi - p_\psi,$$

т. е. эта мощность, поглощаемая приемником, равна разности мощностей падающих и отраженных волн. Если сопротивление r_0 равно волновому сопротивлению линии z , то отраженных волн не возникает, и вся мощность падающих волн поглощается приемником.

Из полученных выражений можно установить соотношение между падающими и отраженными волнами в случае отражения волн от конца разомкнутой или короткозамкнутой линии. При разомкнутой линии, полагая $r_0 = \infty$, в конце линии имеем:

$$u_\psi = u_\varphi, \quad i_\psi = -i_\varphi,$$

а при короткозамкнутой линии, полагая $r_0 = 0$, в конце линии получим:

$$u_\psi = -u_\varphi, \quad i_\psi = i_\varphi,$$

т. е. в этих случаях отраженные волны имеют ту же величину, что и падающие, причем при разомкнутой линии с переменной знака

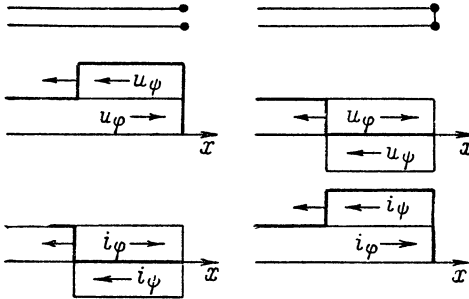


Рис. 17-4.

отражается волна тока, а при короткозамкнутой линии с переменной знака отражается волна напряжения (рис. 17-4). Таким образом, в результате наложения отраженных волн на падающие в разомкнутой линии напряжение на ее конце возрастает в два раза, а в короткозамкнутой линии ток в ее конце возрастает также в два раза, что можно получить из исследования отражения волн в месте сопряжения двух линий, полагая, соответственно, или $z_2 = \infty$, или $z_2 = 0$.

Это можно пояснить следующим образом. И при холостом ходе и при коротком замыкании падающие волны с присущей им энергией полностью отражаются от конца линии, так как в конце линии энергия не потребляется. Поэтому в той части линии, до которой дошли отраженные волны, энергия в два раза больше энергии падающих волн и, следовательно, в четыре раза больше энергии магнитного поля падающей волны тока, а также в четыре раза больше энергии электрического поля падающей волны напряжения, так как эти энергии равны друг другу.

При холостом ходе линии ток в ее конце должен равняться нулю. Поэтому, когда падающая волна тока придет к концу линии, то возникнет равная ей по величине и противоположная по знаку отраженная волна тока, и ток в конце линии упадет до нуля, а энергия магнитных полей, связанных с падающей и отраженной волнами

тока, перейдет в энергию электрического поля. Увеличение в конце линии энергии электрического поля в четыре раза повлечет за собой возрастание напряжения в конце линии в два раза. Это повышение напряжения, связанное с переходом энергии магнитного поля в энергию электрического поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

При коротком замыкании линии напряжение в ее конце должно равняться нулю. Поэтому, когда падающая волна напряжения придет к концу линии, то возникнет равная ей по величине и противоположная по знаку отраженная волна напряжения, и напряжение в конце линии упадет до нуля, а энергия электрических полей, связанных с падающей и отраженной волнами напряжения, перейдет в энергию магнитного поля. Увеличение в конце линии энергии магнитного поля в четыре раза повлечет за собой возрастание тока в конце линии в два раза. Такое возрастание тока, связанное с переходом энергии электрического поля в энергию магнитного поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

Рассмотрим отражение волн в случае, когда конец однородной линии замкнут на цепь (r_0, L_0) . Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений $(z + r_0)$ и индуктивности L_0 , и при $u_\varphi = \text{const}$ для тока i мы получим (§ 9-4):

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right],$$

где $\tau = \frac{L_0}{z + r_0}$, и для u_ψ и i_ψ найдем:

$$u_\psi = \left[\frac{r_0 - z}{r_0 + z} + \frac{2z}{r_0 + z} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_\varphi, \quad i_\psi = \left[\frac{z - r_0}{z + r_0} - \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_\varphi.$$

Из этих выражений, положив $t = 0$, нетрудно усмотреть, что в первый момент отражение от цепи (r_0, L_0) происходит так же, как и от разомкнутого конца линии. Полагая $t = \infty$, мы видим, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для линии, замкнутой на сопротивление r_0 . На рис. 17-5 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда мы имеем:

$$u_\psi = \left[-1 + 2e^{-\frac{z}{L_0} t} \right] u_\varphi, \quad i_\psi = \left[1 - 2e^{-\frac{z}{L_0} t} \right] i_\varphi.$$

Рассмотрим случай, когда волны отражаются от конца линии, замкнутой на цепь (r_0, C_0) . Тогда эквивалентная схема состоит из

последовательно соединенных сопротивления $(z + r_0)$ и конденсатора емкостью C_0 , и при $u_\varphi = \text{const}$ для тока i мы имеем (§ 9-5):

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = (z + r_0) C_0$, и для u_ψ и i_ψ найдем:

$$u_\psi = \left[1 - \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_\varphi, \quad i_\psi = \left[-1 + \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_\varphi.$$

Из этих выражений, положив $t = 0$, видим, что в первый момент времени отражение от цепи (r_0, C_0) происходит так же, как в линии,

замкнутой на сопротивление r_0 . Полагая $t = \infty$, нетрудно убедиться, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для случая разомкнутой линии. На рис. 17-5 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда мы имеем:

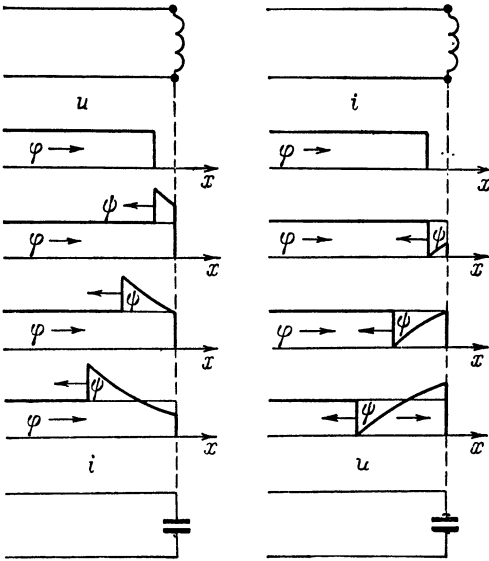


Рис. 17-5.

$$u_\psi = \left[1 - 2e^{-\frac{t}{zC_0}} \right] u_\varphi,$$

$$i_\psi = \left[-1 + 2e^{-\frac{t}{zC_0}} \right] i_\varphi.$$

Так как до прихода отраженных волн к началу любой однородной линии напряжение на ее входных зажимах равно произведе-

нию из тока в начале линии на ее волновое сопротивление, то изложенный способ определения отраженных волн пригоден и в тех случаях, когда к оконечной цепи с сосредоточенными параметрами присоединены те или иные однородные линии. При этом, составляя соответствующую эквивалентную схему, каждую из линий, непосредственно присоединенных к оконечной цепи, следует заменить активным сопротивлением, равным ее волновому сопротивлению, независимо от того, что находится в конце этой линии. Необходимо,

однако, иметь в виду, что составленная таким образом эквивалентная схема дает возможность производить расчеты лишь до момента прихода отраженных волн к началу хотя бы одной из линий, учтенных в этой схеме.

17-8. Процесс включения однородной линии

Рассмотрим процесс включения под синусоидальное напряжение однородной линии в предположении, что длина линии мала по сравнению с длиной волны. Тогда, как было указано выше, можно пренебречь затуханием волн в начальной стадии процесса включения, а также ограничиться рассмотрением включения линии под действие постоянного напряжения, равного мгновенному значению напряжения в начале линии в момент включения. Пусть, кроме того, внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало, иными словами, мощность генератора весьма велика. При этом предположении волны напряжения и тока будут отражаться от генератора так, как они отражаются от короткозамкнутого конца линии.

Рассмотрим случай, когда включаемая линия разомкнута на приемном конце, и предположим, что до момента включения напряжение и ток по всей длине линии равны нулю. После включения от генератора вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока, и когда они дойдут до конца линии, напряжение вдоль линии будет равно напряжению генератора, а ток — напряжению генератора, деленному на волновое сопротивление линии. Дойдя до разомкнутого конца линии, эти волны отразятся, причем волна напряжения не изменит знака, а волна тока изменит знак. При движении к генератору отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, повышает напряжение в линии до удвоенного напряжения генератора, а отраженная волна тока уменьшает ток в линии до нуля. В тот момент, когда эти волны дойдут до генератора, ток по всей длине линии будет равен нулю и вся линия будет заряжена до напряжения, равного удвоенному напряжению генератора.

Волны, отразившиеся от разомкнутого конца, у генератора претерпят новое отражение, при котором волна напряжения изменит знак, а волна тока сохранит знак, так что получится отрицательная волна напряжения и отрицательная волна тока, идущие от генератора к концу линии. Отрицательная волна напряжения при движении к концу линии понижает напряжение в линии до напряжения, равного напряжению генератора, и одновременно в линии возникает ток, противоположный по направлению первоначальному току. Дойдя до конца линии, отрицательные волны напряжения и тока претерпят третье отражение, в результате к генератору

пойдет отрицательная волна напряжения, снижающая напряжение в линии до нуля, и положительная волна тока, уменьшающая ток в линии до нуля. Когда эти волны дойдут до генератора, линия будет полностью разряжена и напряжение и ток по всей длине линии будут равны нулю. Этим и завершится полный цикл процессов, который при сделанных нами предположениях будет периодически повторяться. Отдельные характерные фазы рассмотренного цикла процессов

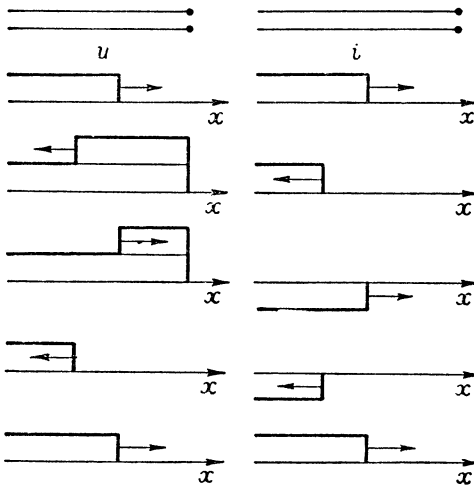


Рис. 17-6.

из катушки с индуктивностью Ll и конденсатора емкостью $C\bar{l}$ был бы:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{Ll \cdot C\bar{l}} = 2\pi l\sqrt{LC},$$

т. е. в $\pi/2$ раза больше, чем T .

Наличие потерь в линии ведет к тому, что волны напряжения и тока постепенно затухают, а величины напряжения и тока приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установленном режиме холостого хода.

В случае включения линии, конец которой замкнут накоротко, волна напряжения, распространяющаяся от генератора, отражается от конца линии с переменной знака, а волна тока — без перемены знака. Отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, понижает напряжение в линии до нуля, а в результате наложения отраженной волны тока ток в линии удваивается. Когда отраженные волны дойдут до генератора, то напряжение во всей линии будет равно нулю, а ток — удвоенному первоначальному.

представлены на рис. 17-6.

Полный цикл процесса движения и отражения волн в рассмотренном случае совершается в промежуток времени

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC},$$

где l — длина линии, а v — скорость распространения волн в ней. Этот промежуток времени T называют периодом собственных колебаний линии. Если бы индуктивность и емкость линии были сосредоточены, то период T_0 собственных колебаний такого контура

ному току. Так как при всех последующих отражениях и от генератора и от короткозамкнутого конца линии волна напряжения отражается с переменной знака, то напряжение в линии изменяется между нулем и напряжением генератора. Отражение волны тока и от генератора и от короткозамкнутого конца линии каждый раз происходит без перемены знака. Поэтому ток в линии после каждого отражения возрастает на величину первоначального тока (рис. 17-7).

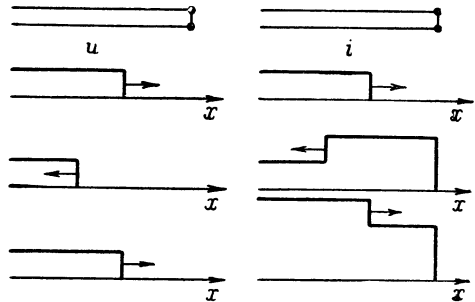


Рис. 17-7.

Наличие потерь в линии вызывает затухание волн и ограничивает нарастание тока. По мере затухания волн напряжение и ток приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме короткого замыкания.

Если длина линии сравнима с длиной волны, то за время каждого пробега волны вдоль линии напряжение на зажимах генератора в начале линии успевает заметно измениться. При рассмотрении процессов в линии это изменение должно быть принято во внимание.

17-9. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включена последовательно реактивная катушка с индуктивностью L_0 . Тогда, пренебрегая емкостью между витками обмотки катушки, в месте сопряжения линий имеем:

$$i_1 = i_2, \quad u_1 = L_0 \frac{di_2}{dt} + u_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать:

$$\frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}, \quad u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = \frac{L_0}{z_2} \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + u_{\varphi 2},$$

откуда

$$2u_{\varphi 1} = \frac{L_0}{z_2} \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\varphi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны имеем $u_{\varphi_1} = \text{const}$, и, следовательно,

$$u_{\varphi_2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi_1}, \quad i_{\varphi_2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi_1},$$

где $\tau = L_0 : (z_1 + z_2)$, и тогда для u_{ψ_1} и i_{ψ_1} найдем:

$$u_{\psi_1} = \left[\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} + \frac{2z_1}{z_2 + z_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi_1},$$

$$i_{\psi_1} = \left[\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} - \frac{2z_1}{z_1 + z_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi_1}.$$

Из полученных выражений видно, что в рассматриваемом случае преломленные волны u_{φ_2} и i_{φ_2} нарастают постепенно от значе-

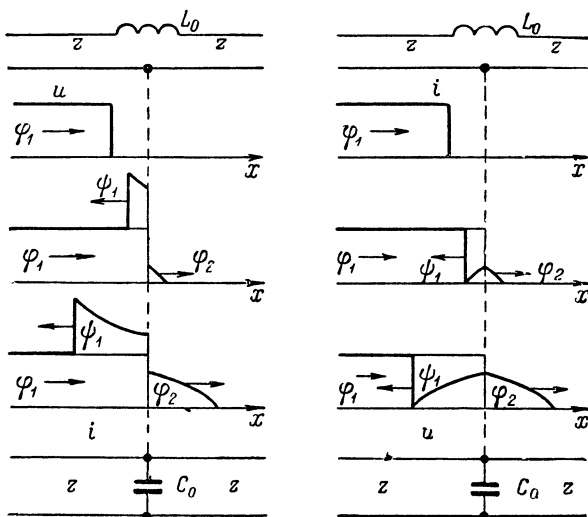


Рис. 17-8.

ний, равных нулю при $t = 0$, до значений, которые мы имели в случае отсутствия реактивной катушки. Что же касается отраженных волн u_{ψ_1} и i_{ψ_1} , то в первый момент они имеют такие же значения, как при отражении от разомкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии катушки.

Таким образом, в результате включения реактивной катушки фронт преломленных волн приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Быстрота нарастания напряжения

и тока во второй линии тем меньше, чем больше постоянная времени $\tau = L_0 : (z_1 + z_2)$, т. е. тем меньше, чем больше индуктивность катушки. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию магнитного поля, связанного с реактивной катушкой. Применяя реактивные катушки для сглаживания фронта преломленных волн, следует иметь в виду, что в результате наложения отраженной волны на падающую волну напряжение в первой линии в первые моменты времени удваивается.

На рис. 17-8 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $z_1 = z_2$, когда мы имеем:

$$\begin{aligned} u_{\varphi_2} &= [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] u_{\varphi_1}, & i_{\varphi_2} &= [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] i_{\varphi_1}, \\ u_{\psi_1} &= e^{-\frac{t}{\tau}} u_{\varphi_1}, & i_{\psi_1} &= -e^{-\frac{t}{\tau}} i_{\varphi_1}, \end{aligned}$$

где $\tau = L_0 : 2z_1 = L_0 : 2z_2$.

Пусть в месте сопряжения линий включено ответвление, содержащее конденсатор, емкость которого равна C_0 . Тогда в месте сопряжения линий имеем:

$$u_1 = u_2, \quad i_1 = C_0 \frac{du_2}{dt} + i_2,$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать:

$$u_{\varphi_1} + u_{\psi_1} = u_{\varphi_2}, \quad \frac{u_{\varphi_1} - u_{\psi_1}}{z_1} = C_0 \frac{du_{\varphi_2}}{dt} + \frac{u_{\varphi_2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$2u_{\varphi_1} = z_1 C_0 \frac{du_{\varphi_2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\varphi_2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны $u_{\varphi_1} = \text{const}$, и мы получим:

$$u_{\varphi_2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi_1}, \quad i_{\varphi_2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi_1},$$

где $\tau = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, и тогда для u_{ψ_1} и i_{ψ_1} найдем:

$$u_{\psi_1} = \left[\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} - \frac{2z_2}{z_2 + z_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u_{\varphi_1}, \quad i_{\psi_1} = \left[\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} + \frac{2z_2}{z_1 + z_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] i_{\varphi_1}.$$

Выражения, полученные для u_{φ_2} и i_{φ_2} , аналогичны выражениям, полученным в предыдущем случае, и в соответствии с этим преломленные волны нарастают постепенно от нуля до тех значений, которые они имеют при отсутствии ответвления. При этом быстрота нарастания их, определяемая постоянной времени $\tau = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, тем меньше, чем больше емкость конденсатора C_0 . Что касается отраженных волн u_{ψ_1} и i_{ψ_1} , то в первый момент времени они имеют такие же значения, как при отражении от короткозамкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии ответвления.

Таким образом, в результате наличия емкостного ответвления фронт преломленных волн, как и в предыдущем случае, приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию электрического поля конденсатора.

При применении емкостного ответвления для сглаживания фронта преломленных волн отраженная волна напряжения в первый момент времени равна по величине и противоположна по знаку падающей волне, и напряжение в первой линии в момент прихода волны к месту сопряжения линий падает до нуля, а затем постепенно нарастает. На рис. 17-8 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $z_1 = z_2$, когда мы имеем:

$$\begin{aligned} u_{\varphi_2} &= [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] u_{\varphi_1}, & i_{\varphi_2} &= [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] i_{\varphi_1}, \\ u_{\psi_1} &= -e^{-\frac{t}{\tau}} u_{\varphi_1}, & i_{\psi_1} &= e^{-\frac{t}{\tau}} i_{\varphi_1}, \end{aligned}$$

где $\tau = \frac{z_1 C_0}{2} = \frac{z_2 C_0}{2}$.

17-10. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включено последовательно с ними активное сопротивление r_0 . Тогда в месте сопряжения линий имеем:

$$i_1 = i_2, \quad u_1 = r_0 i_2 + u_2$$

и в случае перехода волны u_{φ_1} из первой линии во вторую можем написать:

$$\frac{u_{\varphi_1} - u_{\psi_1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi_2}}{z_2}, \quad u_{\varphi_1} + u_{\psi_1} = \frac{r_0}{z_2} u_{\varphi_2} + u_{\varphi_2}.$$

Следовательно,

$$u_{\varphi_2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\varphi_1}, \quad u_{\psi_1} = \frac{z_2 - z_1 + r_0}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\varphi_1}.$$

Из этих выражений видно, что наличие сопротивления r_0 уменьшает преломленную волну напряжения и что даже при большом значении z_2 , увеличивая r_0 , ее можно довести до сколь угодно малой величины. Отраженная волна u_{ψ_1} , при $z_2 > z_1$, с увеличением r_0 возрастает, но не может превзойти величину u_{φ_1} .

Мощность, выделяющаяся в сопротивлении r_0 , равна $p = r_0 i_0^2 = \frac{r_0}{z_2^2} u_{\varphi_2}^2$, в то время как мощность падающей волны $p_{\varphi_1} = \frac{u_{\varphi_1}^2}{z_1}$.

Для отношения этих мощностей имеем:

$$\frac{p}{p_{\varphi_1}} = \frac{r_0 z_1 u_{\varphi_2}^2}{z_2^2 u_{\varphi_1}^2} = \frac{4r_0 z_1}{(z_2 + z_1 + r_0)^2},$$

причем при $r_0 = z_2 + z_1$ это отношение достигает максимума, равного $\frac{z_1}{z_1 + z_2}$. Таким образом, значительная часть мощности падающей волны может быть поглощена сопротивлением r_0 лишь при $z_1 \gg z_2$, т. е. когда преломленная волна напряжения мала по сравнению с падающей. Однако при любом соотношении между

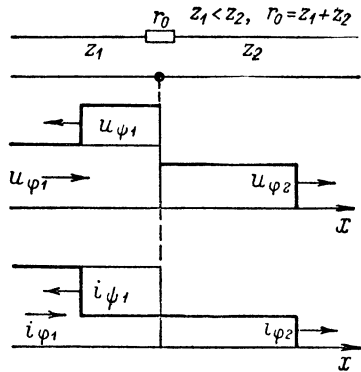


Рис. 17-9.

z_1 и z_2 , взяв $r_0 = z_1 + z_2$, мы получим $u_{\varphi_2} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi_1}$, и тогда преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии сопротивления r_0 (рис. 17-9).

Для того чтобы перенапряжения, возникшие на одном участке линии, не распространялись по всей ее длине, между отдельными участками линии включают активные сопротивления, уменьшающие, как мы только что видели, величину волн напряжения при их прохождении из одного участка в другой. Так как для эффективного действия эти сопротивления должны иметь величину порядка 500—600 ом, то параллельно с ними включают реактивные катушки, имеющие незначительное сопротивление для тока нормальной частоты, но оказывающие в первые моменты значительное сопротивление волнам.

Пусть теперь в месте сопряжения линий включено ответвление, имеющее только активное сопротивление r_0 . Тогда в этом месте

$$u_1 = u_2, \quad i_1 = \frac{u_2}{r_0} + i_2,$$

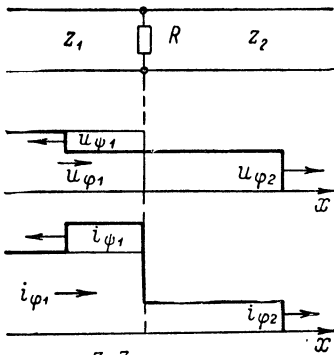
и в случае перехода волны $u_{\varphi 1}$ из первой линии во вторую можем написать:

$$u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2}, \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{r_0} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2};$$

следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_1}{r_0}} u_{\varphi 1}, \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1 - \frac{z_2 z_1}{r_0}}{z_2 + z_1 + \frac{z_2 z_1}{r_0}} u_{\varphi 1}.$$

Из этих выражений вытекает, что наличие активного ответвления уменьшает преломленную волну напряжения, причем, уменьшая r_0 , ее можно довести до сколь угодно малой величины. Отраженная волна $u_{\psi 1}$, с уменьшением r_0 возрастает по абсолютной величине, но не может превзойти величину $u_{\varphi 1}$.



$$r_0 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}, \quad z_1 < z_2$$

Рис. 17-10.

Мощность, выделяемая в ответвлении, равна $p = \frac{u_{\varphi 2}^2}{r_0}$, в то время как

мощность падающей волны $p_{\varphi 1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1}$.

Для отношения этих мощностей имеем:

$$\frac{p}{p_{\varphi 1}} = \frac{z_1 u_{\varphi 2}^2}{r_0 u_{\varphi 1}^2} = \frac{4z_1 z_2^2}{r_0 (z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{r_0})^2},$$

причем при $r_0 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$ это отношение достигает максимума, равного $\frac{z_2}{z_1 + z_2}$. Таким образом, в рассматриваемом случае при $z_1 \ll z_2$, когда преломленная волна напряжения значительно превосходит падающую, большая часть мощности последней поглощается в активном ответвлении. При этом, взяв $r_0 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$, мы получим $u_{\varphi 2} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi 1}$, и тогда при любом соотношении между z_1 и z_2 преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии ответвления (рис. 17-10).

Во избежание прохождения через ответвление сколь-нибудь значительного тока при нормальной работе линии последовательно с сопротивлением r_0 включают конденсатор, не оказывающий существенного сопротивления прохождению через него волн, но имеющий достаточно большое сопротивление для тока нормальной частоты.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная международная система единиц СИ 21
Активная мощность 170
— цепь 117
— проводимость 169
— проводимость эквивалентная 178
Активное напряжение 179
— сопротивление 165
— — эквивалентное 178
Активный ток 179
— четырехполюсник 408
— двухполюсник 140
Амплитуда комплексная 187
— тока, э. д. с. и напряжения 165
Амплитудно-частотная характеристика 367
Апериодический разряд конденсатора 322
Антипараллельное соединение 436
- Бегущие волны 477
Биеение колебаний 299, 331
Боковые частоты 301
Блок направленного действия 434
— системы 434
- Векторная диаграмма 162
Векторы вращающиеся 162
Ветви электрической цепи 138
— — — дополнительные 139
Вещественная частотная характеристика 368
— положительная функция 443
Вихревые токи 183
Взаимная индуктивность 72
— проводимость 212
Взаимное сопротивление 206
Включение встречное 222
— согласное 222
Вносимое сопротивление активное 227
— — реактивное 227
Внешняя характеристика 136
Волна обратная (отраженная) 447, 495, 498
— преломления 498
— прямая (падающая) 478, 495, 498
Волновая проводимость 249
Волновое сопротивление 242, 479, 492
— уравнение 490
Волны бегущие 477
— в неискржающей линии 495
— напряжения и тока 478
Вращающееся магнитное поле 272
Встречное включение 222
Входная проводимость 212
Входное сопротивление 206
Высшие гармоники 282
— — в трехфазной цепи 292
- Герц Г., опыты по получению и распространению электромагнитных волн 10
- Гилберт, о магнитных и электрических явлениях 10
Г-образная схема 425
Главная ветвь 139
- Данилевский А. М., операторный метод 345
Действующее значение несинусоидальных э. д. с., напряжения и тока 289
— — синусоидальных э. д. с., тока и напряжения 159
Декремент колебания 326
— — логарифмический 326
Дерево электрической цепи 129
Диаграммы круговые 411
Дифференцирующие цепи 403
Диэлектрики 29
Диэлектрическая восприимчивость 35
— проницаемость абсолютная 31
— относительная 31
Длина волны 478, 480
Добротность контура 243, 249
Дроби ценные 452
Дробный эффект 396
- Единичная функция 379
— импульсная функция 380
- Заграждающий фильтр 422, 433
Задающий ток 209
Закон Кирхгофа первый 141, 192, 351
— — второй 142, 192, 351
— Кулона 31
— Ленца — Джоуля 53
— Ома 53
— полного тока 86
— электромагнитной индукции 65
Законы магнитной цепи 146
Замкнутая структурная схема 437
Заряды свободные 37
— связанные 37
Затухание контура 243, 249, 326
Затухающие колебания 325
Зона прозрачности 422
- Игнатовский В. С., операторный метод 345
Идеальный источник тока 137
— — э. д. с. 136
— трансформатор 228
Изображение интеграла функции 348
— производной функции 347
— функции 346
Изолирующие вещества 29
Импульсная функция единичная 380
— система 377
Импульсные э. д. с. и токи 377
— процессы 377
Импульсная характеристика цепи 382

- Импульсная проводимость цепи 386
 Индуктивность взаимная 72
 — собственная 71
 Интеграл Дюамеля 383, 384
 — Лапласа 346
 — Римана — Меллина 376
 — Фурье 366
 Интегрирующие цепи 405
 Источник тока 136
 — э. д. с. 136
 — энергии 135.
- Контактная э. д. с. 61
 Контур электрической цепи 139
 Колебания затухающие 325
 — незатухающие 325
 — энергии 173
 Колебательный контур 258
 — энергии при резонансе 243, 249, 257
 Комплексная амплитуда 187
 — мощность 193
 — проводимость 191
 Комплексное сопротивление 191
 Короткое замыкание однородной линии 483
 — — четырехполосника 393
 Коэффициент амплитуды кривой 161
 — связи 227, 229
 — затухания 420, 474
 — модуляции 301
 — мощности 171
 — отражения волн 478, 499
 — преломления волн 499
 — распространения линии 474
 — фазы 420, 474
 — затухания линии 474
 — формы кривой 161
 Круговое вращающееся магнитное поле 274
- Лебедев П. Н., исследование электромагнитной природы света 10
 Ленин В. И., о физических явлениях 20
 Ленц Э., принцип электромагнитной инерции 10, 72
 Лестничная цепь 401
 Линейные напряжения и токи 268
 — провода 267
 Линии магнитной индукции 62
 — равного потенциала 56
 — тока 43
 — электрического смещения 41
 — напряженности электрического поля 33
 — напряженности магнитного поля 84
 Линия однородная 471
 — неискажающая 479
 Логарифмический декремент колебания 326
 Ломоносов М. В., работы в области электрических явлений 7
- Магнитная индукция 26
 — постоянная 78
 — цель 114
 Магнитный момент элементарного тока 84
 — пояс 80
 Магнитодвижущая сила 87
 Максвелл, закон электромагнитной индукции 66
 — постулат об электрическом смещении 40
 — теория электромагнитного поля 10
 — электрическое смещение 39
 Мгновенное значение мощности 170
 Мгновенные значения напряжения тока и э. д. с. 155
 Мера передачи 419
 Метод контурных токов 203
 — узловых напряжений 207
 — эквивалентного генератора 216
- Метод последовательных приближений 149
 — преобразования частоты 430
 Механические проявления магнитного поля 105'
 — — электрического поля 95
 Минимально-фазовые четырехполосники 402
 Миткевич В. Ф., физические представления об электромагнитных явлениях 10
 — комплексный метод 186
 Многофазная система несимметричная 266
 — — неуравновешенная 266
 — — связанная 267
 — — симметричная 266
 — — уравновешенная 266
 — — токов, напряжений и э. д. с. 264
 — — электрических цепей 264
 Многофазные цепи 264
 Модулированный ток 301
 Модуляция колебаний 301
 — амплитудная 302
 — частотная 302
 Мощность активная 170
 — в комплексной форме 193
 — мгновенная 170
 — трехфазной системы 269
 — полная 172
 — реактивная 172
 Мостовая цепь 401
- Намагничивающая сила 87
 Напряжение электрическое 52, 74
 Напряженность магнитного поля 84
 — электрического поля 24
 Напряжение линейное 268
 — фазное 268
 Начальные условия 306
 — — ненулевые 307
 — — нулевые 307
 — фазы 155
 Незатухающие колебания 325
 Неискажающая линия 479
 Нейтральная точка 267
 Нейтральный провод 267
 Неминимально-фазовые четырехполосники 402
 Несимметричные системы 264
 Несущая частота 301
 Нулевой последовательности система 266
 Нули функции 243
- Обратная волна 478
 — связь 406, 436
 Обращение прямой 412
 Объемная плотность энергии магнитного поля 103
 — — электрического поля 93
 Однородная линия 471
 Операторное сопротивление 352
 Операторный метод 345
 Основная (первая) гармоника ряда Фурье 282
 Отражение волн от конца линии 501
 Отраженная волна 447, 495, 498
 Отрицательная обратная связь 406
- Падающая волна 478, 495, 498
 Падение напряжения 53
 Параллельное соединение 139
 — — четырехполосников 396
 — — в структурной схеме 435
 Параллельно-производные фильтры 428
 Параметры электрической цепи 125
 — распределенные 117, 470
 — сосредоточенные 122
 — четырехполосника 390, 391

- Параметры эквивалентные 177
 Парсеваля равенство 369
 Пассивные электрические цепи 117
 — двухполосники 140
 — четырехполосники 388
 Передаточные функции 398
 Передающие электромагнитную энергию цепи 115
 Переходная характеристика цепи 379
 — проводимость цепи 379
 Переходные процессы 303
 Периодические э. д. с., токи и напряжения 155, 282
 Период э. д. с. 155
 — собственных колебаний линии 506
 — — незатухающих колебаний 325
 — затухающих колебаний 325
 Плоская электрическая цепь 139
 Плоская электрическая цепь 139
 Плотность тока переноса 45
 — — проводимости 43
 — — смещения 47
 — тока 42
 П-образная эквивалентная схема 392
 Поверхность равного потенциала 56
 Поверхностный эффект 183
 Повторное сопротивление 419
 Поле магнитное 25
 — постоянных токов 55
 — стационарное 55
 — электрическое 23
 — электростатическое 23
 — потенциальное 55
 Полный ток 50
 Положительная вещественная функция 443
 Положительная обратная связь 407
 Полосовые фильтры 422, 432
 Полупроводящие вещества 29
 Плюсы функций 243
 Поляризация диэлектриков 33
 Поляризованность диэлектрика 34, 36
 Попов А. С., изобретение радио 11
 Последовательное соединение 138
 — — четырехполосников 397
 — — в структурной схеме 435
 Последовательно-производные фильтры 428
 Постоянная времени цепи 309, 314
 — составляющая ряда Фурье 282
 Постоянный электрический ток 55
 Потенциал электрический 53
 Потери на вихревые токи 183
 Поток вектора напряженности электрического поля 30
 — электрического смещения 41
 — взаимной индукции 71
 — магнитный 62
 — самоиндукции 71
 — рассеяния 146
 Потокосцепление 70
 Преломленная волна 498
 Преобразование соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой 199
 Преобразование частоты 430
 Переходящий ток 304
 Принцип взаимности 214
 Принцип наложения 212
 — непрерывности магнитного потока 62
 — — электрического тока 50
 Проводимость активная 169
 — волновая 249
 — емкостная 169
 — индуктивная 169
 — операторная (обобщенная) 354
 — переходная 379
 — полная 169
 Проводимость реактивная 169
 — эквивалентная 178
 Проводящие вещества 29
 Прямая волна 478, 495, 498
 Пульсирующее магнитное поле 275
 Пустота 19
 Пучности напряжения и тока 485
 Пьезоэлектрические фильтры 423
 Разность потенциалов 53
 — фаз напряжения и тока 156
 Разряд конденсатора колебательный 304
 Распространение волн в линии 478, 498
 Расчет токов короткого замыкания 278
 Реактивная мощность 172
 — проводимость 169
 Реактивное напряжение 179
 — сопротивление 165
 — сопротивление эквивалентное 178
 Реактивный ток 179
 — фильтр 422
 Резонанс 167, 241
 — в индуктивно-связанных цепях 259
 — напряжений 242
 — токов 248
 Резонансная частота цепи 242, 248
 Релея теорема 369
 Ряд Фурье 282
 — — в комплексной форме 298
 Связи коэффициент 227, 229
 Силы в электрическом поле 95
 — электромагнитные 105
 Символический метод 186
 Симметричные системы напряжений, токов и э. д. с. 264
 — составляющие трехфазной системы 275
 Симметричный четырехполосник 392
 Система прямой последовательности 265
 Синусоидальные напряжения, э. д. с. и токи 155
 Синтез электрических цепей 151, 440
 Скачкообразные функции 378
 Скрещенная цепь 401
 Сложные электрические цепи 197
 Случайные э. д. с., токи и напряжения 396
 Соединение (связывание) звездой 200, 267
 — (связывание) треугольником 200, 267
 — многоугольником 267
 — смешанное 139, 196
 — параллельное 139
 — последовательное 138
 Сопротивление активное 165
 — — эквивалентное 178
 — взаимное 206
 — волновое 242, 279, 492
 — емкостное 165
 — индуктивное 165
 — обобщенное (операторное) 352
 — общее 203
 — повторное 419
 — полное 165
 — полное эквивалентное 178
 — реактивное 165
 — реактивное эквивалентное 178
 — собственное 203
 — характеристическое 418
 Спектральная плотность функции 368
 — характеристика функции 367
 Среднее значение напряжения, тока и э. д. с. 161
 — квадратичное значение напряжения, тока и э. д. с. 289

- Стоячие волны 485
 Схема электрической цепи 138
 Схема эквивалентная трансформатору 227
- Теорема Гаусса** 31
 — об эквивалентном генераторе 216
 — Релея 369
- Термоэлектродвижущая сила** 61
Термоэлемент 61
- T-образная эквивалентная схема** 392
- Ток переноса** 42
 — проводимости 42
 — смещения 42
 — электрический 42
 — синусоидальный 155
 — периодический 155, 282
 — переходящий 304
 — реактивный 179
- Токи вихревые** 183
 — Фуко 183
 — фазные 268
- Топографические диаграммы** 271
- Трансформатор линейный** 225
 — идеальный 228
 — совершенный 228
- Треугольник напряжений** 179
 — проводимостей 179
 — сопротивлений 179
 — токов 179
- Трехфазная симметричная система** 265
- Трубка единичная** 32
 — магнитной индукции 62
 — тока 43
 — электрического смещения 41
- Угловая частота собственных незатухающих колебаний** 325
 — — — затухающих колебаний 325
 — — — напряжения, тока и э. д. с. 155
- Угол потерь в конденсаторе** 181
 — сдвига фаз напряжения и тока 156
- Удельная электрическая проводимость** 43
- Узлы стоячих волн** 485
- Узлы электрической цепи** 139
- Уравнение однородной линии** 472
 — четырехполюсника 390
- Установившиеся величины** 155, 163, 304
- Установившийся режим** 304
- Фаза тока, напряжения и э. д. с.** 155
 — начальная тока, напряжения э. д. с. 155
- Фазные токи, напряжения** 268
- Фазовая скорость волны** 477
- Фазо-частотная характеристика** 368
- Фильтры частотные электрические** 422
 — верхних частот 430
 — заграждающие 422
 — низких частот типа k 426
 — — — m 428
 — полосовые 422, 430
 — реактивные 422
- Фарадей, открытие явления электромагнитной индукции** 10, 68.
- Функции цепи** 440
- Характеристики однородной линии** 479
- Характеристическое сопротивление линии** 474
- Характеристические сопротивления четырехполюсника** 418
- Хевисайд, операторный метод** 345
- Холостой ход однородной линии** 482
 — — — четырехполюсника 393
- Цепи активные** 116
 — линейные 125
 — нелинейные 125
 — пассивные 117
 — с распределенными параметрами 117, 470
 — с сосредоточенными параметрами 122
 — планарные 139
- Цепь электрическая** 114
 — магнитная 114
- Цепные схемы** 417
- Частота напряжения, тока и э. д. с.** 155
 — резонансная 242, 248
 — угловая 155
 — комплексная 376
- Частотные характеристики** 243, 249, 367
 — — — цепей, состоящих из реактивных элементов 252
 — — — цепей в общем случае 256
- Четырехполюсник активный** 388, 408
 — пассивный 388
 — минимально-фазовый 402
 — неминимально-фазовый 402
 — симметричный 392
- Эквивалентная индуктивность** 222
 — схема линейного трансформатора 227
- Эквивалентные параметры цепей** 177
 — полные сопротивления 178
 — активные сопротивления 178
 — реактивные сопротивления 178
 — сопротивления для нулевой, обратной и прямой составляющих 277
- Электрическая схема** 138
 — постоянная 31
 — цепь 114
- Электрический диполь** 34
 — момент диполя 34
 — потенциал 53
- Электрические фильтры** 422
- Электрическое смещение** 33
- Электродвижущая сила** 57
 — — — взаимной индукции 71
 — — — самоиндукции 71
- Электростатика** 23
- Энергия магнитного поля** 103
 — — — системы контуров с токами 102
 — электрического поля 94
- Эпинус Ф., о родстве электрических и магнитных явлений** 8
- Эрстед, механическое воздействие электрического тока на магнитную стрелку** 9
- Явление сверхпроводимости** 73



Предисловие	5
Введение	7

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

<i>Глава первая. Обобщение понятий и законов электромагнитного поля . .</i>	17
1-1. Общая физическая основа задач теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей	—
1-2. Элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, и электромагнитное поле как особые виды материи	18
1-3. Связь между электрическими и магнитными явлениями. Электрическое и магнитное поля как две стороны единого электромагнитного поля	22
1-4. Связь заряда частиц и тел с их электрическим полем. Теорема Гаусса	29
1-5. Поляризация диэлектриков. Электрическое смещение. Постулат Максвелла	33
1-6. Электрические токи проводимости, переноса и смещения	42
1-7. Принцип непрерывности электрического тока	49
1-8. Электрическое напряжение. Разность электрических потенциалов. Электродвижущая сила	52
1-9. Магнитный поток. Принцип непрерывности магнитного тока	62
1-10. Закон электромагнитной индукции	65
1-11. Потокосцепление. Э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции. Принцип электромагнитной инерции	69
1-12. Потенциальное и вихревое электрические поля	74
1-13. Связь магнитного поля с электрическим током	78
1-14. Намагниченность вещества и напряженность магнитного поля	82
1-15. Закон полного тока	86
1-16. Основные уравнения электромагнитного поля	88
<i>Глава вторая. Энергия и механические проявления электрического и магнитного полей</i>	91
2-1. Энергия системы заряженных тел. Распределение энергии в электрическом поле	—
2-2. Силы, действующие на заряженные тела	95
2-3. Энергия системы контуров с электрическими токами. Распределение энергии в магнитном поле	100
2-4. Электромагнитная сила	105

Глава третья. Основные понятия и законы теории электрических и магнитных цепей	113
3-1. Электрические и магнитные цепи	—
3-2. Элементы электрических цепей. Активные и пассивные части электрических цепей	115
3-3. Физические явления в электрических цепях. Цепи с распределенными параметрами	117
3-4. Научные абстракции, принимаемые в теории электрических цепей, их практическое значение и границы применимости. Цепи с сосредоточенными параметрами	122
3-5. Параметры электрических цепей. Линейные и нелинейные электрические и магнитные цепи	125
3-6. Связи между напряжением и током в основных элементах электрической цепи	129
3-7. Условные положительные направления тока и э. д. с. в элементах цепи и напряжения на их зажимах	131
3-8. Источники э. д. с. и источники тока	135
3-9. Схемы электрических цепей. Элементы схемы цепи	138
3-10. Законы электрических цепей. Дифференциальные уравнения, описывающие процессы в цепях с сосредоточенными параметрами	141
3-11. Законы и параметры магнитных цепей	146
3-12. Анализ и синтез — две основные задачи теории электрических цепей	150

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Глава четвертая. Основные свойства и эквивалентные параметры электрических цепей при синусоидальных токах	155
4-1. Синусоидальные э. д. с., напряжения и токи. Источники синусоидальных э. д. с. и токов	—
4-2. Действующие и средние значения периодических э. д. с., напряжений и токов	159
4-3. Изображение синусоидальных э. д. с., напряжений и токов с помощью вращающихся векторов. Векторные диаграммы	162
4-4. Установившийся синусоидальный ток в цепи с последовательным соединением участков r , L и C	163
4-5. Установившийся синусоидальный ток в цепи с параллельным соединением участков g , L и C	168
4-6. Активная, реактивная и полная мощности	170
4-7. Мгновенная мощность и колебания энергии в цепи синусоидального тока	173
4-8. Эквивалентные параметры сложной цепи переменного тока, рассматриваемой в целом как двухполюсник	177
4-9. Схемы замещения двухполюсника при заданной частоте	180
4-10. Влияние различных факторов на эквивалентные параметры цепи	182
Глава пятая. Методы расчета электрических цепей при установившихся синусоидальном и постоянном токах	186
5-1. Комплексный метод	—
5-2. Комплексные сопротивление и проводимость	191
5-3. Выражения законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме	192
5-4. Расчет мощности по комплексным напряжению и току	193

5-5.	Расчет при последовательном соединении участков цепи	194
5-6.	Расчет при параллельном соединении участков цепи	195
5-7.	Расчет при смешанном соединении участков цепи	196
5-8.	О расчете сложных электрических цепей	197
5-9.	Расчет цепи, основанный на преобразовании соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой	199
5-10.	Преобразование нескольких параллельно соединенных ветвей с источниками э. д. с. в одну эквивалентную ветвь	202
5-11.	Метод контурных токов	203
5-12.	Метод узловых напряжений	207
5-13.	Принцип наложения и основанный на нем метод расчета цепи	212
5-14.	Принцип взаимности и основанный на нем метод расчета цепи	214
5-15.	Метод эквивалентного генератора	216
5-16.	Расчет цепей при наличии взаимной индукции	221
5-17.	Трансформаторы с линейными характеристиками. Идеальный трансформатор	225
5-18.	Цепи, связанные через электрическое поле	229
5-19.	Матричная запись уравнений при расчете электрических цепей	230
5-20.	Решение уравнений цепи, записанных в матричной форме	234
5-21.	Баланс мощностей в сложной цепи	237
5-22.	Расчет сложных цепей при постоянном токе	239
Глава шестая. Резонансные явления и частотные характеристики		241
6-1.	Понятие о резонансе и о частотных характеристиках в электрических цепях	—
6-2.	Резонанс в случае последовательного соединения участков r, L, C	242
6-3.	Частотные характеристики цепи с последовательным соединением участков r, L, C	243
6-4.	Резонанс при параллельном соединении участков g, L, C	248
6-5.	Частотные характеристики цепи с параллельным соединением участков g, L, C	249
6-6.	Частотные характеристики цепей, содержащих только реактивные элементы	252
6-7.	Частотные характеристики цепей в общем случае	256
6-8.	Резонанс в индуктивно связанных контурах	259
6-9.	Практическое значение явления резонанса в электрических цепях	261
Глава седьмая. Расчет трехфазных цепей		264
7-1.	Многофазные цепи и системы и их классификация	—
7-2.	Расчет трехфазной цепи в общем случае несимметрии э. д. с. и несимметрии цепи	269
7-3.	Получение вращающегося магнитного поля	272
7-4.	Разложение несимметричных трехфазных систем на симметричные составляющие	275
7-5.	О применении метода симметричных составляющих к расчету трехфазных цепей	277
Глава восьмая. Расчет электрических цепей при несинусоидальных периодических э. д. с., напряжениях и токах		282
8-1.	Метод расчета мгновенных значений установившихся напряжений и токов в линейных электрических цепях при действии периодических несинусоидальных э. д. с.	—

8-2. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении	286
8-3. Действующие значения периодических несинусоидальных токов, напряжений и э. д. с.	289
8-4. Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях	290
8-5. Особенности поведения высших гармоник в трехфазных цепях	292
8-6. О составе высших гармоник при наличии симметрии форм кривых тока или напряжения	294
8-7. Представление ряда Фурье в комплексной форме	296
8-8. Биения колебаний	299
8-9. Модулированные колебания	301
Глава девятая. Расчет переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами классическим методом	303
9-1. О переходных процессах в линейных электрических цепях	—
9-2. Общий путь расчета переходных процессов в линейных электрических цепях	304
9-3. Определение постоянных интегрирования из начальных условий	306
9-4. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками r и L	308
9-5. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками r и C	313
9-6. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками r , L и C	319
9-7. Разряд конденсатора на цепь r , L	321
9-8. Включение цепи r , L , C под постоянное напряжение	327
9-9. Включение цепи r , L , C под синусоидальное напряжение	329
9-10. Переходные процессы при мгновенном изменении параметров участков цепи	332
9-11. Расчет переходных процессов в сложной цепи	337
9-12. Расчет переходных процессов в сложных цепях с помощью вычислительных машин непрерывного действия	343
Глава десятая. Расчет переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами операторным методом	345
10-1. Операторное изображение функций, их производных и интегралов	—
10-2. Примеры изображений функций	349
10-3. Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме	351
10-4. Расчет переходных процессов в электрических цепях операторным методом	354
10-5. Переход от изображений к оригиналу. Теорема разложения	357
10-6. Свойства корней характеристического уравнения	363
Глава одиннадцатая. Спектральное представление непериодических функций — интегральное преобразование Фурье. Расчет переходных процессов методом частотных характеристик	365
11-1. Представление непериодических функций времени с помощью интеграла Фурье	—
11-2. Частотные характеристики	367
11-3. Получение частотных характеристик заданной функции времени	369
11-4. Расчет переходных процессов при помощи частотных характеристик	372

11-5. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа. Понятие о комплексной частоте	375
Глава двенадцатая. Расчет электрических цепей при воздействии импульсных э. д. с. и э. д. с. произвольной формы	377
12-1. Понятие об импульсных э. д. с. и импульсных системах	—
12-2. Переходные и импульсные характеристики электрической цепи и расчет цепи при воздействии импульсной э. д. с.	378
12-3. Расчет цепи при воздействии э. д. с. произвольной формы — интеграл Дюамеля	383
12-4. О случайных процессах в электрических цепях	386
Глава тринадцатая. Анализ общих свойств четырехполюсников	388
13-1. Различные виды уравнений четырехполюсника	—
13-2. Эквивалентные схемы четырехполюсника	392
13-3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника	393
13-4. Соединения четырехполюсников и матричная запись уравнений четырехполюсника	395
13-5. Передаточные функции четырехполюсников	398
13-6. Дифференцирующие и интегрирующие цепи	403
13-7. Обратные связи	406
13-8. Активный четырехполюсник	408
13-9. Круговая векторная диаграмма четырехполюсника.	410
Глава четырнадцатая. Цепные схемы. Электрические фильтры. Структурные схемы	417
14-1. Характеристические параметры четырехполюсника	—
14-2. Передаточные функции согласованных цепных схем	421
14-3. Электрические фильтры	422
14-4. Электрические фильтры нижних частот типа k	426
14-5. Электрические фильтры нижних частот типа m	428
14-6. Метод преобразования частоты. Электрические фильтры верхних частот. Полосовые электрические фильтры	430
14-7. Структурные схемы	434
14-8. К вопросу об устойчивости в электрических цепях	437
Глава пятнадцатая. Синтез электрических цепей	440
15-1. Задача синтеза электрических цепей	—
15-2. Свойства входных функций пассивных электрических цепей	441
15-3. Представление входных функций в виде простых дробей	444
15-4. Реализация входных функций двухполюсника, имеющих вещественные и мнимые корни знаменателя, при помощи разложения этих функций на простые дроби	445
15-5. Реализация входных функций двухполюсника, имеющих только мнимые корни знаменателя, при помощи представления этих функций в виде цепных дробей	449
15-6. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Проверка отсутствия нулей и полюсов в правой полуплоскости	457
15-7. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Проверка условия положительности функции $\operatorname{Re} [F(p)] \geq 0$ при $\operatorname{Re}(p) = \sigma \geq 0$	459
15-8. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Реализация заданных функций, имеющих вещественные, мнимые и комплексные корни	463
15-9. О синтезе передаточных функций четырехполюсника.	467

Глава шестнадцатая. Электрические цепи с распределенными параметрами при установившемся режиме	470
16-1. Электрические цепи с распределенными параметрами	—
16-2. Уравнения линии с распределенными параметрами.	471
16-3. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме	473
16-4. О моделировании однородной линии цепной схемой	476
16-5. Бегущие волны	477
16-6. Характеристики однородной линии. Условия для неискажающей линии	479
16-7. Однородная линия при различных режимах работы	481
16-8. Линии без потерь	485
Глава семнадцатая. Электрические цепи с распределенными параметрами при переходных процессах	489
17-1. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами	—
17-2. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе классическим методом	—
17-3. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе операторным методом	492
17-4. Волны в неискажающей линии	495
17-5. О происхождении и характере волн в линиях	497
17-6. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий	498
17-7. Отражение волн от конца линии	501
17-8. Процесс включения однородной линии	505
17-9. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий	507
17-10. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте сопряжения однородных линий	510
Предметный указатель	513
Оглавление	517

НЕЙМАН Леонид Робертович
ДЕМИРЧЯН Камо Серопович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Научные редакторы И. Ф. Кузнецов и В. Ф. Попова
Редактор Е. А. Алексеева
Художественный редактор Г. А. Гудков
Техн. редактор В. И. Семенова
Корректор Л. Г. Андриященко
Обложка А. А. Винер

Подписано к печати с матриц 9/X 1967 г.
М-53572. Печ. л. 32,75. Уч.-изд. л. 29.
Бум. л. 16,37. Бумага типографская № 2.
Формат 60 × 90 ¹/₁₆. Допечатка тиража 100 000 экз.
Цена 1 р. 22 к. Заказ № 1240.

Ленинградское отделение
издательства «Энергия»
Марсово поле, 1

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 1
«Печатный Двор» имени А. М. Горького
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР, г. Ленинград,
Гатчинская ул., 26.

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**



ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

10/28

